专题 7 权方和不等式

第一讲 柯西不等式变形式

对柯西不等式变形，易得 $(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y})(x+y)\ge(a+b)^2$ 在 $a,b,x,y>0$ 时，就有了 $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$ 当 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$ 时，等号成立．同理 $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$，当 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ 时，等号成立．

【例 1】$a+b+c=1$，求证：$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\ge 36$.

【解析】$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{b}+\frac{3^2}{c}\ge\frac{(1+2+3)^2}{a+b+c}=36$.

【例 2】求证：$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\ge\frac{4}{a-c}$.

【解析】$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\ge\frac{(1+1)^2}{(a-b)+(b-c)}=\frac{4}{a-c}$.

【例 3】设 $a>1,b>0,a+b=2$ ，则 $\frac{1}{a-1}+\frac{2}{b}$ 最小值为（　　）

A. $3+2\sqrt{2}$　　B. 6　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

【解析】$\frac{1}{a-1}+\frac{2}{b}=\frac{1}{a-1}+\frac{(\sqrt{2})^2}{b}\ge\frac{(1+\sqrt{2})^2}{a-1+b}=3+2\sqrt{2}$. 当 $\frac{1}{a-1}=\frac{\sqrt{2}}{b}$ 时，等号成立.

【例 4】x , y 为正实数，且 $x+y=1$，则 $\frac{x^2}{x+2}+\frac{y^2}{y+1}$ 的最小值是_________.

【解析】$\frac{x^2}{x+2}+\frac{y^2}{y+1}\ge\frac{(x+y)^2}{x+2+y+1}=\frac{1}{4}$.

【例 5】已知 $a>1$ ，$b>1$，则 $\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}$ 最小值是_________.

【解析】$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\ge\frac{(a+b)^2}{a+b-2}$，令 $a+b-2=t$，则 $\frac{(t+2)^2}{t}=t+\frac{4}{t}+4\ge 8$，当仅当 $t=\frac{4}{t}$，即 $t=2$，$\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$，等号成立.

【例 6】已正数 x,y,z 满足 $x+y+z=1$, 则 $\frac{x^2}{y+2z}+\frac{y^2}{z+2x}+\frac{z^2}{x+2y}$ 的最小值为_________.

【解析】$\frac{x^2}{y+2z}+\frac{y^2}{z+2x}+\frac{z^2}{x+2y}\ge\frac{(x+y+z)^2}{y+2z+z+2x+x+2y}=\frac{1}{3}$，当仅当 $\frac{x}{y+2z}=\frac{y}{z+2x}=\frac{z}{x+2y}$，即 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时，等号成立.

第二讲 权方和不等式运用

权方和不等式：若 $a_i>0,b_i>0,m>0$. 则 $\frac{(a_1)^{m+1}}{(b_1)^m}+\frac{(a_2)^{m+1}}{(b_2)^m}+\cdots+\frac{(a_n)^{m+1}}{(b_n)^m}\ge\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{m+1}}{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^m}$

当仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时，等号成立. m 为该不等式的和，它的特点是分子的幂比分母的幂多一次.

关于齐次分式，将分子变为平方式，再用权方和不等式，关于带根号式子，将分子变为 $\frac{3}{2}$ 次，分母为 $\frac{1}{2}$ 次.

【例 7】设x，y 是正实数且满足$x+y=1$，求 $\frac{1}{x^2}+\frac{8}{y^2}$ 最小值.

【解析】$\frac{1}{x^2}+\frac{8}{y^2}=\frac{1^3}{x^2}+\frac{2^3}{y^2}\ge\frac{(1+2)^3}{(x+y)^2}=27$. 当 $\frac{1}{x}=\frac{2}{y}$，即 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{2}{3}$ 时等式成立.

【例 8】若 ΔABC 三边对应分别为 a，b，c . 求证：$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\ge\frac{3}{2}$.

【解析】$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}=\frac{c^2}{ac+bc}+\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ab}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2ab+2bc+2ca}=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{2ab+2bc+2ca}\ge\frac{3}{2}$，当 $a=b=c$，等号成立.

【例 9】若 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，求证：$\dfrac{27}{\sin\alpha}+\dfrac{64}{\cos\alpha}\ge 125$.

【解析】$\dfrac{27}{\sin\alpha}+\dfrac{64}{\cos\alpha}=\dfrac{9^{\frac{3}{2}}}{\left(\sin^2\alpha\right)^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{16^{\frac{3}{2}}}{\left(\cos^2\alpha\right)^{\frac{1}{2}}}\ge\dfrac{(9+16)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^{\frac{1}{2}}}=125$，当 $\dfrac{9}{\sin^2\alpha}=\dfrac{16}{\cos^2\alpha}$ 时，即 $\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{3}{5}\\ \cos\alpha=\dfrac{4}{5}\end{cases}$ 时等号成立.

【例 10】若 $abc=1$，$a>0$，$b>0$，$c>0$，求 $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}$ 最小值.

【解析】$\dfrac{(abc)^2}{a^3(b+c)}+\dfrac{(abc)^2}{b^3(c+a)}+\dfrac{(abc)^2}{c^3(a+b)}=\dfrac{(bc)^2}{a(b+c)}+\dfrac{(ac)^2}{b(c+a)}+\dfrac{(ab)^2}{c(a+b)}\ge\dfrac{(bc+ac+ab)^2}{2ab+2ac+2bc}=\dfrac{bc+ac+ab}{2}\ge\dfrac{3}{2}$

当仅当 $a=b=c=1$ 时，等式成立.

达标训练

1. 已知实数 $x>0$，$y>0$，$0<\lambda<2$，且 $x+y=3$，则 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{(2-\lambda)y}+\dfrac{2}{\lambda y}$ 的最小值为（　　）

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. 2　　C. $\dfrac{8}{3}$　　D. 3

2. 对任意实数 $x>1$，$y>\dfrac{1}{2}$，不等式 $\dfrac{x^2}{a^2(2y-1)}+\dfrac{4y^2}{a^2(x-1)}\ge 1$ 恒成立，则实数 a 的最大值为（　　）

A. 2　　B. 4　　C. $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

3. 已知 $a,b,c\in R$，且 $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+4b^2}+\dfrac{1}{1+9c^2}=1$，则 $|6abc-1|$ 的最小值为（　　）

A. $3\sqrt{3}+1$　　B. $2\sqrt{2}-1$　　C. $3\sqrt{3}-1$　　D. $2\sqrt{2}+1$

4. 设正数 a,b,c 满足 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{25}{c}\le\dfrac{64}{a+b+c}$，则 $\dfrac{a+b+c}{a}=$________.

5. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}3x-y-2\le 0\\ x-y\ge 0\\ x\ge 0, y\ge 0\end{cases}$，若目标函数 $z=ax+2by(a>0,b>0)$ 的最大值为1，则 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}$ 的最小值为________.

6. 已知 a,b,c 均为正数，且 $a+b+c=3$，求证：$\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{c^2}{b}+\dfrac{a^2}{c}\ge 3$.

7. 设 x,y,z 为正实数，且 $x+y+z=3$．求证：$\dfrac{x^2}{x+\sqrt{yz}}+\dfrac{y^2}{y+\sqrt{xz}}+\dfrac{z^2}{z+\sqrt{yx}}\ge\dfrac{3}{2}$.

8.（1）已知 a,b,x,y 是正实数，求证：$\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}\ge\dfrac{(a+b)^2}{x+y}$，当且仅当 $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$ 时等号成立；

（2）求 $f(x)=\dfrac{1}{3-\sin^2 x}+\dfrac{9}{8-\cos^2 x}$ 的最小值，并指出取最小值时 x 的值.

9. 已知 $a>b>c>d$，求证：$\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-d}\ge\dfrac{9}{a-d}$.

10. 设 a,b 均为正数，且 $a+b=1$.

（1）求证：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge 4$；

（2）求证：$\dfrac{1}{a^{2016}}+\dfrac{1}{b^{2016}}\ge 2^{2017}$.

11. 设 $x,y,z\in R^*$，且 $x+y+z=1$，求证：$\dfrac{2x^2}{y+z}+\dfrac{2y^2}{z+x}+\dfrac{2z^2}{x+y}\ge 1$.

12. 已知正实数 a,b,c 满足 $a+b^2+c^3=1$，求证：$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^4}+\dfrac{1}{c^6}\ge 27$.

13. 已知a,b,c,d都是正实数，且$a+b+c+d=1$，求证：$\frac{a^2}{1+a}+\frac{b^2}{1+b}+\frac{c^2}{1+c}+\frac{d^2}{1+d}\geq\frac{1}{5}$.

14. 设x,y,z均为正实数，且$xyz=1$，求证：$\frac{1}{x^3y}+\frac{1}{y^3z}+\frac{1}{z^3x}\geq xy+yz+zx$.

15. 已知$x,y,z\in R^*$，且$x+y+z=1$.

（1）求证：$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq 27$；

（2）若$\lambda(x^2+y^2+z^2)\leq x^3+y^3+z^3$恒成立，求实数$\lambda$的最大值.

16. 设实数$a,b,c\in[0,+\infty)$，且$a+b+c=3$，证明：$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\geq\frac{3}{4}$.

17. 已知$a,b,c\in R^+$且$a+b+c=1$，求$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{8}{c^2}$的最小值.

18. 已知$a,b,c\in R^+$且$a+b+c=1$，求证：$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}\geq\frac{3}{4}$.

19. 已知$a,b,c\in R^+$且$a+b+c=1$，求证：$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}\leq\frac{3}{4}$.

20. 已知：$a,b\in R^+$，求证：$\frac{a}{\sqrt{a^2+3b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+3a^2}}\geq 1$.

21. 已知：$x,y,z\in R^+,x+y+z=1$，求证：$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}\geq\frac{2}{1+x}+\frac{2}{1+y}+\frac{2}{1+z}$.

22. 已知正数a,b,c满足$abc=1$，求证：$\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}+\frac{1}{1+2c}\geq 1$.

23. 已知正数a,b,c满足$a+b+c=1$，求证：$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\leq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$.

24. 已知a,b,c均为大于 1 的实数，且满足$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$. 求证：$\sqrt{a+b+c}\geq\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}$.