

专题 1 一元二次不等式的解法

第一讲 一元二次不等式与二次函数关系

$ax^2 + bx + c > 0$ 意味着 $y = ax^2 + bx + c$ 中 $y > 0$ 部分, $ax^2 + bx + c < 0$ 意味着 $y = ax^2 + bx + c$ 中 $y < 0$ 部分, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, 求出两个根 x_1, x_2 ; 根据图像可知: 开口向上时, 大于取两边, 小于取中间, 反之亦然.

【例 1】 解关于 x 的不等式 $-x^2 - 2x + 3 > 0$.

【解析】 由题不等式可变形为 $-(x-1)(x+3) > 0$, 因为 $a < 0$, 不等式的解集为 $\{x | -3 < x < 1\}$.

【例 2】 解关于 x 的不等式 $\frac{2x-1}{x+1} \geq 1$.

【解析】 不等式可变形为 $\frac{2x-1-x-1}{x+1} \geq 0$, 即 $\frac{x-2}{x+1} \geq 0$, 故 $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$.

【例 3】 已知关于 x 的不等式 $ax^2 - 3x + 2 > 0$ 的解集为 $\{x | x < 1 \text{ 或 } x > b\}$.

(1) 求 a, b ;

(2) 解关于 x 的不等式 $ax^2 - (ac+b)x + bc < 0 (c \in R)$.

【解析】 (1) $ax^2 - 3x + 2 = a(x-1)(x-b) > 0$, 解得: $a=1, b=2$

(2) $ax^2 - (ac+b)x + bc = x^2 - (c+2)x + 2c = (x-2)(x-c) < 0$

当 $c > 2$, 不等式解集为 $\{x | 2 < x < c\}$;

当 $c = 2$, 不等式解集为 ϕ ;

当 $c < 2$, 不等式解集为 $\{x | c < x < 2\}$.

秒杀秘籍: 第二讲 一元二次不等式与韦达定理

模型一: 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 (m, n) , 解关于 x 的不等式 $cx^2 + bx + a > 0$.

由 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 (m, n) , 得: $a(\frac{1}{x})^2 + b\frac{1}{x} + c > 0$ 的解集为 $(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})$, 即关于 x 的不等式 $cx^2 + bx + a > 0$ 的解集为 $(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})$.

已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 (m, n) , 解关于 x 的不等式 $cx^2 + bx + a \leq 0$.

由 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 (m, n) , 得: $a(\frac{1}{x})^2 + b\frac{1}{x} + c \leq 0$ 的解集为 $(-\infty, \frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{m}, +\infty)$ 即关于 x 的不等式 $cx^2 + bx + a \leq 0$ 的解集为 $(-\infty, \frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{m}, +\infty)$.

模型二: 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 (m, n) , 解关于 x 的不等式 $cx^2 - bx + a > 0$.

由 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 (m, n) , 得: $a(\frac{1}{x})^2 - b\frac{1}{x} + c > 0$ 的解集为 $(-\frac{1}{m}, -\frac{1}{n})$ 即关于 x 的不等式 $cx^2 - bx + a > 0$ 的解集为 $(-\frac{1}{m}, -\frac{1}{n})$.

已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 (m, n) , 解关于 x 的不等式 $cx^2 - bx + a \leq 0$.

由 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 (m, n) , 得: $a(\frac{1}{x})^2 - b\frac{1}{x} + c \leq 0$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{1}{m}] \cup [-\frac{1}{n}, +\infty)$ 即关于 x 的不等式 $cx^2 - bx + a \leq 0$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{1}{m}] \cup [-\frac{1}{n}, +\infty)$, 以此类推.

【例 4】 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | 2 < x < 4\}$, 则不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 的解集为 ()

- A. $\{x | x < \frac{1}{4} \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\}$ B. $\{x | x < \frac{1}{4}\}$ C. $\{x | x > \frac{1}{2}\}$ D. $\{x | \frac{1}{2} < x < \frac{1}{4}\}$

【解析】 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(2, 4)$, 得: $a(\frac{1}{x})^2 + b\frac{1}{x} + c < 0$ 得解集为 $(-\infty, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$,

即关于 x 的不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 的解集为 $(-\infty, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

第三讲 一元二次不等式与判别式

已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 R , 则一定满足 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 ϕ , 则一定满足 $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 R , 则一定满足 $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 ϕ , 则一定满足 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

达标训练 1

一、选择题

1. 函数 $f(x) = \log_2(x^2 + 2x - 3)$ 的定义域是 ()

- A. $[-3, 1]$ B. $(-3, 1)$ C. $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$ D. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

2. 集合 $A = \{x | x^2 - 2x \leq 0\}$, $B = \{x | y = \lg(1-x)\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

- A. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ B. $\{x | 0 \leq x < 1\}$ C. $\{x | 0 < x \leq 2\}$ D. $\{x | 0 \leq x < 2\}$

3. 设集合 $M = \{x | 0 \leq x < 3\}$, $N = \{x | x^2 - 3x - 4 < 0\}$, 则集合 $M \cap N$ 等于 ()

- A. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ B. $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ C. $\{x | 0 \leq x < 3\}$ D. $\{x | 0 \leq x \leq 3\}$

4. 设关于 x 的不等式 $(ax-1)(x+1) < 0 (a \in R)$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 1\}$, 则 a 的值是 ()

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

5. 若不等式 $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ 的解集是 ()

- A. $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$ B. $\{x | x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 1\}$ C. $\{x | x \geq 1\}$ D. $\{x | x \leq -3\}$

6. 不等式的 $(x-2)(2x-3) < 0$ 解集是 ()

- A. $(-\infty, \frac{3}{2}) \cup (2, +\infty)$ B. R C. $(\frac{3}{2}, 2)$ D. ϕ

7. 不等式 $-x^2 + 3x + 4 < 0$ 的解集为 ()

- A. $\{x | -1 < x < 4\}$ B. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 4\}$ C. $\{x | x < -4 \text{ 或 } x > 1\}$ D. $\{x | -4 < x < 1\}$

8. 不等式 $2x^2 + mx + n > 0$ 的解集是 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$, 则 m, n 的值分别是 ()

- A. $2, 12$ B. $2, -2$ C. $2, -12$ D. $-2, -12$

9. 若不等式 $ax^2 + bx + 1 > 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$, 则 $a+b =$ ()

- A. 6 B. 4 C. 2 D. 0

10. 不等式 $2x+3-x^2 > 0$ 的解集为 ()

- A. $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 1\}$ B. $\{x | -3 < x < 1\}$ C. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$ D. $\{x | -1 < x < 3\}$

11. 已知不等式 $x^2 + x - c > 0$ 的解为 $(-2, 1)$, 则 c 的值为 ()

- A. -2 B. 1 C. 2 D. 4

12. 关于 x 的不等式 $ax - b > 0$ 的解集是 $(-\infty, 1)$, 则关于 x 的不等式 $(ax+b)(x-3) > 0$ 的解集是 ()

- A. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ B. $(-1, 3)$ C. $(1, 3)$ D. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

二、解答题

13. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + 1 > 0$ 的解集为 $(-1, \frac{1}{3})$, 求不等式 $bx^2 + ax < -9$ 的解集.

14. 已知 $f(x) = ax^2 - 3x + 6$, 不等式 $f(x) > 4$ 的解集为 $\{x | x < 1 \text{ 或 } x > b\}$.

(1) 求出 a, b ;

(2) 解不等式 $\frac{f(x)}{x} > x$.

15. 已知函数 $f(x) = x^2 - 5x + a$.

(1) 当 $a = -4$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 2$ 的解集;

(2) 对任意 $x \in R$, 若 $f(x) \geq -2$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

达标训练 2

一、选择题

16. 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的零点为 2 和 3, 那么不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 ()
- A. $\{x | 2 < x < 3\}$ B. $\{x | -3 < x < -2\}$ C. $\{x | \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\}$ D. $\{x | -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}\}$
17. 关于 x 的不等式 $x^2 - bx + c < 0$ 的解集为 $(-1, 2)$, 则方程 $x^2 - bx + 2c = 0$ 的两根之积为 ()
- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4
18. 若 $ax^2 - 5x + b > 0$ 解集为 $\{x | -3 < x < 2\}$, 则 $bx^2 - 5x + a > 0$ 解集为 ()
- A. $\{x | x < -\frac{1}{3} \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\}$ B. $\{x | -3 < x < 2\}$ C. $\{x | -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\}$ D. $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 2\}$
19. 不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解集是 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, 则 $a + b$ 的值 ()
- A. 10 B. -14 C. 14 D. -10
20. 设一元二次不等式 $ax^2 + bx + 1 > 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$, 则 ab 的值为 ()
- A. B. $-\frac{1}{4}$ C. 4 D. $-\frac{1}{2}$
21. 不等式 $x^2 - px - q < 0$ 的解集是 $\{x | 2 < x < 3\}$, 则不等式 $qx^2 - px - 1 < 0$ 的解集是 ()
- A. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$ B. $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ C. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$
22. 设 $f(x) = ax^2 + (b-8)x - a - ab$, 若不等式 $f(x) < 0$ 的解集是 $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$, 则 $a + b =$ ()
- A. -8 B. -2 C. 8 D. 2
23. 已知一元二次函数 $f(x) = x^2 + bx + c$, 且不等式 $x^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\}$, 则 $f(10^x) > 0$ 的解集为 ()
- A. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > \lg 2\}$ B. $\{x | -1 < x < \lg 2\}$ C. $\{x | x > -\lg 2\}$ D. $\{x | x < -\lg 2\}$
24. 若 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 4\}$, 则对于函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 应有 ()
- A. $f(5) < f(2) < f(-1)$ B. $f(5) < f(-1) < f(2)$ C. $f(-1) < f(2) < f(5)$ D. $f(2) < f(-1) < f(5)$
25. 已知不等式 $ax^2 + 2x + c \geq 0$ 的解集为 $[-1, 3]$, 则对于函数 $f(x) = x^2 + 2ax + c$ 下列判断正确的是 ()
- A. $f(1+a) < f(-a) < f(c)$ B. $f(-a) < f(1+a) < f(c)$
C. $f(1+a) < f(c) < f(-a)$ D. $f(c) < f(-a) < f(1+a)$
26. 已知不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(-1, 2)$, 则不等式 $cx^2 + bx + a \leq 0$ 的解集为 ()
- A. $[-1, 2]$ B. $[-2, 1]$ C. $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $[-1, \frac{1}{2}]$
27. 已知不等式 $ax^2 - bx + 1 < 0$ 的解集是 $(-3, -2)$, 则不等式 $x^2 + bx - a > 0$ 的解集是 ()
- A. $(-\frac{1}{6}, 1)$ B. $(-\infty, -\frac{1}{6}) \cup (1, +\infty)$ C. $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ D. $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

二、填空题

28. 关于 x 的不等式 $x^2 - 2ax - 8a^2 < 0 (a > 0)$ 的解集为 (x_1, x_2) , 且 $x_2 - x_1 = 15$, $a =$ _____.
29. 若不等式 $ax^2 - bx + c > 0$ 的解集是 $(-1, 2)$, 则有以下结论: ① $a > 0$, ② $b < 0$ 且 $c > 0$, ③ $a + b + c < 0$, ④ $a - b + c > 0$, ⑤ 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $(-2, 1)$. 其中正确结论的序号是 _____.

达标训练 3

一、选择题

30. “已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(1,2)$, 解关于 x 的不等式 $cx^2 + bx + a > 0$.”给出如下的一种解法:

解: 由 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(1,2)$, 得, $a(\frac{1}{x})^2 + b\frac{1}{x} + c > 0$ 的解集为 $(\frac{1}{2},1)$

即关于 x 的不等式 $cx^2 + bx + a > 0$ 的解集为 $(\frac{1}{2},1)$.

参考上述解法: 若关于 x 的不等式 $\frac{b}{x+a} + \frac{x+b}{x+c} < 0$ 的解集为 $(-1, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$, 则关于 x 的不等式

$\frac{b}{x-a} - \frac{x-b}{x-c} > 0$ 的解集为 ()

- A. $(-1, 1)$ B. $(-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{3}, 1)$ C. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{3}, 1)$ D. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

31. 若不等式 $kx^2 + 2kx + 2 < 0$ 的解集为空集, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $0 < k < 2$ B. $0 \leq k < 2$ C. $0 \leq k \leq 2$ D. $k > 2$

32. 若不等式 $(m-1)x^2 + (m-1)x + 2 > 0$ 的解集是 R , 则 m 的范围是 ()

- A. $[1,9)$ B. $[2,+\infty)$ C. $(-\infty,1]$ D. $[2,9]$

33. $A = \{x | (a-2)x^2 - 2(a-2)x - 4 < 0\}$, 若 $A = R$ (R 为实数集), 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(-2,2)$ B. $(-2,+\infty)$ C. $(-2,2]$ D. \emptyset

34. 若关于 x 的一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是空集, 则 ()

- A. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

35. 二次不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是 R 的条件是 ()

- A. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

36. 不等式 $x^2 - 4x > 2ax + a$ 对一切实数 x 都成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(1,4)$ B. $(-4,-1)$ C. $(-\infty,-4) \cup (-1,+\infty)$ D. $(-\infty,1) \cup (4,+\infty)$

37. 若不等式 $x^2 - ax + a \leq 1$ 有解, 则 a 的取值范围为 ()

- A. $a < 2$ B. $a = 2$ C. $a > 2$ D. $a \in R$

38. 若关于 x 的不等式 $ax^2 - 2ax + 1 \leq 0$ 无解, 则实数 a 的取值集合为 ()

- A. $(0,1)$ B. $(0,1]$ C. $[0,1)$ D. $[0,1]$

39. 若不等式 $(1-a)x^2 - 4x + 6 > 0$ 的解集是 $\{x | -3 < x < 1\}$, 且 $ax^2 + bx + 3 \geq 0$ 的解集为 R , 则 b 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty,-6) \cup (6,+\infty)$ B. $[-6,6]$ C. $(-6,6)$ D. $(-\infty,-6] \cup [6,+\infty)$

40. 若不等式 $mx^2 + mx - 4 < 2x^2 + 2x - 1$ 对任意实数 x 均成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-2,2)$ B. $(-10,2]$ C. $(-\infty,-2) \cup [2,+\infty)$ D. $(-\infty,-2)$

41. 不等式 $(2-a)x^2 - 2(a-2)x + 4 > 0$ 对于一切实数 x 都成立, 则 ()

- A. $\{a | -2 < a < 2\}$ B. $\{a | -2 < a \leq 2\}$ C. $\{a | a < -2\}$ D. $\{a | a < -2 \text{ 或 } a > 2\}$

二、填空题

42. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{mx^2 + 4mx + 3}}$ 的定义域为 R , 则实数 m 的取值范围是_____.

43. 若不等式 $0 \leq x^2 + x - a \leq 1$ 的解集是单元素集, 则实数 a 的值为_____.

三、解答题

44. 若关于 x 的不等式 $ax^2 + 7x + 4 > 0$ 的解集是 $\{x | -\frac{1}{2} < x < 4\}$.

(1) 求关于 x 的不等式 $ma \cdot x^2 + (m+a)x + 3 + a > 0 (m \geq 0)$ 的解集;

(2) 若关于 x 的不等式 $ma \cdot x^2 + (m+a)x + 3 + a > 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.