专题 8 绝对值不等式

第一讲 绝对值不等式 $|x-a|+|x-b|\ge c$ $|x-a|+|x-b|\le c$ 类型

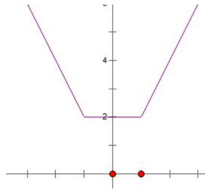
绝对值的几何意义：$|a|$ 的几何意义是：数轴上表示数轴上点 a 到原点的距离．

$|a-b|$ 的几何意义是：数轴上表示数轴上 a,b 两点的距离．

$|a+b|$ 的几何意义是：数轴上表示数轴上 $a,-b$ 的两点的距离．

$|x-a|+|x-b|$ 的几何意义是：数轴上表示点 x 到 a,b 的两点的距离和，故 $|x-a|+|x-b|\ge|a-b|$

利用图像和几何意义解 $|x-a|+|x-b|\le c$ 或 $|x-a|+|x-b|\ge c$ 的解集．



分区间讨论：$|x-a|+|x-b|=\begin{cases}-2x+a+b(x<a)\\ b-a(a\le x\le b)\\ 2x-a-b(x>b)\end{cases}$

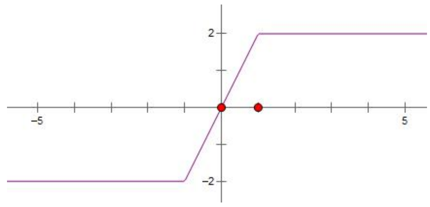
$|ax-b|\le c$ 的解法：Ⅰ.当 $c>0$ 时，不等式解集为：$-c\le ax+b\le c$ Ⅱ.当 $c<0$ 时，不等式解集为：空集

$|ax+b|\ge c$ 的解法：Ⅰ.当 $c>0$ 时，不等式解集为：$ax+b\ge c$ 或 $ax+b\le -c$ Ⅱ.当 $c<0$ 时，不等式解集为：全体实数

绝对值不等式 $|x-a|-|x-b|\ge c$ $|x-a|-|x-b|\le c$

$|x-a|-|x-b|$ 的几何意义是：数轴上表示点 x 到 a 的距离与到 b 的距离之差，故 $-|a-b|\le|x-a|-|x-b|\le|a-b|$

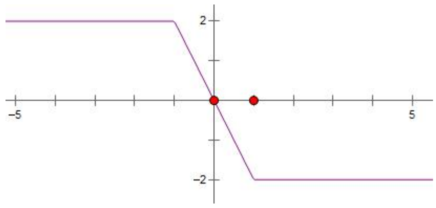
利用图像和几何意义解 $|x-a|-|x-b|\le c$ 或 $|x-a|-|x-b|\ge c$ 的解集．



分区间讨论：$|x-a|-|x-b|=\begin{cases}a-b(x<a)\\ 2x-a-b(a\le x\le b)\\ -a+b(x>b)\end{cases}$

$|x-b|-|x-a|$ 的几何意义是：数轴上表示点 x 到 b 的距离与到 a 的距离之差，故 $-|a-b|\le|x-b|-|x-a|\le|a-b|$

利用图像和几何意义解 $|x-b|-|x-a|\le c$ 或 $|x-b|-|x-a|\ge c$ 的解集．



分区间讨论：$|x-b|-|x-a|=\begin{cases}-a+b(x<a)\\ -2x+a+b(a\le x\le b)\\ a-b(x>b)\end{cases}$

【例 1】若不等式 $|x+1|+|x-2|\ge a$ 对任意 $x\in R$ 恒成立，则 a 的取值范围是________．

【解析】由于 $|x+1|+|x-2|\ge|1-(-2)|=3$，所以只需 $a\le 3$ 即可．

【变式】若本题条件变为"$\exists x\in R$ 使不等式 $|x+1|+|x-2|<a$ 成立为假命题"，求 a 的范围．

【解析】由条件知其等价命题为对 $\forall x\in R$，$|x+1|+|x-2|\ge a$ 恒成立，故 $a\ge(|x+1|+|x-2|)\min$，又 $|x+1|+|x-2|\ge|(x+1)-(x-2)|=3$，$\therefore a\le 3$．

【例 2】不等式 $\log_3(|x-4|+|x+5|)>a$ 对于一切 $x\in R$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是________．

【解析】由绝对值的几何意义知：$|x-4|+|x+5|\ge 9$，则 $\log_3(|x-3|+|x+5|)\ge 2$ 所以要使不等式 $\log_3(|x-4|+|x+5|)>a$ 对于一切 $x\in R$ 恒成立，则需 $a<2$．

【例 3】不等式 $|x+1|+|x-1|<3$ 的实数解为________．

【解析】当 $x>1$ 时，原不等式等价于 $2x<3\Rightarrow x<\frac{3}{2}$，$\therefore 1<x<\frac{3}{2}$；当 $-1\le x\le 1$ 时，原不等式等价于 $x+1-x+1<3$，此不等式恒成立，$\therefore -1\le x\le 1$；当 $x<-1$ 时，原不等式等价于 $-2x<3\Rightarrow x>-\frac{3}{2}$，$\therefore -\frac{3}{2}<x<-1$．综上可得：$-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}$．

【例 4】已知函数 $f(x)=|x-2|$，$g(x)=-|x+3|+m$．

（1）解关于 x 的不等式 $f(x)+a-1>0(a\in R)$；

（2）若函数 $f(x)$ 的图象恒在函数 $g(x)$ 的图像的上方，求 m 的取值范围．

【解析】（1）不等式 $f(x)+a-1>0$，即 $|x-2|+a-1>0$，当 $a=1$ 时，解集为 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$；当 $a>1$ 时，解集为全体实数 R；当 $a<1$ 时，解集为 $(-\infty,a+1)\cup(3-a,+\infty)$

（2）$f(x)$ 的图像恒在函数 $g(x)$ 图像的上方，即为 $|x-2|>-|x+3|+m$ 对任意实数 x 恒成立，即 $|x-2|+|x+3|>m$ 恒成立，又对任意实数 x 恒有 $|x-2|+|x+3|\geq|(x-2)-(x+3)|=5$，于是得 $m<5$，即 m 的取值范围是 $(-\infty,5)$．

【例 5】设对于任意实数 x，不等式 $|x+7|+|x-1|\geq m$ 恒成立．

（1）求 m 的取值范围；

（2）当 m 取最大值时，解关于 x 的不等式 $|x-3|-2x\leq 2m-12$．

【解析】（1）设函数 $f(x)=|x+7|+|x-1|\geq|1-(-7)|=8$，所以 $m\leq 8$．

（2）由(1)知 m 的最大值为 8，故原不等式即为 $|x-3|\leq 2x+4$．即 $-2x-4\leq x-3\leq 2x+4$．解得 $x\geq-\frac{1}{3}$．

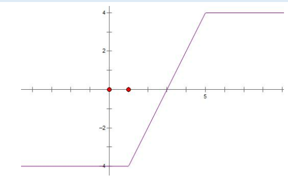
【例 6】已知函数 $f(x)=\log_2(|x-1|+|x-5|-a)$．

（1）当 $a=2$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

（2）当函数 $f(x)$ 的定义域为 R 时，求实数 a 的取值范围．

【解析】函数的定义域满足 $|x-1|+|x-5|-a>0$，即 $|x-1|+|x-5|>a$．当 $a=2$ 时，$f(x)=\log_2(|x-1|+|x-5|-2)$，设 $g(x)=|x-1|+|x-5|$，则 $g(x)=|x-1|+|x-5|\geq|5-1|=4$，$f(x)_{\min}=\log_2(4-2)=1$．

（2）由(1)知，$g(x)=|x-1|+|x-5|$ 的最小值为 4，$|x-1|+|x-5|-a>0\ \therefore a<4$，$a$ 的取值范围是 $(-\infty,4)$．



【例 7】（2015•山东）不等式 $|x-1|+|x-5|<2$ 解集是（　　）

A．$(-\infty,4)$　　B．$(-\infty,1)$　　C．$(1,4)$　　D．$(1,5)$

【解析】由于 $-4\leq|x-1|-|x-5|\leq 4$，故 $|x-1|-|x-5|<2$ 时，根据图像和分析口诀可得：$2x-6<2$，故 $x<4$，选 A．

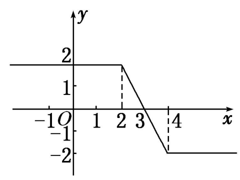
【例 8】已知函数 $f(x)=|x-4|-|x-2|$．

（1）作出函数 $y=f(x)$ 的图象；

（2）解不等式 $|x-4|-|x-2|>1$．

【解析】（1）$f(x)=\begin{cases}-2,x>4\\-2x+6,2\leq x\leq 4\\2,x<2\end{cases}$，则函数 $y=f(x)$ 的图像如图所示．

(2)由函数 $y=f(x)$ 的图像容易求得不等式 $|x-4|-|x-2|>1$ 的解集为 $(-\infty,\frac{5}{2})$．



【例 9】已知函数 $f(x)=|x-2|-|x-5|$．

（1）证明：$-3\leq f(x)\leq 3$；

（2）求不等式 $f(x)\geq x^2-8x+15$ 的解集．

【解析】(1)证明：$f(x)=|x-2|-|x-5|=\begin{cases}-3,x\leq 2\\2x-7,2<x<5\\3,x\geq 5\end{cases}$，当 $2<x<5$ 时，$-3<2x-7<3$．所以 $-3\leq f(x)\leq 3$．

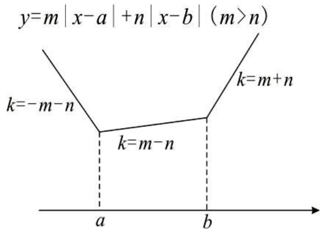
（2）由（1）可知，当 $x\leq 2$ 时，$f(x)\geq x^2-8x+15$，即 $0\geq x^2-8x+18$，故解集为空集；

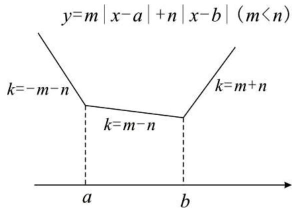
当 $2<x<5$ 时，$f(x)\geq x^2-8x+15$，即 $0\geq x^2-10x+22$，故解集为 $\{x|5-\sqrt{3}\leq x<5\}$；

当 $x\geq 5$ 时，$f(x)\geq x^2-8x+15$，即 $0\geq x^2-8x+12$，故的解集为 $\{x|5\leq x\leq 6\}$．

综上，不等式 $f(x)\geq x^2-8x+15$ 的解集为 $\{x|5-\sqrt{3}\leq x\leq 6\}$．

第二讲 绝对值不等式 $f(x)=m|x-a|+n|x-b|$ 类型

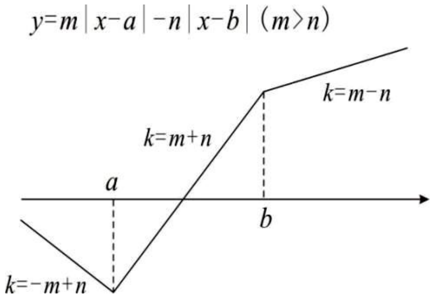


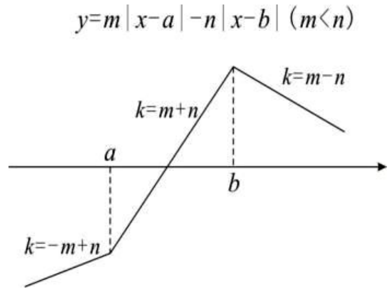


结论：在绝对值不等式中，系数大的决定不等式的最值．绝对值之和只有最小值，并在大系数绝对值取到零点时取到最小值．

书写过程：$|x-1|+2|x-2|=|x-1|+|x-2|+|x-2|\ge 1+|x-2|\ge 1$

第三讲 绝对值不等式 $f(x)=m|x-a|-n|x-b|$ 类型





结论：系数大的决定最值，类似于二次函数，系数大的为正，开口向上，有最小值；系数大的为负，开口向下，有最大值．

【例 10】解不等式 $|2x+3|+|x-3|>4$．

【解析】$|2x+3|+|x-3|=|x+\frac{3}{2}|+|x+\frac{3}{2}|+|x-3|\ge|x+\frac{3}{2}|+\frac{9}{2}>4$；故不等式的解集为 R．

【例 11】解不等式 $|2x+3|+|x-2|\le 3$．

【解析】$|2x+3|+|x-2|=|x+\frac{3}{2}|+|x+\frac{3}{2}|+|x-2|\ge|x+\frac{3}{2}|+\frac{7}{2}>3$；故不等式的解集为 ϕ．

【例 12】（2016•池州二模）设函数 $f(x)=|2x-1|+|x-3|$．

（1）求函数 $f(x)$ 的最小值；

（2）若任意 $x,y\in R$，不等式 $f(x)>m(|y+1|-|y-1|)$ 恒成立，求 m 的取值范围．

【解析】（1）$f(x)=|2x-1|+|x-3|\ge|x-\frac{1}{2}|+|x-\frac{1}{2}|+|x-3|\ge\frac{5}{2}+|x-\frac{1}{2}|\ge\frac{5}{2}$，当仅当 $x=\frac{1}{2}$ 时，等号成立．

（2）由题意得：$m(|y+1|-|y-1|)<\frac{5}{2}$ 对任意的 $y\in R$ 恒成立，设 $t=|y+1|-|y-1|$，$|t|=||y+1|-|y-1||\le 2$，所以 $-2\le t\le 2$，所以 $-2m<\frac{5}{2}$ 且 $2m<\frac{5}{2}$，解得 $-\frac{5}{4}<m<\frac{5}{4}$．

【例 13】设函数 $f(x)=2|x-1|+|x+2|$．

（1）求不等式 $f(x)\ge 4$ 的解集；

（2）若不等式 $f(x)<|m-2|$ 的解集是非空集合，求实数 m 的取值范围．

【解析】（1）$f(x)=\begin{cases}-3x, x<-2\\ -x+4, -2\le x\le 1\\ 3x, x>1\end{cases}$，令 $-x+4=4$ ，或 $3x=4$，得 $x=0, x=\frac{4}{3}$，所以，不等式 $f(x)\ge 4$ 的解集是 $(-\infty,0]\cup[\frac{4}{3},+\infty)$；（2）$f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上递减，$[1,+\infty)$ 上递增，所以，$f(x)\ge f(1)=3$，由于不等式 $f(x)<|m-2|$ 的解集是非空的集合，所以，$|m-2|>3$，解之，$m<-1$ 或 $m>5$，即实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$．

【例 14】关于 x 的二次方程 $x^2+6x+|a+2|+|2a-1|=0$ 有实根，求 a 的取值范围．

【解析】$\because$ 原方程有实根，$\Delta=36-4(|a+2|+|2a-1|)\ge 0$，$\therefore|a+2|+|2a-1|\le 9$

①当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，$\because a+2+2a-1\le 9$，$\therefore\frac{1}{2}\le a\le\frac{8}{3}$；②当 $-2\le a<\frac{1}{2}$ 时，$\because a+2-2a+1\le 9$，$\therefore -2\le a<\frac{1}{2}$；③当 $a<-2$ 时，$\because -a-2-2a+1\le 9$ $\therefore -\frac{10}{3}\le a<-2$．综上所述，由①②③得 a 的取值范围为 $[-\frac{10}{3},\frac{8}{3}]$．

【例 15】已知函数 $f(x)=|3x-6|+|x-4|$.

（1）作出函数 $y=f(x)$ 的图象；

（2）解不等式 $|3x-6|+|x-4|>2x$.

【解析】(1) $f(x)=|3x-6|-|x-4|=\begin{cases}2-2x, x<2\\ 4x-10, 2\le x\le 4\\ 2x-2, x>4\end{cases}$.此函数有最小值 $f(2)=-2$,再求出另一个零点对应的值 $f(4)=6$，连接两点，中间段斜率为 4，根据异号相减原理，左边为减函数，斜率为 -2，右边为增函数，斜率为 2. （2）直线 $y=2x$ 与射线 $y=2-2x(x<2)$ 交于 $(\frac{1}{2},1)$，线段 $y=4x-10(2\le x\le 4)$ 在直线 $y=2x$ 下方，射线 $y=2-2x(x>4)$ 在直线 $y=2x$ 下方且与直线 $y=2x$ 平行,故由图象可知不等式 $|3x-6|+|x-4|>2x$ 的解集为 $\{x|x<\frac{1}{2}\}$.

【例 16】已知函数 $f(x)=|2x+1|$， $g(x)=|x-4|$.

（1）求不等式 $f(x)>2$ 的解集；

（2）不等式 $f(x)-g(x)\ge m+1$ 的解集为 R，求实数 m 的取值范围.

【解析】(1)不等式 $f(x)>2$ 等价于 $|2x+1|>2$， $\therefore 2x+1>2$ 或 $2x+1<-2$ 解得 $x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-\frac{3}{2}$.∴不等式 $f(x)>2$ 的解集为 $\{x|x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-\frac{3}{2}\}$.

(2)记 $y=f(x)-g(x)$)，则 $y=\begin{cases}-x-5, (x<-\frac{1}{2})\\ 3x-3, (-\frac{1}{2}\le x\le 4)\\ x+5, (x>4)\end{cases}$，

由图可知，当 $x=-0.5$ 时， y 取最小值，且最小值为-4.5，∵不等式 $y=f(x)-g(x)\ge m+1$ 的解集为 R， $\therefore m+1\le -4.5$，即 $m\le -5.5$， $\therefore$ 实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-5.5]$.

达标训练

一、选择题

1. （2015•山东）不等式 $|x-1|-|x-5|<2$ 的解集是（　　）

   A. $(-\infty,4)$　　B. $(-\infty,1)$　　C. $(1,4)$　　D. $(1,5)$

2. （2014•江西）对任意 $x,y\in R$， $|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|$ 的最小值为（　　）

   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. （2011•山东）不等式 $|x-5|+|x+3|\ge 10$ 的解集是（　　）

   A. $[-5,7]$　　B. $[-4,6]$　　C. $(-\infty,-5]\cup[7,+\infty)$　　D. $(-\infty,-4]\cup[6,+\infty)$

二、填空题

4. （2014•重庆）若不等式 $|2x-1|+|x+2|\ge a^2+\frac{1}{2}a+2$ 对任意实数 x 恒成立，则实数 a 的取值范围是_________.

5. （2014•广东）不等式 $|x-1|+|x+2|\ge 5$ 的解集为_________.

6. （2013•陕西）设 $a,b\in R$， $|a-b|>2$，则关于实数 x 的不等式 $|x-a|+|x-b|>2$ 的解集是_________.

7. （2013•江西）在实数范围内，不等式 $||x-2|-1|\le 1$ 的解集为_________.

8. （2013•重庆）若关于实数 x 的不等式 $|x-5|+|x+3|<a$ 无解，则实数 a 的取值范围是_________.

9. （2012•广东）不等式 $|x+2|-|x|\le 1$ 的解集为_________.

10. （2012•湖南）不等式 $|2x+1|-2|x-1|>0$ 的解集为_________.

11. （2011•江西）对于 $x\in R$，不等式 $|x+10|-|x-2|\ge 8$ 的解集_________.

三、解答题

12. （2012•新课标）已知函数 $f(x)=|x+a|+|x-2|$.

（1）当 $a=-3$ 时，求不等式 $f(x)\geq 3$ 的解集；

（2）若 $f(x)\leq|x-4|$ 的解集包含[1，2]，求 a 的取值范围.

13. （2017•新课标I）已知函数 $f(x)=-x^2+ax+4,\ g(x)=|x+1|+|x-1|$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\geq g(x)$ 的解集；

（2）若不等式 $f(x)\geq g(x)$ 的解集包含 $[-1,1]$，求 a 的取值范围.

14. （2018•新课标II）设函数 $f(x)=5-|x-a|-|x-2|$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\geq 0$ 的解集；

（2）若 $f(x)\leq 1$，求 a 的取值范围.

15. （2018•新课标I）已知 $f(x)=|x+1|-|ax-1|$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)>1$ 的解集；

（2）若 $x\in(0,1)$ 时不等式 $f(x)>x$ 成立，求 a 的取值范围.

16. （2017•新课标III）已知函数 $f(x)=|x+1|-|x-2|$.

（1）求不等式 $f(x)\geq 1$ 的解集；

（2）若不等式 $f(x)\geq x^2-x+m$ 的解集非空，求 m 的取值范围.

17. （2016•新课标III）已知函数 $f(x)=|2x-a|+a$.

（1）当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\leq 6$ 的解集；

（2）设函数 $g(x)=|2x-1|$，当 $x\in R$ 时，$f(x)+g(x)\geq 3$，求 a 的取值范围.

18. （2016•新课标II）已知函数 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{2}\right|$，$M$ 为不等式 $f(x)<2$ 的解集.

（1）求 M；

（2）证明：当 a，$b\in M$ 时，$|a+b|<|1+ab|$.

19. （2015•江苏）解不等式 $x+|2x+3|\geq 2$.

20. （2015•新课标I）已知函数 $f(x)=|x+1|-2|x-a|$，$a>0$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)>1$ 的解集；

（2）若 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形面积大于 6，求 a 的取值范围.

21. （2014•新课标II）设函数 $f(x)=\left|x+\frac{1}{a}\right|+|x-a|\ (a>0)$.

（1）证明：$f(x)\geq 2$；

（2）若 $f(3)<5$，求 a 的取值范围.

22. （2013•新课标I）已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+a|$，$g(x)=x+3$.

（1）当 $a=-2$ 时，求不等式 $f(x)<g(x)$ 的解集；

（2）设 $a>-1$，且当 $x\in\left[-\frac{a}{2},\frac{1}{2}\right]$ 时，$f(x)\leq g(x)$，求 a 的取值范围.

23. （2013•福建）设不等式 $|x-2|<a(a\in N^*)$ 的解集为 A，且 $\frac{3}{2}\in A,\frac{1}{2}\notin A$

（1）求 a 的值；

（2）求函数 $f(x)=|x+a|+|x-2|$ 的最小值.

24. （2011•辽宁）选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x-2|-|x-5|$.

（1）证明：$-3\leq f(x)\leq 3$；

（2）求不等式 $f(x)\geq x^2-8x+15$ 的解集.

25. （2011•新课标）设函数 $f(x)=|x-a|+3x$，其中 $a>0$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\geq 3x+2$ 的解集；

（2）若不等式 $f(x)\leq 0$ 的解集为 $\{x|x\leq -1\}$，求 a 的值.

26. （2010•新课标）设函数 $f(x)=|2x-4|+1$.

（1）画出函数 $y=f(x)$ 的图象；

（2）若不等式 $f(x)\leq ax$ 的解集非空，求 a 的取值范围.