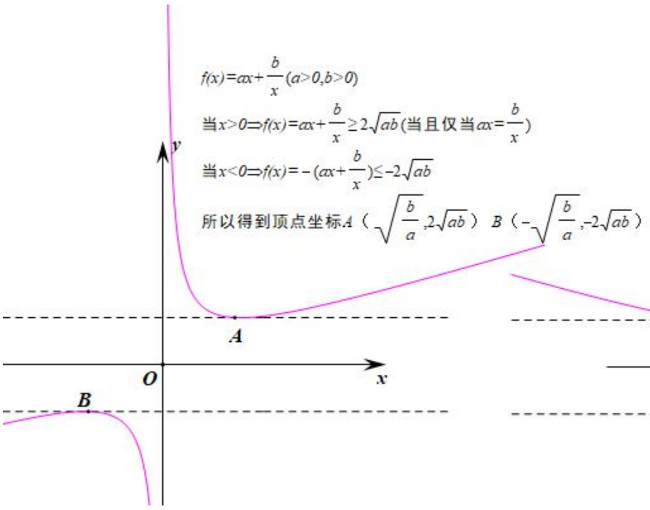
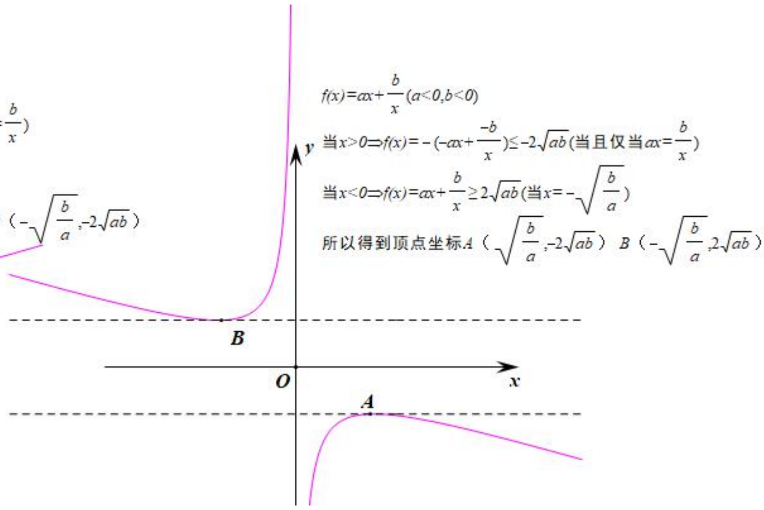
专题 3 对勾函数解决恒成立和实根分布问题





对勾函数是一种类似于反比例函数的一般函数，形如 $f(x)=ax+\frac{b}{x}$

当 a,b 同号时，$f(x)=ax+\frac{b}{x}$的图象是由直线 $y=ax$ 与双曲线 $y=\frac{b}{x}$构成，形状酷似双勾．故称“对勾函数”，也称“耐克函数”．耐克函数的顶点：$(\sqrt{\frac{b}{a}},2\sqrt{ab})$ 和 $(-\sqrt{\frac{b}{a}},-2\sqrt{ab})$

【例 1】已知函数 $f(x)=x^2-ax+1\geq 0$ 对于一切 $x\in(0,\frac{1}{2}]$ 成立，求 a 的取值范围．

【解析】根据题意得 $x^2+1\geq ax$ 在 $x\in(0,\frac{1}{2}]$ 上恒成立，即：$x+\frac{1}{x}\geq a$ 在 $x\in(0,\frac{1}{2}]$ 上恒成立，设 $g(x)=x+\frac{1}{x}$，则 $g(x)\geq 2$ 当 $x=1$ 时，$g(x)=2$，但 $x\in(0,\frac{1}{2}]$ 所以 $g(x)_{\min}=g(\frac{1}{2})=\frac{5}{2},a\leq\frac{5}{2}$．

【例 2】方程 $x^2-ax+4=0$ 在区间 $[0,1]$ 内有解 ，求 a 的取值范围．

【解析】根据题意得：$x=0$ 时，无解；$x^2+4=ax$ 在 $x\in(0,1]$ 内有解，即：$x+\frac{4}{x}=a$ 在 $x\in(0,1]$ 上的取值范围，设 $g(x)=x+\frac{4}{x}$，则 $g(x)\geq 5$ 当 $x=1$ 时，$g(x)=5$，故 $a\geq 5$

达标训练

1．若对于 $-5\leq x\leq 1$，不等式 $x^2+ax+6-a>0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

2．已知不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$．

（1）若不等式在（1，3）上有解，求实数 a 的取值范围；

（2）若不等式在（1，3）上恒成立，求实数 a 的取值范围．

3．已知函数 $f(x)=3x^2+2(k-1)x+k+5\ (k\in R)$．

（1）对任意 $k\in(-1,1)$，不等式 $f(x)<0$ 恒成立，求 x 的取值范围；

（2）若函数在区间（0，2）内有零点，求 k 的取值范围．

4．已知 a 是实数，函数 $f(x)=2ax^2+2x-3-a$．如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有零点，求 a 的取值范围．