专题 5　基本不等式与柯西不等式

第一讲 基本不等式常用模型

模型一：$mx+\frac{n}{x}\geq 2\sqrt{mn}(m>0,n>0)$，当且仅当 $x=\sqrt{\frac{n}{m}}$ 时等号成立.

模型二：$mx+\frac{n}{x-a}=m(x-a)+\frac{n}{x-a}+ma\geq 2\sqrt{mn}+ma(m>0,n>0)$，当且仅当 $x-a=\sqrt{\frac{n}{m}}$ 时等号成立.

模型三：$\frac{x}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{ax+b+\frac{c}{x}}\leq\frac{1}{2\sqrt{ac}+b}(a>0,c>0)$，当且仅当 $x=\sqrt{\frac{c}{a}}$ 时等号成立.

模型四：$x(n-mx)=\frac{mx(n-mx)}{m}\leq\frac{1}{m}\cdot(\frac{mx+n-mx}{2})^2=\frac{n^2}{4m}(m>0,n>0,0<x<\frac{n}{m})$，当且仅当 $x=\frac{n}{2m}$ 时等号成立.

【例 5】若函数 $f(x)=x+\frac{1}{x-2}(x>2)$ 在 $x=a$ 处有最小值，则 $a=$（　　）

A. $1+\sqrt{2}$　　B. $1+\sqrt{3}$　　C. 3　　D. 4

【解析】$f(x)=x+\frac{1}{x-2}=x-2+\frac{1}{x-2}+2\geq 2+2=4$ 当且仅当 $x-2=\frac{1}{x-2}\Rightarrow x=3$ 时等号成立．故选 C．

【例 6】若对任意 $x>0$，$\frac{x}{x^2+3x+1}\leq a$ 恒成立, 则 a 的取值范围是________.

【解析】$\frac{x}{x^2+3x+1}=\frac{1}{x+3+\frac{1}{x}}\leq\frac{1}{2+3}\leq a$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，故 $a\geq\frac{1}{5}$．

【例 7】若 $-4<x<1$, 则 $y=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$ 有（　　）

A. 最大值 -1　　B. 最小值 -1　　C. 最大值 1　　D. 最小值 1

【解析】$\frac{x^2-2x+2}{2x-2}=\frac{(x-1)^2+1}{2(x-1)}=\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2(x-1)}\leq -2\sqrt{\frac{1}{4}}=-1(x<1)$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，故选 A．

【例 8】设 $a>b>0$, 则 $a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值是________.

【解析】$a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}=a^2-ab+ab+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}\geq 2\sqrt{a(a-b)\cdot\frac{1}{a(a-b)}}+2\sqrt{ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$．

第二讲 柯西不等式的应用

柯西不等式二元式：设 a，b，c，$d\in R^+$，有 $(a+b)(c+d)\geq(\sqrt{ac}+\sqrt{bd})^2$ 当且仅当 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ 时等号成立.

模型一：$(a+b)(\frac{m}{a}+\frac{n}{b})\geq(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2$ 其中 $a,b\in R^+$，例如 $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geq(\sqrt{a\frac{1}{a}}+\sqrt{b\frac{1}{b}})^2=4$；

模型二：$\frac{a}{x}+\frac{b}{1-x}=[(x)+(1-x)](\frac{a}{x}+\frac{b}{1-x})\geq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

模型三：一高一低和式配凑类型

已知 x^2+y^2 的值，求 $x+y$ 的取值范围，或者已知 $x+y$ 的值，求 $2x^2+3y^2$ 的最值或者求 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 的最值

即 $(x^2+y^2)(m^2+n^2)\geq(mx+ny)^2$，其中 m，$n\in R^+$

例 $(a^2+b^2)(1+1)\geq(a+b)^2$ 或者写成 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$

模型四：同次积式配凑类型

已知 xy 的值，求 $(x+m)(y+n)(m,n\in R^*)$ 的最值，利用 $(x+m)(y+n)\geq(\sqrt{xy}+\sqrt{mn})^2$ 求最值.

【例 9】$x,y\in R^+$，且 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，则 $(x+y)_{\min}=$__________.

【解析】$(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{9}{y})\geq(\sqrt{1}+\sqrt{9})^2=16$，又 $\because\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，$\therefore x+y\geq 16$.

【例 10】已知 $0<a<1$，则 $(\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a})_{\min}=$_________.

【解析】$\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}=[(a)+(1-a)](\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a})\geq(\sqrt{1}+\sqrt{4})^2=9$，故 $\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}\geq 9$.

【例 11】$a,b\in R,a^2+2b^2=6$，则 $a+b$ 的最小值是_________.

【解析】$(a^2+2b^2)(1+\frac{1}{2})\geq(a+b)^2\Rightarrow(a+b)^2\leq 9\Rightarrow -3\leq a+b\leq 3$，故最小值为−3.

【例 12】设函数 $f(x)=3\sqrt{x-1}+4\sqrt{2-x}$，则当 $x=$__________时，$f(x)$ 的最大值是___________.

【解析】$[(x-1)+(2-x)](3^2+4^2)\geq(3\sqrt{x-1}+4\sqrt{2-x})^2\Rightarrow 3\sqrt{x-1}+4\sqrt{2-x}\leq 5$，当且仅当 $\frac{x-1}{3^2}=\frac{2-x}{4^2}$ 时等号成立，此时 $x=\frac{34}{25}$.

【例 13】已知 $x>-1,y>-1$，且 $(x+1)(y+1)=4$，则 xy 的最大值是___________.

【解析】$(x+1)(y+1)\geq(\sqrt{xy}+1)^2\Rightarrow\sqrt{xy}\leq 1$，故 xy 的最大值是 1.

【例 14】已知 $m>0$，$n>0$，$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=1$，则 $(m+1)(n+4)$ 的最小值为（　　）

A. 49　　B. 7　　C. 36　　D. 6

【解析】$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=1\Rightarrow\frac{1}{m}+\frac{4}{n}\geq 2\sqrt{\frac{4}{mn}}\Rightarrow mn\geq 16,(m+1)(m+4)\geq(\sqrt{mn}+\sqrt{4})^2=(4+2)^2=36$，故选 C

【例 15】已知实数 x,y 满足 $x>y>0$, 且 $x+y=2$, 则 $\frac{2}{x+3y}+\frac{1}{x-y}$ 的最小值为___________.

【解析】$\because[(x+3y)+(x-y)](\frac{2}{x+3y}+\frac{1}{x-y})\geq(\sqrt{2}+1)^2$ $\therefore\frac{2}{x+3y}+\frac{1}{x-y}\geq\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$.

第三讲 等式转化为不等式模型

若出现 $m(a+b)+nab=c$，其中 a、b、m、n、$c\in R^*$

因为 $a+b\geq 2\sqrt{ab}\Rightarrow ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}$，可以转化为 $2m\sqrt{ab}+nab\leq c$ 或 $m(a+b)+n\frac{(a+b)^2}{4}\geq c$，
从而求出 $a+b$ 及 ab 的取值范围．若出现求 $ma+nb$ 取值范围，先将式子 $m(a+b)+nab=c$ 因式分解成为 $(a+x)(b+y)=z$ 形式，再用基本不等式求出 $ma+nb$ 最值.
也可以考虑用柯西不等式解出答案，先进行因式分解 $(a+x)(b+y)=z$，再用柯西不等式分析.

【例 16】设 $a>0,b>0,a+b+ab=24$，则（　　）

A. $a+b$ 有最大值 8　　B. $a+b$ 有最小值 8　　C. ab 有最大值 8　　D. ab 有最小值 8

【解析】法一：$a+b+ab=24\Rightarrow 2\sqrt{ab}+ab\leq 24\Rightarrow(\sqrt{ab})^2+2\sqrt{ab}-24\leq 0\Rightarrow -6\leq\sqrt{ab}\leq 4$

$a+b+ab=24\Rightarrow a+b+\frac{(a+b)^2}{4}\geq 24\Rightarrow(a+b)^2+4(a+b)-96\geq 0\Rightarrow a+b\geq 8$

或 $a+b\leq -12$，又 $a+b>0$，故选 B.

法二：
$a+b+ab=24\Rightarrow(a+1)(b+1)=25\Rightarrow(a+1)(b+1)\geq(\sqrt{ab}+1)^2\Rightarrow\sqrt{ab}\leq 4$
$(a+1)(b+1)=25\Rightarrow(a+1)(b+1)\geq 2\sqrt{(a+1)(b+1)}\Rightarrow a+b+2\geq 10\Rightarrow a+b+2\geq 10\Rightarrow a+b\geq 8$

【例 17】设 $a>0,b>0,a+b+1=ab$, 求设 $3a+2b$ 最小值.

【解析】$a+b+1=ab\Rightarrow(a-1)(b-1)=2$

$3a+2b=3(a-1)+2(b-1)+5\geq2\sqrt{6(a-1)(b-1)}+5=4\sqrt{3}+5$

达标训练

一、选择题

1. （2012•浙江）若正数 x,y 满足 $x+3y=5xy$，则 $3x+4y$ 的最小值是（　　）

A. $\frac{24}{5}$　　B. $\frac{28}{5}$　　C. 5　　D. 6

2. （2006•陕西）设 x,y 为正数，则 $(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})$ 的最小值为（　　）

A. 6　　B. 9　　C. 12　　D. 15

3. （2005•福建）设 $a,b\in R$，$a^2+2b^2=6$，则 $a+b$ 的最小值是（　　）

A. $-2\sqrt{2}$　　B. $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$　　C. -3　　D. $-\frac{7}{2}$

4. （2000•新课程）若 $a>b>1$，$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$，$Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$，$R=\lg\frac{a+b}{2}$，则（　　）

A. $R<P<Q$　　B. $P<Q<R$　　C. $Q<P<R$　　D. $P<R<Q$

5. （2017•山东）若 $a>b>0$，且 $ab=1$，则下列不等式成立的是（　　）

A. $a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)$　　B. $\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}$

C. $a+\frac{1}{b}<\log_2(a+b)<\frac{b}{2^a}$　　D. $\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}$

6. （2015•湖南）若实数 a,b 满足 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\sqrt{ab}$，则 ab 的最小值为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

7. （2015•陕西）设 $f(x)=\ln x$，$0<a<b$，若 $p=f(\sqrt{ab})$，$q=f(\frac{a+b}{2})$，$r=\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$，则下列关系式中正确的是（　　）

A. $q=r<p$　　B. $p=r<q$　　C. $q=r>p$　　D. $p=r>q$

8. （2014•重庆）若 $\log_4(3a+4b)=\log_2\sqrt{ab}$，则 $a+b$ 的最小值是（　　）

A. $6+2\sqrt{3}$　　B. $7+2\sqrt{3}$　　C. $6+4\sqrt{3}$　　D. $7+4\sqrt{3}$

9. （2013•山东）设正实数 x,y,z 满足 $x^2-3xy+4y^2-z=0$．则当 $\frac{xy}{2}$ 取得最大值时，$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}$ 的最大值为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. $\frac{9}{4}$　　D. 3

10. （2011•陕西）设 $0<a<b$，则下列不等式中正确的是（　　）

A. $a<b<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$　　B. $a<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b$

C. $a<\sqrt{ab}<b<\frac{a+b}{2}$　　D. $\sqrt{ab}<a<\frac{a+b}{2}<b$

11. （2011•上海）若 $a,b\in R$，且 $ab>0$，则下列不等式中，恒成立的是（　　）

A. $a^2+b^2>2ab$　　B. $a+b\geq2\sqrt{ab}$　　C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{2}{\sqrt{ab}}$　　D. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq2$

12. （2011•重庆）若函 $f(x)=x+\frac{1}{x-2}\ (x>2)$，在 $x=a$ 处取最小值，则 $a=$（　　）

A. $1+\sqrt{2}$　　B. $1+\sqrt{3}$　　C. 3　　D. 4

13. （2010•重庆）已知 $x>0,y>0,x+2y+2xy=8$ 则 $x+2y$ 的最小值是（　　）

A．3　　B．4　　C．$\dfrac{9}{2}$　　D．$\dfrac{11}{2}$

二、填空题

14. （2013•湖北）设 $x,y,z\in R$，且满足：$x^2+y^2+z^2=1$，$x+2y+3z=\sqrt{14}$ 则 $x+y+z=$_________.

15. （2018•江苏）在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a,b,c, $\angle ABC=120°$，$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D，且 $BD=1$，则 $4a+c$ 的最小值为_________.

16. （2010•重庆）已知 $t>0$，则函数 $y=\dfrac{t^2-4t+1}{t}$ 的最小值为_________.

17. （2010•山东）若对任意 $x>0$，$\dfrac{x}{x^2+3x+1}\le a$ 恒成立，则 a 的取值范围是_________.

18. （2010•浙江）若正实数 x,y 满足 $2x+y+6=xy$，则 xy 的最小值是_________.

19. （2017•山东）若直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\ (a>0,b>0)$ 过点（1，2），则 $2a+b$ 的最小值为_________.

20. （2017•天津）若 $a,b\in R$，$ab>0$，则 $\dfrac{a^4+4b^4+1}{\text{ab}}$ 的最小值为_________.

21. （2014•陕西）设 $a,b,m,n\in R$，且 $a^2+b^2=5$，$ma+nb=5$，则 $\sqrt{m^2+n^2}$ 的最小值为_________.

22. （2014•辽宁）对于 $c>0$，当非零实数 a,b 满足 $4a^2-2ab+4b^2-c=0$ 且使 $|2a+b|$ 最大时，$\dfrac{3}{a}-\dfrac{4}{b}+\dfrac{5}{c}$ 的最小值为_________.

23. （2014•浙江）已知实数 a,b,c ,满足 $a+b+c=0,a^2+b^2+c^2=1$，则 a 的最大值是_________.

24. （2013•天津）设 $a+b=2$，$b>0$，则 $\dfrac{1}{2|a|}+\dfrac{|a|}{b}$ 的最小值是_________.

25. （2013•上海）设常数 $a>0$，若 $9x+\dfrac{a^2}{x}\ge a+1$ 对一切正实数 x 成立，则 a 的取值范围为_________.

26. （2011•湖南）设 $x,y\in R$，且 $xy\ne 0$，则 $\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)\left(\dfrac{1}{x^2}+4y^2\right)$ 的最小值为_________.

27. （2011•浙江）设 x,y 为实数，若 $4x^2+y^2+xy=1$，则 $2x+y$ 的最大值是_________.

三、解答题

28. （2013•新课标II）设 a,b,c 均为正数，且 $a+b+c=1$，证明：

（1）$ab+bc+ca\le\dfrac{1}{3}$；

（2）$\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\ge 1$.