专题 6 “糖水不等式”的应用

糖水不等式

定理：若 $a>b>0$，$m>0$，则一定有 $\dfrac{b+m}{a+m}>\dfrac{b}{a}$，或者 $\dfrac{a+m}{b+m}<\dfrac{a}{b}$

通俗的理解就是 a 克的不饱和糖水里含有 b 克糖，往糖水里面加入 m 克糖，则糖水更甜；

证明：$\dfrac{b+m}{a+m}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{ab+am-ab-bm}{a^2+am}=\dfrac{(a-b)m}{a^2+am}>0$；$\dfrac{a+m}{b+m}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{ab+bm-ab-am}{b^2+bm}=-\dfrac{(a-b)m}{b^2+bm}<0$

应用一：关于判齐次分式函数的单调性

若 $f(x)$ 为单调增函数，$g(x)=\dfrac{f(x)+b}{f(x)+a}(a>b)$ 在其各自单调区间为增函数，$g(x)=\dfrac{f(x)+a}{f(x)+b}(a>b)$ 在其各自单调区间为减函数．例：$g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(-1,+\infty)$ 为增函数；$g(x)=\dfrac{2x+1}{5x+2}=\dfrac{2}{5}\dfrac{(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{2}{5})}$ 在区间和 $(-\infty,-\dfrac{2}{5})$ 和 $(-\dfrac{2}{5},+\infty)$ 为减函数；$g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ 在 R 上单调递增；$g(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}=\ln(-\dfrac{x-1}{x+1})$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递减．

应用二：关于指数和对数的比较大小

【例 1】若等比数列前 n 项和为 $S_n(a_1>0,q>0)$，比较 S_nS_{n+2} 与 $S_{n+1}{}^2$ 的大小．

【解析】$\because S_{n+2}>S_{n+1}>S_n$ $\therefore \dfrac{S_{n+2}}{S_{n+1}}=\dfrac{a_1+qS_{n+1}}{a_1+qS_n}=\dfrac{\frac{a_1}{q}+S_{n+1}}{\frac{a_1}{q}+S_n}<\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$；故 $S_nS_{n+2}<S_{n+1}{}^2$．

【例 2】（1）比较 $\log_3 2$ 和 $\log_2\dfrac{3}{2}$ 的大小；（2）比较 $\log_2 3$ 与 $\log_{0.3}0.2$．

【解析】（1）$\log_3 2=\log_9 4=\dfrac{\ln 4}{\ln 9}$，$\log_2\dfrac{3}{2}=\dfrac{\ln\frac{27}{8}}{\ln 8}$，$\log_3 2=\dfrac{\ln 4}{\ln 9}>\dfrac{\ln\frac{27}{8}+\ln\frac{9}{8}}{\ln 8+\ln\frac{9}{8}}=\dfrac{\ln\frac{243}{64}}{\ln 9}>\dfrac{\ln\frac{27}{8}}{\ln 8}=\log_2\dfrac{3}{2}$；

（2）先换成正数，$\log_{0.3}0.2=\log_{\frac{10}{3}}\dfrac{10}{2}=\dfrac{\ln 5}{\ln\frac{10}{3}}$，$\log_2 3=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}<\dfrac{\ln 5-\ln\frac{10}{6}}{\ln\frac{10}{3}-\ln\frac{10}{6}}<\dfrac{\ln 5}{\ln\frac{10}{3}}=\log_{0.3}0.2$

应用三：证明隔项相乘无法约分的积式不等式

【例 3】求证：$\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$．

【解析】$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}<\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}<\frac{3}{4}\\ \cdots\\ \frac{2n-2}{2n-1}<\frac{2n-1}{2n}\\ \frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{2n+1}\end{array}\right\}\Rightarrow(\dfrac{1}{2})^2\cdot(\dfrac{2}{3})\cdot(\dfrac{3}{4})\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n})^2<(\dfrac{1}{2})\cdot(\dfrac{2}{3})\cdot(\dfrac{3}{4})\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\cdot\dfrac{2n}{2n+1}$

达标训练

1.（2015•湖北）将离心率为 e_1 的双曲线 C_1 的实半轴长 a 和虚半轴长 $b(a\neq b)$ 同时增加 $m(m>0)$ 个单位长度，得到离心率为 e_2 的双曲线 C_2，则（　　）

A．对任意的 a，b 有 $e_1>e_2$　　B．当 $a>b$ 时，$e_1>e_2$；当 $a<b$ 时，$e_1<e_2$

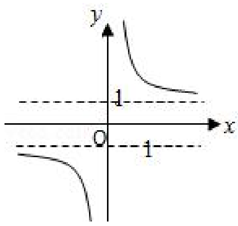
C．对任意的 a，b 有 $e_1<e_2$　　D．当 $a>b$ 时，$e_1<e_2$；当 $a<b$ 时，$e_1>e_2$

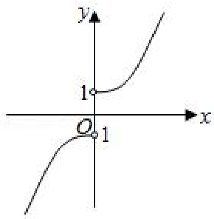
2.（2015•湖南）设函数 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$，则 $f(x)$ 是（　　）

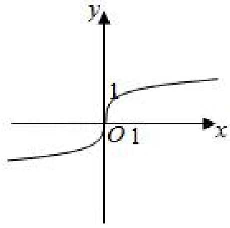
A．奇函数，且在 $(0,1)$ 上是增函数　　B．奇函数，且在 $(0,1)$ 上是减函数

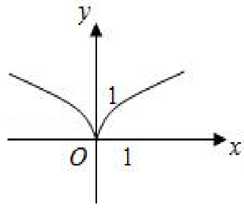
C．偶函数，且在 $(0,1)$ 上是增函数　　D．偶函数，且在 $(0,1)$ 上是减函数

3.（2009•山东）函数 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ 的图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

4. 函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}$ 的单调区间为__________.

5. 已知 $n\in N^*$，$n>1$， 试比较 $\log_n(n+1)$ 与 $\log_{(n+1)}(n+2)$ 的大小.

6. 已知正数 a，b，c，满足 $a<b+c$，求证：$\dfrac{a}{a+1}<\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}$.

7.（2015•安徽）设 $n\in N^*$，x_n 是曲线 $y=x^{2n+2}+1$ 在点 $(1,2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标.

（1）求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $T_n=x_1{}^2x_3{}^2\cdots x_{2n-1}{}^2$，求证：$T_n\geq\dfrac{1}{4n}$.

8. （1995.全国卷）设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列，S_n 是其前 n 项和.

证明：$\dfrac{\log_{0.5}S_n+\log_{0.5}S_{n+2}}{2}>\log_{0.5}S_{n+1}$.

9.（2004•贵州）已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，$a_2=6$，$a_5=162$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，求证：$\dfrac{S_n\cdot S_{n+2}}{S^2{}_{n+1}}\leq 1$.

10.（2009•山东）等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知对任意的 $n\in N^*$，点 (n,S_n) 均在函数 $y=b^x+r(b>0$ 且 $b\neq 1$，b，r 均为常数$)$ 的图象上.

（1）求 r 的值；

（2）当 $b=2$ 时，记 $b_n=2(\log_2 a_n+1)(n\in N^*)$，求证:对任意的 $n\in N^*$ 不等式 $\dfrac{b_1+1}{b_1}\cdot\dfrac{b_2+1}{b_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{b_n+1}{b_n}>\sqrt{n+1}$ 成立.

11.（1998•全国卷）已知数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，$b_1=1$，$b_1+b_2+\cdots+b_{10}=145$.

（1）求数列 $\{b_n\}$ 的通项 b_n；

（2）设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\log_a(1+\dfrac{1}{b_n})$（其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$），记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 试比较 S_n 与 $\dfrac{1}{3}\log_a b_{n+1}$ 的大小，并证明你的结论.

12. （2001•全国卷）已知 i,m,n 是正整数，且 $1<i\leq m<n$.

（1）求证：$n^iA^i{}_m<m^iA^i{}_n$；

（2）求证：$(1+m)^n>(1+n)^m$.

13. 已知 a，b，c，分别是一个三角形的三边长，求证 $\dfrac{3}{2}\leq\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{b+a}<2$.

14. 若 $x>0$，$y>0$，$z>0$ 且 $xyz=1$，求证：$1<\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{z+1}<2$.

15. 求证：$T_n=\dfrac{4}{3^{2^0}-1}+\dfrac{4}{3^{2^1}-1}+\dfrac{4}{3^{2^2}-1}+\cdots+\dfrac{4}{3^{2^{n-1}}-1}<3$.

16.（IMO•数学竞赛）若 A，B，C，a，b，c，r 均为正数，求证：

$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+r}+\frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r}>\frac{A+a+C+c}{A+a+C+c+r+b}.$$