专题 4 线性规划问题

一：三角形区域最值问题求解方法

（1）目标线性函数 $z=ax+by$ （a，b 为常数）取最值的位置问题，最简单方法是直接求出三个交点坐标代入即可.

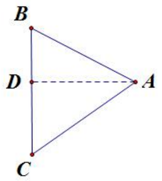
（2）求非线性函数 $z=(x-a)^2+(y-b)^2$ 的最值方法：目标函数是非线性的.

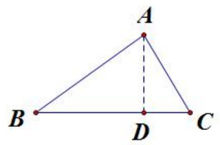
而 $z=(x-a)^2+(y-b)^2=\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)^2$ 可看做区域内的点到点 (a,b) 距离的平方.问题转化为点到直线的距离问题.

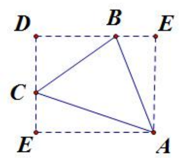
形如 $z=x^2+4x+y^2$，可以看成 $z=(x+2)^2+y^2-4=\left(\sqrt{(x+2)^2+y^2}\right)^2-4$.

$z=\sqrt{x^2+y^2-2y+3}$，可以看成 $z=\sqrt{x^2+(y-1)^2+2}$.

（3）求可行域的面积：对于封闭图形的面积求法大致分为 2 种，分割法（1）、（2）和填补法（3）





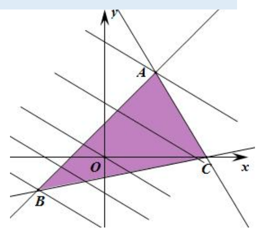


【例 1】求 $z=3x+5y$ 的最大值，使 x、y 满足约束条件：$\begin{cases}5x+3y\le 15\\ y\le x+1\\ x-5y\le 3\end{cases}$

【解析】作出直线 $3x+5y=z$ 的图像，可知直线经过 A（“同右”“同上”）点时，Z 取最大值；直线经过 B（“异左”“异下”）点时，Z 取最小值.

求得 $A(1.5,2.5)$，$B(-2,-1)$，则 $Z_{\max}=17$，$Z_{\min}=-11$.

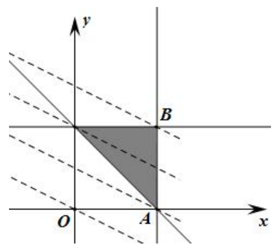
另解：由于是三条线的约束，不画图故直接求出三个交点坐标，即图中 A、B、C 坐标，$A(1.5,2.5)$，$B(-2,-1)$，$C(3,0)$，然后分别代入 $z=3x+5y$，则 $Z_{\max}=17$，$Z_{\min}=-11$.



【例 2】若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x\le 2\\ y\le 2\\ x+y\ge 2\end{cases}$，则 $z=x+2y$ 的取值范围（　　）

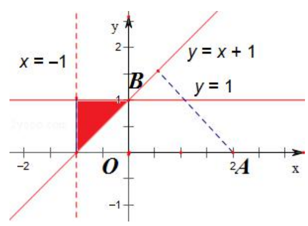
A．$[2,6]$　　　　B．$[2,5]$

C．$[3,6]$　　　　D．$(3,5]$



【解析】如图，作出可行域，作直线 $l:x+2y=0$，将 l 平行移动，过点 $A(2,0)$ 时，有最小值 2，过点 $B(2,2)$ 时，有最大值 6. 所以 $2\le z\le 6$.

另解：由于是三条线的约束，不画图故直接求出三个交点坐标，即图中 A、B、C 坐标，$A(2,0)$，$B(2,2)$，$C(0,2)$，然后分别代入 $z=x+2y$，则 $Z_{\max}=6$，$Z_{\min}=2$.



【例 3】变量 x,y 满足条件 $\begin{cases}x-y+1\le 0\\ y\le 1\\ x>-1\end{cases}$，则 $(x-2)^2+y^2$ 的最小值为（　　）

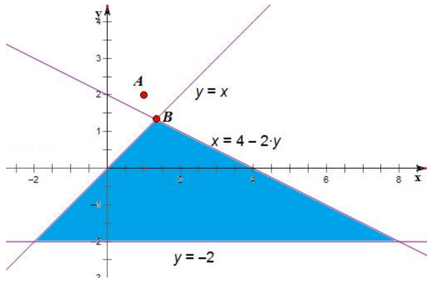
A．$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\dfrac{9}{2}$　　D．5

【解析】由题意作出其平面区域，$(x-2)^2+y^2$ 可看成阴影内的点到点 $A(2,0)$ 的距离的平方，由图象知点 $B(0,1)$ 到点 A 的距离最短，故 $(x-2)^2+y^2$ 的最小值为 $(0-2)^2+1^2=5$，故选 D.

【例 4】已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}y\le x\\ x+2y\le 4\\ y\ge -2\end{cases}$，则 $z=(x-1)^2+(y-2)^2$ 的最小值为（　　）

A．$\dfrac{5}{9}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　C．$\dfrac{1}{5}$　　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】由题意作出其平面区域，$z=(x-1)^2+(y-2)^2$ 可看成阴影内的点到点 $A(1,2)$）的距离的平方，$\begin{cases}y=x\\x=4-2y\end{cases}$ 解得，$x=y=\dfrac{4}{3}$；故 $z=(\dfrac{4}{3}-1)^2+(\dfrac{4}{3}-2)^2=\dfrac{5}{9}$ 故选 A．



达标训练

一 选择题

1．（2018•天津）设变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\le 5\\2x-y\le 4\\-x+y\le 1\\y\ge 0\end{cases}$，则目标函数 $z=3x+5y$ 的最大值为（　　）

A．6　　B．19　　C．21　　D．45

2．（2017•天津）设变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y\ge 0\\x+2y-2\ge 0\\x\le 0\\y\le 3\end{cases}$，则目标函数 $z=x+y$ 的最大值为（　　）

A．$\dfrac{2}{3}$　　B．1　　C．$\dfrac{3}{2}$　　D．3

3．（2017•山东）已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y+5\le 0\\x+3\ge 0\\y\le 2\end{cases}$，则 $z=x+2y$ 的最大值是（　　）

A．-3　　B．-1　　C．1　　D．3

4．（2016•浙江）在平面上，过点 P 作直线 l 的垂线所得的垂足称为点 P 在直线 l 上的投影，由区域 $\begin{cases}x-2\le 0\\x+y\ge 0\\x-3y+4\ge 0\end{cases}$ 中的点在直线 $x+y-2=0$ 上的投影构成的线段记为 AB，则 $|AB|=$（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．4　　C．$3\sqrt{2}$　　D．6

5．（2016•山东）若变量 x,y 满足 $\begin{cases}x+y\le 2\\2x-3y\le 9\\x\ge 0\end{cases}$，则 x^2+y^2 的最大值是（　　）

A．4　　B．9　　C．10　　D．12

6．（2016•北京）已知 $A(2,5)$，$B(4,1)$．若点 $P(x,y)$ 在线段 AB 上，则 $2x-y$ 的最大值为（　　）

A．-1　　B．3　　C．7　　D．8

二 填空题

7．（2018•北京）若 x,y 满足 $x+1\le y\le 2x$，则 $2y-x$ 的最小值是________．

8．（2018•浙江）若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\ge 0\\2x+y\le 6\\x+y\ge 2\end{cases}$，则 $z=x+3y$ 的最小值是________，最大值是________．

9．（2018•新课标II）若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-5\ge 0\\x-2y+3\ge 0\\x-5\le 0\end{cases}$，则 $z=x+y$ 的最大值为________．

10．（2018•新课标III）若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y+3\ge 0\\x-2y+4\ge 0\\x-2\le 0\end{cases}$，则 $z=x+\dfrac{1}{3}y$ 的最大值是________．

11. （2018•新课标I）若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-2y-2\le 0 \\ x-y+1\ge 0 \\ y\le 0 \end{cases}$ ，则 $z=3x+2y$ 的最大值为________.

12. （2016•新课标I）某高科技企业生产产品 A 和产品 B 需要甲、乙两种新型材料．生产一件产品 A 需要甲材料 $1.5kg$，乙材料 $1kg$，用 5 个工时；生产一件产品 B 需要甲材料 $0.5kg$，乙材料 $0.3kg$，用 3 个工时，生产一件产品 A 的利润为 2100 元，生产一件产品 B 的利润为 900 元．该企业现有甲材料 $150kg$，乙材料 $90kg$，则在不超过 600 个工时的条件下，生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为_______元．

13. （2015•浙江）已知实数 x,y 满足 $x^2+y^2\le 1$，则 $|2x+y-4|+|6-x-3y|$ 的最大值是________.

三、解答题

14. （2016•天津）某化肥厂生产甲、乙两种混合肥料，需要 A，B，C 三种主要原料，生产1车皮甲种肥料和生产1车皮乙种肥料所需三种原料的吨数如下表所示：

肥料 原料	A	B	C
甲	4	8	3
乙	5	5	10

现有 A 种原料 200 吨，B 种原料 360 吨，C 种原料 300 吨，在此基础上生产甲、乙两种肥料．已知生产1车皮甲种肥料，产生的利润为 2 万元；生产1车皮乙种肥料，产生的利润为 3 万元、分别用 x,y 表示计划生产甲、乙两种肥料的车皮数．

（1）用 x,y 列出满足生产条件的数学关系式，并画出相应的平面区域；

（2）问分别生产甲、乙两种肥料各多少车皮，能够产生最大的利润？并求出此最大利润．