

专题2 含参一元二次不等式

第一讲 二次项系数为1的一元二次不等式

- (1) 分解因式得到 $(x-x_1)(x-x_2)$ ，求出两个根 x_1, x_2 。
 (2) 比较两个根的大小， $x_1=x_2$ ； $x_1>x_2$ ； $x_1<x_2$ ，并分别进行讨论。

【例1】解关于 x 的不等式 $x^2(-1+a)x+a < 0(a \in R)$

【解析】不等式可变形为 $(x-1)(x-a) < 0$ ，当 $a > 1$ ，不等式的解集为 $\{x|1 < x < a\}$ ；当 $a = 1$ ，不等式的解集为 \emptyset ；当 $a < 1$ ，不等式的解集为 $\{x|a < x < 1\}$ 。

【例2】解关于 x 的不等式 $x^2+2x+1-a^2 \leq 0(a \in R)$

【解析】不等式可变形为 $(x+1-a)(x+1+a) \leq 0$ ，当 $a > 0$ ，不等式的解集为 $\{x|-1-a \leq x \leq -1+a\}$ ；当 $a = 0$ ，不等式的解集为 $\{x|x = -1\}$ ；当 $a < 0$ ，不等式的解集为 $\{x|-1+a \leq x \leq -1-a\}$ 。

【例3】求不等式 $12x^2-ax > a^2(a \in R)$ 的解集。

【解析】不等式可变形为 $(4x+a)(3x-a) > 0$ ，当 $a > 0$ ，不等式的解集为 $\{x|x < -\frac{a}{4} \text{ 或 } x > \frac{a}{3}\}$ ；当 $a = 0$ ，不等式的解集为 $\{x|x \neq 0\}$ ；当 $a < 0$ ，不等式的解集为 $\{x|x < \frac{a}{3} \text{ 或 } x > -\frac{a}{4}\}$ 。

【例4】求不等式 $x^2-(a+\frac{1}{a})x+1 < 0$ 的解集。

【解析】不等式可变形为 $(x-a)(x-\frac{1}{a}) < 0$ ，当 $a < -1$ ，或 $0 < a < 1$ 时，不等式的解集为 $\{x|a < x < \frac{1}{a}\}$ ；当 $a = \pm 1$ 时，不等式的解集为 \emptyset ；当 $a > 1$ ，或 $-1 < a < 0$ 时，不等式的解集为 $\{x|x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > a\}$ 。

第二讲 二次项系数含参的一元二次不等式问题

- (1) 分析当 $a = 0$ 时的情况。
 (2) 十字相乘得到 $a(x-x_1)(x-x_2)$ ，求出两个根 x_1, x_2 ，若不能十字相乘，则要讨论 Δ 的情况。
 (3) 比较两个根的大小， $x_1=x_2$ ； $x_1>x_2$ ； $x_1<x_2$ ，并分别进行讨论。
 (4) 其中一种情况涉及到 $a > 0$ 以及 $a < 0$ ，再分开口方向讨论。

【例5】解关于 x 的不等式： $ax^2-2 \geq 2x-ax(a \in R)$ 。

【解析】原不等式变形为 $ax^2+(a-2)x-2 \geq 0$ 。(1) $a = 0$ 时， $x \leq -1$ ；当 $a \neq 0$ 时，原不等式变形为 $(ax-2)(x+1) = a(x-\frac{2}{a})(x+1) \geq 0$ ；(2) 当 $\frac{2}{a} < -1$ 时， $-2 < a < 0$ ，抛物线开口向下， $\frac{2}{a} \leq x \leq -1$ ；(3) 当 $\frac{2}{a} = -1$ 时， $a = -2$ ，抛物线开口向下， $x = -1$ ；(4) 当 $\frac{2}{a} > -1$ 时， $a > 0$ 或 $a < -2$ ， $a > 0$ 时，抛物线开口向上， $x \geq \frac{2}{a}$ 或 $x \leq -1$ ；当 $a < -2$ 时，抛物线开口向下， $-1 \leq x \leq \frac{2}{a}$ 。
 综上， $a = 0$ 时， $x \leq -1$ ； $a > 0$ 时， $x \geq \frac{2}{a}$ 或 $x \leq -1$ ；

$-2 < a < 0$ 时， $\frac{2}{a} \leq x \leq -1$ ； $a = -2$ 时， $x = -1$ ； $a < -2$ 时， $-1 \leq x \leq \frac{2}{a}$ 。

【例 6】 解关于 x 的不等式: $ax^2 + ax - 1 < 0$.

【解析】 (1) $a = 0$ 时, $-1 < 0$ 成立;

$a \neq 0$ 时, (2) $\Delta = a^2 + 4a < 0 \Leftrightarrow 0 > a > -4$, $x \in R$, $\Delta = a^2 + 4a \geq 0 \Leftrightarrow a > 0$ 或 $a \leq -4$, 此时

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}, x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}.$$

(3) 当 $x_1 > x_2$ 时, 则 $a > 0$, $\Delta > 0$, $\therefore \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2a} < x < \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}$;

(4) 当 $x_1 = x_2$ 时, 则 $a = -4$, $\Delta = 0$, $\{x | x \neq \frac{1}{2}\}$;

(5) 当 $x_1 < x_2$ 时, 则 $a < -4$, $\Delta > 0$, $\therefore x < \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}$ 或 $x > \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}$

综上, 可知当 $a > 0$ 时, 解集为 $(\frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}, \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2a})$; 当 $-4 < a \leq 0$ 时, 解集为 R ; 当 $a = -4$

时, 解集为 ϕ ; 当 $a < -4$ 时, 解集为 $(-\infty, \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}) \cup (\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}, +\infty)$.

第三讲 乘除的等价原理和穿根法

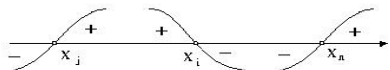
(1) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 异号, $\therefore f(x)g(x) < 0$.

(2) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 异号, $\therefore f(x)g(x) \leq 0$, 且 $g(x) \neq 0$.

(3) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同号, $\therefore f(x)g(x) > 0$.

(4) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同号, $\therefore f(x)g(x) \geq 0$, 且 $g(x) \neq 0$.

数轴穿根法 $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) > 0$ 或者 $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) < 0$



口诀: 移项调号, 分解排序, 奇穿偶回, 分母非零, 参数讨论, 小心等号.

【例 7】 解关于 x 的不等式: $\frac{x-a}{x-a^2} < 0$ ($a \in R$).

【解析】 原不等式等价于 $(x-a)(x-a^2) < 0$

(1) 若 $a = a^2$, $a = 0$ 或 $a = 1$ 时, 不等式的解集为空集

(2) 若 $a > a^2$, 即 $0 < a < 1$ 时, 不等式的解集为 $a^2 < x < a$

(3) 若 $a < a^2$, 即 $a > 1$ 或 $a < 0$ 时, 不等式的解集为 $a < x < a^2$

综上知: $a = 0$ 或 $a = 1$ 时, 不等式的解集为空集; $0 < a < 1$ 时, 不等式的解集为 $\{x | a^2 < x < a\}$;

$a > 1$ 或 $a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x | a < x < a^2\}$.

【例 8】 解关于 x 的不等式: $\frac{x}{x-1} < 1 - a$.

【解析】 原不等式变形为: $\frac{x}{x-1} + (a-1) < 0 \therefore \frac{x+(x-1)(a-1)}{x-1} < 0 \therefore \frac{ax-a+1}{x-1} < 0$ 等价于 $(x-1)(ax-a+1) < 0$

若 $a = 0$, 原不等式化为 $x < 1$;

当 $a \neq 0$ 时, $(x-1)(ax-a+1) = a(x-1)[x - (1 - \frac{1}{a})] < 0$; 此时 $x_1 = 1, x_2 = 1 - \frac{1}{a}$.

(1) 若 $x_1 > x_2$, 则 $a > 0$, 开口向上 $\therefore \frac{a-1}{a} < x < 1$;

(2) 若 $x_1 < x_2$, 则 $a < 0$, 开口向下 $\therefore x > \frac{a-1}{a}$ 或 $x < 1$;

综上, $a > 0$ 时, $\frac{a-1}{a} < x < 1$; $a = 0$ 时, $x < 1$; $a < 0$ 时, $x > \frac{a-1}{a}$ 或 $x < 1$.

第三章 不等式

【例9】解关于 x 的不等式： $\frac{x-a}{(x+2)(x-3)} < 0$ ($a \neq 3$, 且 $a \neq -2$)

【解析】(1) 当 $a < -2$ 时, $\{x|x < a, \text{ 或 } -2 < x < 3\}$;

(2) 当 $-2 < a < 3$ 时, $\{x|x < -2 \text{ 或 } a < x < 3\}$;

(3) 当 $a > 3$ 时, $\{x|x < -2 \text{ 或 } 3 < x < a\}$

达标训练

- 已知 $2a+1 < 0$, 关于 x 的不等式 $x^2 - 4ax - 5a^2 > 0$ 的解集是 ()
 A. $\{x|x > 5a \text{ 或 } x < -a\}$ B. $\{x|-a < x < 5a\}$
 C. $\{x|x < 5a \text{ 或 } x > -a\}$ D. $\{x|5a < x < -a\}$
- 不等式 $ax^2 - (a+2)x + 2 \geq 0$ ($a < 0$) 的解集为 ()
 A. $[\frac{2}{a}, 1]$ B. $[1, \frac{2}{a}]$ C. $(-\infty, \frac{2}{a}] \cup [1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1] \cup [\frac{2}{a}, +\infty)$
- 在关于 x 的不等式 $x^2 - (a+1)x + a < 0$ 的解集中恰有两个整数, 则 a 的取值范围是 ()
 A. (3,4) B. $(-2, -1) \cup (3, 4)$ C. (3,4] D. $[-2, -1) \cup (3, 4]$
- 关于 x 的不等式 $ax - b > 0$ 的解集是 $(1, +\infty)$, 则关于 x 的不等式 $(ax+b)(x-3) > 0$ 的解集是 ()
 A. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ B. $(-1, 3)$ C. (1,3) D. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
- 若 $0 < a < 1$, 则不等式 $(x-a)(x-\frac{1}{a}) > 0$ 的解集是 ()
 A. $(a, \frac{1}{a})$ B. $(\frac{1}{a}, a)$ C. $(-\infty, a) \cup (\frac{1}{a}, +\infty)$ D. $(-\infty, \frac{1}{a}) \cup (a, +\infty)$
- 求不等式 $x^2 - 2ax - 3a^2 > 0$ 的解集.
- 求不等式 $x^2 + ax - 1 < 0$ 的解集.
- 若关于 x 的不等式 $ax^2 - (a+1)x + 1 < 0$ ($a \in R$) 的解集为 $(\frac{1}{a}, 1)$, 则 a 的取值范围为 ()
 A. $a < 0$ 或 $a > 1$ B. $a > 1$ C. $0 < a < 1$ D. $a < 0$
- 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($ac \neq 0$), 若 $f(x) < 0$ 的解集为 $(-1, m)$, 则下列说法正确的是 ()
 A. $f(m-1) < 0$ B. $f(m-1) > 0$
 C. $f(m-1)$ 必与 m 同号 D. $f(m-1)$ 必与 m 异号
- 若关于 x 的不等式 $ax > b$ 的解集为 $(-\infty, \frac{1}{5})$, 则关于 x 的不等式 $ax^2 + bx - \frac{4}{5}a > 0$ 的解集为_____.
- 解关于 x 的不等式 $ax^2 + (1-a)x - 1 > 0$
- 解关于 x 的不等式 $ax^2 - 2x + a < 0$
- 不等式 $\frac{x^2 - x - 6}{x-1} > 0$ 的解集为 ()
 A. $\{x|x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$ B. $\{x|x < -2 \text{ 或 } 1 < x < 3\}$
 C. $\{x|-2 < x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$ D. $\{x|-2 < x < 1 \text{ 或 } 1 < x < 3\}$
- 不等式 $\frac{1+x}{2-x} \geq 0$ 的解集为 ()
 A. $[-1, 2]$ B. $[-1, 2)$ C. $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
- 不等式 $\frac{3x-1}{2-x} \geq 1$ 的解集为_____.
- 不等式 $\frac{ax}{x-1} < 1$ 的解集为 $\{x|x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$, 求 a 的值.
- 解不等式: (1) $\frac{x(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-1)} < 0$ (2) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 3x - 10} \geq 0$
- 解关于 x 的不等式 $\frac{x^2 + a - 2}{x+a} \geq 1$ ($a > 0$)