

## 专题2 含参一元二次不等式

## 第一讲 二次项系数为1的一元二次不等式

- (1) 分解因式得到 $(x-x_1)(x-x_2)$ ，求出两个根 $x_1, x_2$ 。  
 (2) 比较两个根的大小， $x_1=x_2$ ； $x_1>x_2$ ； $x_1<x_2$ ，并分别进行讨论。

**【例1】**解关于 $x$ 的不等式  $x^2(-1+a)x+a < 0(a \in R)$

**【解析】**不等式可变形为 $(x-1)(x-a) < 0$ ，当 $a > 1$ ，不等式的解集为 $\{x|1 < x < a\}$ ；当 $a = 1$ ，不等式的解集为 $\emptyset$ ；当 $a < 1$ ，不等式的解集为 $\{x|a < x < 1\}$ 。

**【例2】**解关于 $x$ 的不等式 $x^2+2x+1-a^2 \leq 0(a \in R)$

**【解析】**不等式可变形为 $(x+1-a)(x+1+a) \leq 0$ ，当 $a > 0$ ，不等式的解集为 $\{x|-1-a \leq x \leq -1+a\}$ ；当 $a = 0$ ，不等式的解集为 $\{x|x = -1\}$ ；当 $a < 0$ ，不等式的解集为 $\{x|-1+a \leq x \leq -1-a\}$ 。

**【例3】**求不等式 $12x^2-ax > a^2(a \in R)$ 的解集。

**【解析】**不等式可变形为 $(4x+a)(3x-a) > 0$ ，当 $a > 0$ ，不等式的解集为 $\{x|x < -\frac{a}{4} \text{ 或 } x > \frac{a}{3}\}$ ；当 $a = 0$ ，不等式的解集为 $\{x|x \neq 0\}$ ；当 $a < 0$ ，不等式的解集为 $\{x|x < \frac{a}{3} \text{ 或 } x > -\frac{a}{4}\}$ 。

**【例4】**求不等式 $x^2-(a+\frac{1}{a})x+1 < 0$ 的解集。

**【解析】**不等式可变形为 $(x-a)(x-\frac{1}{a}) < 0$ ，当 $a < -1$ ，或 $0 < a < 1$ 时，不等式的解集为 $\{x|a < x < \frac{1}{a}\}$ ；当 $a = \pm 1$ 时，不等式的解集为 $\emptyset$ ；当 $a > 1$ ，或 $-1 < a < 0$ 时，不等式的解集为 $\{x|x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > a\}$ 。

## 第二讲 二次项系数含参的一元二次不等式问题

- (1) 分析当 $a = 0$ 时的情况。  
 (2) 十字相乘得到 $a(x-x_1)(x-x_2)$ ，求出两个根 $x_1, x_2$ ，若不能十字相乘，则要讨论 $\Delta$ 的情况。  
 (3) 比较两个根的大小， $x_1=x_2$ ； $x_1>x_2$ ； $x_1<x_2$ ，并分别进行讨论。  
 (4) 其中一种情况涉及到 $a > 0$ 以及 $a < 0$ ，再分开口方向讨论。

**【例5】**解关于 $x$ 的不等式： $ax^2-2 \geq 2x-ax(a \in R)$ 。

**【解析】**原不等式变形为 $ax^2+(a-2)x-2 \geq 0$ 。(1)  $a = 0$ 时， $x \leq -1$ ；当 $a \neq 0$ 时，原不等式变形为 $(ax-2)(x+1) = a(x-\frac{2}{a})(x+1) \geq 0$ ；(2) 当 $\frac{2}{a} < -1$ 时， $-2 < a < 0$ ，抛物线开口向下， $\frac{2}{a} \leq x \leq -1$ ；(3) 当 $\frac{2}{a} = -1$ 时， $a = -2$ ，抛物线开口向下， $x = -1$ ；(4) 当 $\frac{2}{a} > -1$ 时， $a > 0$ 或 $a < -2$ ， $a > 0$ 时，抛物线开口向上， $x \geq \frac{2}{a}$ 或 $x \leq -1$ ；当 $a < -2$ 时，抛物线开口向下， $-1 \leq x \leq \frac{2}{a}$ 。  
 综上， $a = 0$ 时， $x \leq -1$ ； $a > 0$ 时， $x \geq \frac{2}{a}$ 或 $x \leq -1$ ；

$-2 < a < 0$ 时， $\frac{2}{a} \leq x \leq -1$ ； $a = -2$ 时， $x = -1$ ； $a < -2$ 时， $-1 \leq x \leq \frac{2}{a}$ 。

**【例 6】** 解关于  $x$  的不等式:  $ax^2 + ax - 1 < 0$ .

**【解析】** (1)  $a = 0$  时,  $-1 < 0$  成立;

$a \neq 0$  时, (2)  $\Delta = a^2 + 4a < 0 \Leftrightarrow 0 > a > -4$ ,  $x \in R$ ,  $\Delta = a^2 + 4a \geq 0 \Leftrightarrow a > 0$  或  $a \leq -4$ , 此时

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}, x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}.$$

(3) 当  $x_1 > x_2$  时, 则  $a > 0$ ,  $\Delta > 0$ ,  $\therefore \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2a} < x < \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}$ ;

(4) 当  $x_1 = x_2$  时, 则  $a = -4$ ,  $\Delta = 0$ ,  $\{x | x \neq \frac{1}{2}\}$ ;

(5) 当  $x_1 < x_2$  时, 则  $a < -4$ ,  $\Delta > 0$ ,  $\therefore x < \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}$  或  $x > \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}$

综上, 可知当  $a > 0$  时, 解集为  $(\frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}, \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2a})$ ; 当  $-4 < a \leq 0$  时, 解集为  $R$ ; 当  $a = -4$

时, 解集为  $\phi$ ; 当  $a < -4$  时, 解集为  $(-\infty, \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}) \cup (\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}, +\infty)$ .

### 第三讲 乘除的等价原理和穿根法

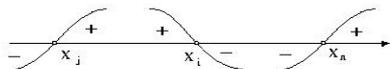
(1) 若  $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ , 则  $f(x)$  与  $g(x)$  异号,  $\therefore f(x)g(x) < 0$ .

(2) 若  $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ , 则  $f(x)$  与  $g(x)$  异号,  $\therefore f(x)g(x) \leq 0$ , 且  $g(x) \neq 0$ .

(3) 若  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ , 则  $f(x)$  与  $g(x)$  同号,  $\therefore f(x)g(x) > 0$ .

(4) 若  $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ , 则  $f(x)$  与  $g(x)$  同号,  $\therefore f(x)g(x) \geq 0$ , 且  $g(x) \neq 0$ .

数轴穿根法  $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) > 0$  或者  $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) < 0$



**口诀:** 移项调号, 分解排序, 奇穿偶回, 分母非零, 参数讨论, 小心等号.

**【例 7】** 解关于  $x$  的不等式:  $\frac{x-a}{x-a^2} < 0$  ( $a \in R$ ).

**【解析】** 原不等式等价于  $(x-a)(x-a^2) < 0$

(1) 若  $a = a^2$ ,  $a = 0$  或  $a = 1$  时, 不等式的解集为空集

(2) 若  $a > a^2$ , 即  $0 < a < 1$  时, 不等式的解集为  $a^2 < x < a$

(3) 若  $a < a^2$ , 即  $a > 1$  或  $a < 0$  时, 不等式的解集为  $a < x < a^2$

综上知:  $a = 0$  或  $a = 1$  时, 不等式的解集为空集;  $0 < a < 1$  时, 不等式的解集为  $\{x | a^2 < x < a\}$ ;

$a > 1$  或  $a < 0$  时, 不等式的解集为  $\{x | a < x < a^2\}$ .

**【例 8】** 解关于  $x$  的不等式:  $\frac{x}{x-1} < 1 - a$ .

**【解析】** 原不等式变形为:  $\frac{x}{x-1} + (a-1) < 0 \therefore \frac{x+(x-1)(a-1)}{x-1} < 0 \therefore \frac{ax-a+1}{x-1} < 0$  等价于  $(x-1)(ax-a+1) < 0$

若  $a = 0$ , 原不等式化为  $x < 1$ ;

当  $a \neq 0$  时,  $(x-1)(ax-a+1) = a(x-1)[x - (1 - \frac{1}{a})] < 0$ ; 此时  $x_1 = 1, x_2 = 1 - \frac{1}{a}$ .

(1) 若  $x_1 > x_2$ , 则  $a > 0$ , 开口向上  $\therefore \frac{a-1}{a} < x < 1$ ;

(2) 若  $x_1 < x_2$ , 则  $a < 0$ , 开口向下  $\therefore x > \frac{a-1}{a}$  或  $x < 1$ ;

综上,  $a > 0$  时,  $\frac{a-1}{a} < x < 1$ ;  $a = 0$  时,  $x < 1$ ;  $a < 0$  时,  $x > \frac{a-1}{a}$  或  $x < 1$ .

### 第三章 不等式

【例9】解关于  $x$  的不等式： $\frac{x-a}{(x+2)(x-3)} < 0$  ( $a \neq 3$ , 且  $a \neq -2$ )

【解析】(1) 当  $a < -2$  时,  $\{x|x < a, \text{ 或 } -2 < x < 3\}$ ;

(2) 当  $-2 < a < 3$  时,  $\{x|x < -2 \text{ 或 } a < x < 3\}$ ;

(3) 当  $a > 3$  时,  $\{x|x < -2 \text{ 或 } 3 < x < a\}$

### 达标训练

- 已知  $2a+1 < 0$ , 关于  $x$  的不等式  $x^2 - 4ax - 5a^2 > 0$  的解集是 ( )  
 A.  $\{x|x > 5a \text{ 或 } x < -a\}$                       B.  $\{x|-a < x < 5a\}$   
 C.  $\{x|x < 5a \text{ 或 } x > -a\}$                       D.  $\{x|5a < x < -a\}$
- 不等式  $ax^2 - (a+2)x + 2 \geq 0$  ( $a < 0$ ) 的解集为 ( )  
 A.  $[\frac{2}{a}, 1]$                       B.  $[1, \frac{2}{a}]$                       C.  $(-\infty, \frac{2}{a}] \cup [1, +\infty)$                       D.  $(-\infty, 1] \cup [\frac{2}{a}, +\infty)$
- 在关于  $x$  的不等式  $x^2 - (a+1)x + a < 0$  的解集中恰有两个整数, 则  $a$  的取值范围是 ( )  
 A. (3,4)                      B.  $(-2, -1) \cup (3, 4)$                       C. (3,4]                      D.  $[-2, -1) \cup (3, 4]$
- 关于  $x$  的不等式  $ax - b > 0$  的解集是  $(1, +\infty)$ , 则关于  $x$  的不等式  $(ax+b)(x-3) > 0$  的解集是 ( )  
 A.  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$                       B.  $(-1, 3)$                       C. (1,3)                      D.  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
- 若  $0 < a < 1$ , 则不等式  $(x-a)(x-\frac{1}{a}) > 0$  的解集是 ( )  
 A.  $(a, \frac{1}{a})$                       B.  $(\frac{1}{a}, a)$                       C.  $(-\infty, a) \cup (\frac{1}{a}, +\infty)$                       D.  $(-\infty, \frac{1}{a}) \cup (a, +\infty)$
- 求不等式  $x^2 - 2ax - 3a^2 > 0$  的解集.
- 求不等式  $x^2 + ax - 1 < 0$  的解集.
- 若关于  $x$  的不等式  $ax^2 - (a+1)x + 1 < 0$  ( $a \in R$ ) 的解集为  $(\frac{1}{a}, 1)$ , 则  $a$  的取值范围为 ( )  
 A.  $a < 0$  或  $a > 1$                       B.  $a > 1$                       C.  $0 < a < 1$                       D.  $a < 0$
- 已知函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $ac \neq 0$ ), 若  $f(x) < 0$  的解集为  $(-1, m)$ , 则下列说法正确的是 ( )  
 A.  $f(m-1) < 0$                       B.  $f(m-1) > 0$   
 C.  $f(m-1)$  必与  $m$  同号                      D.  $f(m-1)$  必与  $m$  异号
- 若关于  $x$  的不等式  $ax > b$  的解集为  $(-\infty, \frac{1}{5})$ , 则关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx - \frac{4}{5}a > 0$  的解集为\_\_\_\_\_.
- 解关于  $x$  的不等式  $ax^2 + (1-a)x - 1 > 0$
- 解关于  $x$  的不等式  $ax^2 - 2x + a < 0$
- 不等式  $\frac{x^2 - x - 6}{x-1} > 0$  的解集为 ( )  
 A.  $\{x|x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$                       B.  $\{x|x < -2 \text{ 或 } 1 < x < 3\}$   
 C.  $\{x|-2 < x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$                       D.  $\{x|-2 < x < 1 \text{ 或 } 1 < x < 3\}$
- 不等式  $\frac{1+x}{2-x} \geq 0$  的解集为 ( )  
 A.  $[-1, 2]$                       B.  $[-1, 2)$                       C.  $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$                       D.  $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
- 不等式  $\frac{3x-1}{2-x} \geq 1$  的解集为\_\_\_\_\_.
- 不等式  $\frac{ax}{x-1} < 1$  的解集为  $\{x|x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$ , 求  $a$  的值.
- 解不等式: (1)  $\frac{x(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-1)} < 0$                       (2)  $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 3x - 10} \geq 0$
- 解关于  $x$  的不等式  $\frac{x^2 + a - 2}{x+a} \geq 1$  ( $a > 0$ )