

专题1 直线方程

第一讲 直线的四种形式

知识归纳:

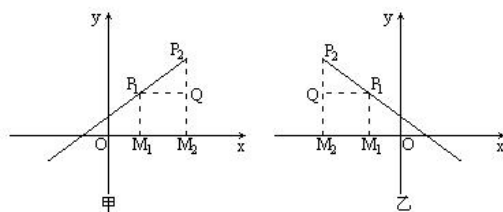
一、直线的倾斜角与斜率

1. 确定直线的几何要素是: 直线上两不同的点或直线上一点和直线的方向两个相对独立的条件.

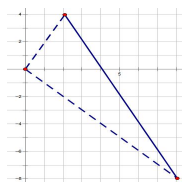
注意: 表示直线方向的有: 直线的倾斜角(斜率).

2. 直线的倾斜角: 当直线 l 与 x 轴相交时, 我们取 x 轴作为基准, x 轴正向与直线 l 向上方向之间所成的角 α 叫做直线 l 的倾斜角.注意: ①从用运动变化的观点来看, 直线的倾斜角是由 x 轴绕交点按逆时针方向转到与直线重合时所成的角.②规定: 直线与 x 轴平行或重合时, 直线的倾斜角为 0° .③直线倾斜角 α 的取值范围是: $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

④在同一直角坐标系下, 任何一条直线都有倾斜角且唯一, 倾斜程度相同的直线, 其倾斜角相等, 倾斜程度不同的直线, 其倾斜角不相等.

3. 直线的斜率: 倾斜角不是 90° 的直线, 它的倾斜角 α 的正切值叫做这条直线的斜率, 即 $k = \tan \alpha$ ($\alpha \neq 90^\circ$). 它从另一个方面反映了直线的倾斜程度.注意: 一条直线必有一个确定的倾斜角, 但不一定有斜率, 当 $\alpha = 0^\circ$ 时, $k = 0$; 当 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时, $k > 0$; 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, k 不存在, 当 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ 时, $k < 0$. 即: 斜率的取值范围为 $k \in \mathbb{R}$.【例1】给出下列命题: ①若直线倾斜角为 α , 则直线斜率为 $\tan \alpha$; ②若直线倾斜角斜率为 $\tan \alpha$, 则直线的倾斜角为 α ; ③直线的倾斜角越大, 它的斜率越大; ④直线的斜率越大, 其倾斜角越大; ⑤直线的倾斜角的正切值叫做直线的斜率. 其中正确命题的序号为_____.【解析】①错误, 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, $\tan 90^\circ$ 不存在; ②正确; ③④错误, 当 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ 时, $k < 0$, k 随着倾斜角的增大而增大, 但比倾斜角 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 小; ⑤不正确, $\alpha = 90^\circ$ 时, 倾斜角没有正切值.【例2】已知直线的倾斜角为 α , 且 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 求直线的斜率 k .【解析】 $\sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = \frac{4}{3} (0^\circ < \alpha < 90^\circ) \\ \tan \alpha = -\frac{4}{3} (90^\circ < \alpha < 180^\circ) \end{cases}$ 

4. 直线斜率的坐标公式

经过两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq x_2$) 的直线的斜率公式: $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.注意: ①斜率公式与两点的顺序无关, 即 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ($x_1 \neq x_2$)②特别地: 当 $y_1 = y_2, x_1 \neq x_2$ 时, $k = 0$; 此时直线平行于 x 轴或与 x 轴重合; 当 $y_1 \neq y_2, x_1 = x_2$ 时, k 不存在, 此时直线的倾斜角为 90° , 直线与 y 轴平行或重合.【例3】已知点 $P(2, 1)$, $Q(m, -3)$, 求直线 PQ 的斜率并判断倾斜角的范围.【解析】当 $m = 2$ 时, 斜率不存在, $\alpha = 90^\circ$; 当 $m \neq 2$ 时, $k = \frac{-3-1}{m-2} = \frac{-4}{m-2}$, 当 $m > 2$ 时, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;当 $m < 2$ 时, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.【例4】(三点共线问题) 已知 $A(-3, -5)$, $B(1, 3)$, $C(5, 11)$ 三点, 证明这三点在同一条直线上【证明】 $k_{AB} = \frac{3 - (-5)}{1 - (-3)} = 2$, $k_{AC} = \frac{11 - (-5)}{5 - (-3)} = 2$, $\therefore k_{AB} = k_{AC}$, 则 A, B, C 三点共线.【例5】(最值问题) 已知实数 x, y , 满足 $2x + y = 8$, 当 $2 \leq x \leq 8$ 时, 求 $\frac{y}{x}$ 的最大值和最小值.【解析】当 $x = 2$ 时, $y = 4$, $\frac{y}{x} = 2$; 当 $x = 8$ 时, $y = -8$, $\frac{y}{x} = -1$, 如图, $-1 \leq k \leq 2$.

第四章 圆锥曲线

二. 直线的方程

1. 定义：一般地，以一个方程的解为坐标的点都是某条直线上的点，反过来，这条直线上点的坐标都是这个方程的解，这个方程就叫做这条直线的方程，这条直线叫做这个方程的直线。

2. 直线方程的几种形式

(1) 点斜式：

问题：若直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$ ，且斜率为 k ，求直线 l 的方程。

解析：设点 $P(x, y)$ 是直线 l 上不同于点 P_0 的任意一点，根据经过两点的直线的斜率公式，得 $k = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ ，

可化为 $y - y_0 = k(x - x_0)$ ，即为过点 P_0 ，斜率为 k 的直线 l 的方程。

方程 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 是由直线上一点及其斜率确定的，把这个方程叫做直线的点斜式的方程，简称点斜式。

注意：

① $k = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ 与 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 是不同的，前者表示直线上缺少一个点 $x \neq x_0$ ，后者才是整条直线。

② 当直线 l 的倾斜角为 0° 时， $\tan 0^\circ = 0$ ，即 $k = 0$ ，这时直线 l 的方程为 $y = y_0$ 。

③ 当直线的倾斜角为 90° 时，直线 l 斜率不存在，这时直线 l 与 y 轴平行或重合，它的方程不能用点斜式表示，它的方程是 $x = x_0$ 。即：局限性是不能表示垂直于 x 轴的直线。

④ 经过点 $P_0(x_0, y_0)$ 的直线有无数条，可分为两类情况：

i. 斜率为 k 的直线，方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$

ii. 斜率不存在的直线，方程为 $x - x_0 = 0$ 或写为 $x = x_0$ 。

【例 6】 根据条件写出下列各题中的直线的方程：① 经过点 $P_1(-2, 3)$ ，倾斜角 $\alpha = 45^\circ$ ；② 经过点 $P_1(1, 2)$ 且斜率为 2；③ 经过点 $(4, 2)$ ，且与 x 轴平行；④ 经过点 $(-2, -3)$ ，且与 x 轴垂直。

【解析】 ① $y - 3 = x - (-2)$ ，即 $x - y + 5 = 0$ ；② $y - 2 = 2(x - 1)$ ，即 $2x - y = 0$ ；③ $y = 2$ ；④ $x = -2$ 。

(2) 斜截式：

问题：已知直线 l 的斜率是 k ，与 y 轴的交点是 $P(0, b)$ ，代入直线方程的点斜式，得直线 l 的方程 $y - b = k(x - 0)$ ，也就是 $y = kx + b$ ，我们称 b 是直线 l 在 y 轴上的截距。

这个方程是由直线 l 的斜率 k 和它在 y 轴上的截距确定的，所以叫做直线的斜截式方程，简称斜截式。

注意：① $b \in R$ ；② 局限性：不表示垂直于 x 轴的直线；③ 斜截式方程和一次函数的解析式相同，都是 $y = kx + b$ ，但有区别：当斜率不为 0 时， $y = kx + b$ 是一次函数，当 $k = 0$ 时， $y = b$ 不是一次函数；一次函数 $y = kx + b$ ($k = 0$) 必是一条直线的斜截式方程。

【例 7】 求倾斜角是直线 $y = -\sqrt{3}x + 1$ 的倾斜角的 $\frac{1}{4}$ ，且在 y 轴上的截距为 -5 的直线的方程。

【解析】 $y = -\sqrt{3}x + 1 \Rightarrow \alpha = 120^\circ$ ， $\frac{\alpha}{4} = 30^\circ \Rightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，故直线方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 5$ 。

(3) 两点式：

问题：已知直线 l 经过两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq x_2$)，求直线 l 的方程。

【解析】 因为直线 l 经过两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq x_2$)，所以它的斜率 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ，代入点斜式，得

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \text{ 当 } y_2 \neq y_1 \text{ 时, 方程可以写成 } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

这个方程是由直线上两点确定的，所以叫做直线的两点式方程，简称两点式。

注意：① 方程 $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ 与方程 $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ 比较，后者比前者表示直线的范围更小了，

前者不能表示斜率不存在的直线，后者除此外，还不能表示斜率为 0 的直线；局限性：不能表示垂直于坐标轴的直线。

② 两点式方程与这两个点的顺序无关。

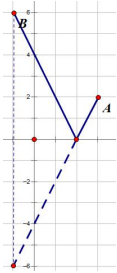
第四章 圆锥曲线

【例 8】 已知点 $A(-5, 0)$, $B(3, -3)$, 求直线 AB 的方程.

【解析】 $\frac{y-0}{-3-0} = \frac{x+5}{3+5} \Rightarrow 3x+8y+15=0$.

【例 9】 一条光线从点 $A(3, 2)$ 出发, 经 x 轴反射, 通过点 $B(-1, 6)$, 求入射光线和反射光线所在直线的方程.

【解析】 如图, 入射光线经过 $A(3, 2)$, $B(-1, 6)$ 关于 x 轴对称点 $B'(-1, -6)$, 则入射光线方程为 $\frac{y-2}{-6-2} = \frac{x-3}{-1-3} \Rightarrow 2x-y-4=0$, 反射直线方程为: $\frac{y+2}{6+2} = \frac{x-3}{-1-3} \Rightarrow 2x+y-4=0$.



(4) 截距式:

问题: 已知直线 l 与 x 轴的交点为 $A(a, 0)$, 与 y 轴的交点为 $B(0, b)$, 其中 $a \neq 0, b \neq 0$, 求直线 l 的方程.

【解析】 因为直线 l 经过 $A(a, 0)$ 和 $B(0, b)$ 两点, 将这两点的坐标代入两点式, 得 $\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}$, 即为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. 如果直线与 x 轴的交点为 $(a, 0)$, 则称 a 为直线在 x 轴上的截距.

以上直线方程是由直线在 x 轴和 y 轴上的截距确定的, 所以叫做直线的截距式方程, 简称截距式

注意: 方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 中 $a \neq 0, b \neq 0$, 所以它不能表示与坐标轴平行(重合)的直线, 还不能表示过原点的直线.

【例 10】 过两点 $A(-1, 1)$, $B(3, 9)$ 的直线在 x 轴上的截距为_____.

【解析】 设直线的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, 将 A, B 代入方程得: $\begin{cases} \frac{-1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \\ \frac{3}{a} + \frac{9}{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = -3 \end{cases}$, 故 x 轴上的截距为 $\frac{3}{4}$.

(5) 一般式方程:

以上几种形式的直线方程都是二元一次方程, 即平面上任何一条直线都可以用一个关于 x, y 的二元一次方程表示; 而关于 x, y 的二元一次方程, 它都表示一条直线. 因此我们把 x, y 的二元一次方程 $Ax + By + C = 0$ (其中 A, B 不同时为 0) 叫做直线的一般式方程, 简称一般式.

注意: ① 直线的一般式方程能表示所有直线的方程, 这是其他形式的方程所不具备的.

② 直线的一般式方程成立的条件是 A, B 不同时为 0.

③ 虽然直线的一般式有三个系数, 但是只需两个独立的条件即可求直线的方程.

若 $A \neq 0$, 则方程可化为 $x + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A} = 0$;

若 $B \neq 0$, 则方程可化为 $\frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0$, 即 $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

若 $A = 0, B \neq 0$ 时, 方程化为 $y = -\frac{C}{B}$, 它表示与 x 轴平行或重合的直线.

若 $A \neq 0, B = 0$ 时, 方程化为 $x = -\frac{C}{A}$, 它表示一条与 y 轴平行或重合的直线.

若 $ABC \neq 0$ 时, 则方程可化为 $\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$, 因此只需要两个条件即可.

④ 直线方程的其他形式都可以转化为一般式, 因此在解题时若没有特殊说明, 应把最后结果互为直线的一般式.

【例 11】 设直线 l 的方程为 $(m^2 - 2m - 3)x + (2m^2 + m - 1)y = 2m - 6$, 根据下列条件分别确定 m 的值.

(1) l 在 x 轴上的截距为 -3; (2) l 的斜率是 -1.

【解析】 (1) 当 $y = 0$ 时, $(m^2 - 2m - 3)(-3) = 2m - 6 \Rightarrow m = 3$ 或 $m = -\frac{5}{3}$;

(2) $-\frac{2m^2 + m - 1}{m^2 - 2m - 3} = -1 \Rightarrow (3m - 4)(m + 1) = 0 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$ 或 $m = -1$.

第四章 圆锥曲线

三. 直线的位置关系 (同一平面上的直线)

1. 平行与垂直

(1) 两条直线平行的判定

①当两条直线的斜率存在时, 均可化成它的斜截式方程, 所以以斜截式为例来研究直线平行的判定

设两条直线分别为 $l_1: y = k_1x + b_1$, $l_2: y = k_2x + b_2$

若 $l_1 // l_2$, 则 l_1, l_2 的倾斜角相等, 即由 $\alpha_1 = \alpha_2$, 可得 $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$, 即 $k_1 = k_2$, 此时 $b_1 \neq b_2$; 反之也成立.

所以有 $l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$ 且 $b_1 \neq b_2$

②当两条直线的斜率都不存在时, 二者的倾斜角均为 90° , 若不重合, 则它们也是平行直线

注意: 当不考虑斜率, 即给出直线的一般式时, 有如下结论:

设两条直线分别为 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 可得 $l_1 // l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ (其中分母

不为 0) 或 $l_1 // l_2 \Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ 且 $B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0$ 或 $A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$

(2) 两条直线垂直的判定

①当两条直线的斜率存在且不为 0 时, 均可化成它的斜截式方程, 即 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$

②两条直线中, 一条斜率不存在, 同时另一条斜率等于零, 则两条直线垂直.

由①②得, 两条直线垂直的判定就可叙述为: 一般地, $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$ 或一条斜率不存在, 同时另一条斜率等于零.

注意: 当不考虑斜率, 即给出直线的一般式时, 有如下结论:

设两条直线分别为 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 可得 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

第二讲 平行与垂直的直线方程求法

设直线 $l: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, 则与 l 平行的直线方程为 $A_1x + B_1y + C_2 = 0 (C_2 \in R)$; 与 l 垂直的直线方程为 $B_1x - A_1y + C_2 = 0 (C_2 \in R)$.

【例 13】 求与直线 $3x + 4y + 1 = 0$ 垂直且过点 $(1, 2)$ 的直线方程.

【解析】 设要求的直线方程为 $4x - 3y + C = 0$, 代入点 $(1, 2)$ 得: $4 \times 1 - 3 \times 2 + C = 0 \Rightarrow C = 2$.

【例 14】 已知两直线 $l_1: x + my + 6 = 0$, $l_2: (m - 2)x + 3y + 2m = 0$, 当 m 为何值时, 直线 l_1 与 l_2 :

①平行 ②重合 ③垂直

【解析】 ① $\frac{1}{m-2} = \frac{m}{3} \neq \frac{6}{2m} \Rightarrow m = -1$; ② $\frac{1}{m-2} = \frac{m}{3} = \frac{6}{2m} \Rightarrow m = 3$; ③ $(m-2) + 3m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$.

【例 15】 求证: 不论 m 为取什么实数, 直线 $(2m^2 - 1)x + (m^2 - 1)y = m^2 - 5$ 总过某一定点.

【解析】 由于 m 的任意性, 故 $(2x + y)m^2 - (x + y) = m^2 - 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 9 \end{cases}$, 故直线过定点 $(-4, 9)$.

【例 16】 已知直线 $ax - y + 2a + 1 = 0$, (1) 若 $x \in (-1, 1)$ 时, $y > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围; (2) 若 $a \in (-\frac{1}{6}, 1)$ 时, 恒有 $y > 0$, 求 x 的取值范围.

【解析】 (1) $y = ax + 2a + 1 > 0$ 对 $x \in (-1, 1)$ 恒成立, 则 $\begin{cases} a \cdot (-1) + 2a + 1 \geq 0 \\ a \cdot (1) + 2a + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq -1 \\ a \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow a \geq -\frac{1}{3}$

(2) $y = a(x + 2) + 1 > 0$ 对 $a \in (-\frac{1}{6}, 1)$ 恒成立, 则 $\begin{cases} (-\frac{1}{6}) \cdot (x - 2) + 1 \geq 0 \\ (1) \cdot (x - 2) + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x \leq 8$.

第四章 圆锥曲线

【例 12】 已知点 $A(2, 2)$ 和直线 $l: 3x + 4y - 20 = 0$, 求过点 A 和直线 l 平行的直线.

【解析】 令直线方程为: $3x + 4y + C = 0$, 将点 $A(2, 2)$ 代入直线方程得: $3 \times 2 + 4 \times 2 + C = 0 \Rightarrow C = -14$.

五. 两条直线的交点坐标

1. 设两条直线分别为 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 则 l_1 与 l_2 是否有交点, 只需看方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$
 是否有唯一解, 若方程组有唯一解, 则这两条直线相交, 此解就是交点的坐标; 若方程组无解, 则两条直线无公共点, 此时两条直线平行; 若方程组有无穷多解, 则两直线重合.

第三讲 过直线交点的直线系方程

经过两直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 与 $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 交点的直线系方程为

$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$, 其中 λ 是待定系数.

【例 17】 求经过两直线 $2x - 3y - 3 = 0$ 和 $x + y + 2 = 0$ 的交点且与直线 $3x + y - 1 = 0$ 平行的直线方程.

【解析】 设直线方程为 $2x - 3y - 3 + \lambda(x + y + 2) = 0$, 直线平行于 $3x + y - 1 = 0$, 故

$$\frac{2 + \lambda}{3} = \frac{-3 + \lambda}{1} \neq \frac{-3 + 2\lambda}{-1} \Rightarrow \lambda = \frac{11}{2}, \text{ 即 } 15x + 5y + 16 = 0.$$

2. 对称问题

(1) 点关于点的对称, 点 $A(a, b)$ 关于 $P_0(x_0, y_0)$ 的对称点 $B(m, n)$, 则由中点坐标公式 $m = 2x_0 - a, n = 2y_0 - b$, 即 $B(2x_0 - a, 2y_0 - b)$.

(2) 点关于直线的对称, 点 $A(x_0, y_0)$ 关于直线 $l: Ax + By + C = 0$ (A, B 不同时为 0) 的对称点 $A'(x_1, y_1)$, 则有 AA' 的中点在 l 上且直线 AA' 与已知直线 l 垂直.

(3) 直线关于直线的对称, 一般转化为点关于直线的对称解决 (详见秘籍).

第四讲 关于直线对称的问题

定理 1: 点 $A(x_0, y_0)$ 关于直线 $l: x = m$ 对称的点坐标为 $A'(2m - x_0, y_0)$.

点 $A(x_0, y_0)$ 关于直线 $l: y = n$ 对称的点坐标为 $A'(x_0, 2n - y_0)$.

直线 $l_1: Ax + By + C = 0$ 关于直线 $l: x = m$ 对称的直线方程为 $l_2: A(2m - x) + By + C = 0$.

直线 $l_1: Ax + By + C = 0$ 关于直线 $l: y = n$ 对称的直线方程为 $l_2: Ax + B(2n - y) + C = 0$.

定理 2: 点 $A(x_0, y_0)$ 关于直线 $l: x + y + C = 0$ 对称的点坐标为 $A'(-C - y_0, -C - x_0)$.

点 $A(x_0, y_0)$ 关于直线 $l: x - y + C = 0$ 对称的点坐标为 $A'(-C + y_0, C + x_0)$.

直线 $l_1: Ax + By + C' = 0$ 关于直线 $l: x + y + C = 0$ 对称的直线方程为 $l_2: A(-C - y) + B(-C - x) + C' = 0$;

直线 $l_1: Ax + By + C' = 0$ 关于直线 $l: x - y + C = 0$ 对称的直线方程为 $l_2: A(-C + y) + B(C + x) + C' = 0$;

关于定理 2, 只需记住 $\begin{cases} x_0 + y_0 + C = 0 \\ x + y_0 + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -C - x_0 \\ x = -C - y_0 \end{cases}$ 或者 $\begin{cases} x_0 - y_0 + C = 0 \\ x - y_0 + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = C + x_0 \\ x = -C + y_0 \end{cases}$

【例 18】 已知直线 $l: x + y - 1 = 0$, 试求: ①点 $P(4, 5)$ 关于 l 的对称坐标; ②直线 $l_1: y = 2x + 3$ 关于直线 l 的对称的直线方程.

【解析】 ①设点 $P(4, 5)$ 关于 l 对称的点 $P'(x', y')$, 则有 $\begin{cases} \frac{4 + x'}{2} + \frac{5 + y'}{2} - 1 = 0 \\ \frac{y' - 5}{x' - 4} = 1 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} x' = 1 - 5 = -4 \\ y' = 1 - 4 = -3 \end{cases}$, 故 P

关于直线 l 对称的坐标为 $(-4, -3)$.

②在直线 $l_1: y = 2x + 3$ 上任取一点 $A(x_0, y_0)$, A 关于 l 对称的点 $A'(x', y')$, 则有
$$\begin{cases} \frac{x_0 + x'}{2} + \frac{y_0 + y'}{2} - 1 = 0 \\ \frac{y' - y_0}{x' - x_0} = 1 \end{cases}$$

解得: $\begin{cases} x_0 = 1 - x' \\ y_0 = 1 - x' \end{cases}$, 由于 $A(x_0, y_0)$ 在直线 l_1 上, 故 $y_0 = 2x_0 + 3$, 要求的直线为 $1 - x' = 2(1 - y') + 3$, 化简得: $x' - 2y' + 4 = 0$, 即 $x - 2y + 4 = 0$.

第五讲 距离问题

六. 两点间的距离, 点到直线间的距离

(1) 两点间的距离: 已知 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 则 $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

(2) 点到直线的距离: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

注意: ①若给出的方程不是一般式, 则应先把方程化为一般式, 再利用公式求距离;

②点到直线的距离是点到直线上的点的最短距离;

③若点在直线上, 则点到直线的距离为 0, 但距离公式仍然成立, 因为此时 $Ax_0 + By_0 + C = 0$.

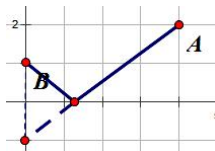
(3) 两平行线间的距离: 两条平行直线 $l_1: Ax + By + C_1 = 0$ 与 $l_2: Ax + By + C_2 = 0$ 的距离公式

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

注意: 应用此公式时, 要把两直线化为一般式, 且 x, y 的系数分别相等.

【例 19】 求函数 $y = \sqrt{x^2 - 8x + 20} + \sqrt{x^2 + 1}$ 的最小值.

【解析】 $y = \sqrt{(x-4)^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{(x-4)^2 + (0-2)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (0-1)^2}$ 表示 y 轴上的任意一点到点 $A(4, 2)$ 和点 $B(0, 1)$ 距离的和, 如图, 根据对称原理, 可知 $y_{\min} = \sqrt{(4-0)^2 + [2-(-1)]^2} = 5$.



【例 20】 求经过点 $A(-1, 2)$ 与 $B(-\frac{5}{2}, 0)$ 的直线上一点 $C(5, n)$ 到直线 $x + y = 1$ 的距离.

【解析】 经过 AB 的直线方程为 $\frac{y-0}{2-0} = \frac{x+\frac{5}{2}}{-1+\frac{5}{2}} \Rightarrow 4x - 3y + 10 = 0$, 故点 C 坐标为 $(5, 10)$, C 到直线的距离为 $d = \frac{|5+10-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 7\sqrt{2}$.

【例 21】 求经过点 $A(1, 2)$ 且到原点的距离等于 1 的直线方程.

【解析】 设直线方程为 $y - 2 = k(x - 1) \Rightarrow kx - y + 2 - k = 0$, 原点到直线的距离为 1, 即 $1 = \frac{|0+0+2-k|}{\sqrt{k^2+1^2}}$, $k^2 + 1 = 4 - 4k + k^2 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$, 故直线方程为 $3x - 4y + 5 = 0$; 由于直线 $x = 1$ 到原点距离也为 1, 故存在这两条直线满足条件. (注意: 距离问题一般有两直线, 如果求出答案只有一条, 则另一条直线斜率不存在.)

【例 22】 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 $A(1, 1), B(m, \sqrt{m}) (1 < m < 4), C(4, 2)$, 求 m 为何值时三角形面积最大.

【解析】 由题意得: $|AC| = \sqrt{(4-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$, AC 的直线方程为 $\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-1}{4-1} \Rightarrow x - 3y + 2 = 0$, B 到 AC 的距离 $d = \frac{|m - 3\sqrt{m} + 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}}$, 当 d 取得最大值时, $\triangle ABC$ 面积最大, 令 $t = \sqrt{m} (t \in (1, 2))$, $f(t) = |t^2 - 3t + 2| = \left| t - \frac{3}{2} \right| - \frac{1}{4}$, 当 $t = \frac{3}{2}$, 即 $m = \frac{9}{4}$ 时, d 取得最大值.

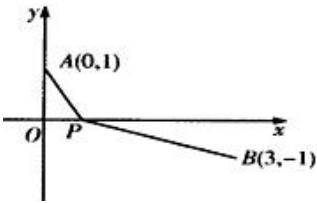
【例 23】 求过点 $P(1, 2)$ 且与 $A(2, 3), B(4, -5)$ 两点距离相等的直线方程.

【解析】 设直线方程为 $y - 2 = k(x - 1) \Rightarrow kx - y + 2 - k = 0$, $\frac{|2k - 3 + 2 - k|}{\sqrt{k^2 + 1^2}} = \frac{|4k + 5 + 2 - k|}{\sqrt{k^2 + 1^2}} \Rightarrow k = -4$ 或 $k = -\frac{3}{2}$, 故直线方程为 $4x + y - 6 = 0$ 或 $3x + 2y - 7 = 0$.

达标训练

- 过三点 $A(1, 3)$, $B(4, 2)$, $C(1, -7)$ 的圆交 y 轴于 M 、 N 两点, 则 $|MN| =$ ()
 A. $2\sqrt{6}$ B. 8 C. $4\sqrt{6}$ D. 10
- (2018·广西) 直线 $2x + y + m = 0$ 和 $x + 2y + n = 0$ 的位置关系是 ()
 A. 平行 B. 垂直 C. 相交但不垂直 D. 不能确定
- (2019·哈尔滨模拟) 已知直线 $3x + 2y - 3 = 0$ 与 $6x + my + 7 = 0$ 互相平行, 则它们之间的距离是 ()
 A. 4 B. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ D. $\frac{7\sqrt{13}}{26}$
- (2018·武清模拟) 直线 $3x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ 的倾斜角是 ()
 A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
- (2019·湖南模拟) 若直线 $y = kx + 2$ 的斜率为 2, 则 $k =$ ()
 A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
- (2018·娄底模拟) 直线 l 与直线 $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$ 垂直, 则直线 l 的斜率为 ()
 A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$
- (2018·海定期末) 已知点 $A(a, a)(a \neq 0)$, $B(1, 0)$, O 为坐标原点. 若点 C 在直线 OA 上, 且 BC 与 OA 垂直, 则点 C 的坐标是 ()
 A. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ B. $(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$ C. $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- (2018·北京模拟) 已知过两点 $A(-1, 1)$, $B(4, a)$ 的直线斜率为 1, 那么 a 的值是 ()
 A. -6 B. -4 C. 4 D. 6
- (2018·湖北模拟) 若直线 $l_1: 2x + (m+1)y + 4 = 0$ 与直线 $l_2: mx + 3y - 2 = 0$ 平行, 则 m 的值为 ()
 A. -2 B. -3 C. 2 和 -3 D. -2 和 -3
- (2019·九江二模) 过点 $P(-2, 2)$ 作直线 l , 使直线 l 与两坐标轴在第二象限内围成的三角形面积为 8, 这样的直线 l 一共有 ()
 A. 3 条 B. 2 条 C. 1 条 D. 0 条
- (2018·黄山一模) 已知点 A 在直线 $x + 2y - 1 = 0$ 上, 点 B 在直线 $x + 2y + 3 = 0$ 上, 线段 AB 的中点为 $P(x_0, y_0)$, 且满足 $y_0 > x_0 + 2$, 则 $\frac{y_0}{x_0}$ 的取值范围为 ()
 A. $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{5})$ B. $(-\infty, -\frac{1}{5}]$ C. $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}]$ D. $(-\frac{1}{2}, 0)$
- (2018·漳州模拟) 过点 $M(-3, 2)$, 且与直线 $x + 2y - 9 = 0$ 平行的直线方程是 ()
 A. $2x - y + 8 = 0$ B. $x - 2y + 7 = 0$ C. $x + 2y + 4 = 0$ D. $x + 2y - 1 = 0$
- 已知直线 $l_1: (m-1)x + y + 2 = 0$, $l_2: 8x + (m+1)y + (m-1) = 0$, 且 $l_1 \parallel l_2$, 则 $m =$ ()
 A. $\frac{7}{9}$ B. ± 3 C. 3 D. -3
- (2019·青岛模拟) 直线 $l_1: (a-1)x + y - 1 = 0$ 和 $l_2: 3x + ay + 2 = 0$ 垂直, 则实数 a 的值为 ()
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{4}$
- (2019·潍坊二模) 已知两点 $M(-1, 0)$, $N(1, 0)$, 若直线 $y = k(x-2)$ 上存在点 P , 使得 $PM \perp PN$, 则实数 k 的取值范围是 ()
 A. $[-\frac{1}{3}, 0) \cup (0, \frac{1}{3}]$ B. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ C. $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ D. $[-5, 5]$

第四章 圆锥曲线

16. (2018·陕西模拟) 数学家欧拉在 1765 年提出定理: 三角形的外心、重心、垂心依次位于同一直线上, 且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半, 这条直线被后人称之为三角形的欧拉线. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(2, 0)$, $B(0, 4)$, 且 $AC = BC$, 则 $\triangle ABC$ 的欧拉线的方程为 ()
- A. $x + 2y + 3 = 0$ B. $2x + y + 3 = 0$ C. $x - 2y + 3 = 0$ D. $2x - y + 3 = 0$
17. (2015·衡阳模拟) 某同学在研究函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}$ 的性质时, 受到两点间距离公式的启发, 将 $f(x)$ 变形为 $f(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (0-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (0+1)^2}$, 则 $f(x)$ 表示 $|PA| + |PB|$ (如右图), 则 ① $f(x)$ 的图象是中心对称图形; ② $f(x)$ 的图象是轴对称图形; ③ 函数 $f(x)$ 的值域为 $[\sqrt{13}, +\infty)$; ④ 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 3)$ 上单调递减; ⑤ 方程 $f[f(x)] = 1 + \sqrt{10}$ 有两个解. 上述关于函数 $f(x)$ 的描述正确的个数为 ()
- 
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
18. (2018·顺义二模) 设 $m, n \in R$, 若直线 $l: mx + ny - 1 = 0$ 与 x 轴相交于点 A , 与 y 轴相交于点 B , 且坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\sqrt{3}$, 则 $\triangle AOB$ 的面积 S 的最小值为 ()
- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. 3 D. 4
19. 已知直线 $l_1: 3x + 4y - 2 = 0$, $l_2: mx + 2y + 1 + 2m = 0$, 当 $l_1 \parallel l_2$ 时, 两条直线的距离是 ()
- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. $\frac{3}{5}$
20. 点 $P(x, y)$ 是直线 $l: x + y + 3 = 0$ 上的动点, 点 $A(2, 1)$, 则 $|AP|$ 的最小值是 ()
- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$
21. (2018·桂林期末) 若三点 $A(2, 3)$, $B(3, 4)$, $C(a, b)$ 共线, 则有 ()
- A. $a = 3, b = -5$ B. $a - b + 1 = 0$ C. $2a - b = 3$ D. $a - 2b = 0$
22. (2015·黑龙江期末) 已知 a, b 满足 $a + 2b = 1$, 则直线 $ax + 3y + b = 0$ 必过定点 ()
- A. $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$ C. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$ D. $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2})$
23. 已知直线方程为 $(2+m)x + (1-2m)y + 4 - 3m = 0$. 这条直线恒过一定点, 这个定点坐标为 ()
- A. $(-2m, -m - 4)$ B. $(5, 1)$ C. $(-1, -2)$ D. $(2m, m + 4)$
24. (2018·招远期末) 直线 $y = 3x + 1$ 关于 y 轴对称的直线方程为 ()
- A. $y = -3x - 1$ B. $y = 3x - 1$ C. $y = -x + 1$ D. $y = -3x + 1$
25. (2018·湖北期末) 与直线 $4x - 3y + 5 = 0$ 关于 x 轴对称的直线方程为 ()
- A. $4x + 3y + 5 = 0$ B. $4x - 3y + 5 = 0$ C. $4x + 3y - 5 = 0$ D. $4x - 3y - 5 = 0$
26. (2018·尤溪期中) 点 $M(4, m)$ 关于点 $N(n, -3)$ 的对称点为 $P(6, -9)$, 则 ()
- A. $m = -3, n = 10$ B. $m = 3, n = 10$ C. $m = -3, n = 5$ D. $m = 3, n = 5$
27. (2018·景县期中) 已知点 $A(7, -4)$, $B(-5, 6)$, 则线段 AB 垂直平分线方程是 ()
- A. $6x - 5y - 1 = 0$ B. $5x + 6y + 1 = 0$ C. $6x + 5y - 1 = 0$ D. $5x - 6y - 1 = 0$
28. 不论 m 如何变化, 直线 $(m+2)x - (2m-1)y - (3m-4) = 0$ 恒过定点 ()
- A. $(1, 2)$ B. $(-1, 2)$ C. $(2, 1)$ D. $(-2, -1)$
29. 已知点 $A(1, -2)$, $B(5, 6)$ 到直线 $l: ax + y + 1 = 0$ 的距离相等, 则实数 a 的值等于 ()
- A. -2 或 1 B. 1 或 2 C. -2 或 -1 D. -1 或 2
30. 点 P 在直线 $l: x - y - 1 = 0$ 上运动, $A(4, 1)$, $B(2, 0)$, 则 $|PA| + |PB|$ 的最小值是 ()
- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{6}$ C. 3 D. 4
31. 已知点 $A(-3, 5)$, $B(0, 3)$, 试在直线 $y = x + 1$ 上找一点 P , 使 $|PA| + |PB|$ 最小, 并求出最小值.
32. 一条光线 $3x - y - 12 = 0$, 被直线 $l: x + y = 1$ 反射, 求反射光线的方程.
33. 求直线 $2x - 3y + 1 = 0$ 关于直线 $y = x + 1$ 对称的直线方程.