# 专题 6 极点与极线探秘

## 第一讲 极点和极线的定义及极点与极线的作图

作为射线几何学的奠基人之一的法国数学家笛沙格（G．Desargues，1591-1661），他于 1639 年在《椭圆曲线论稿》中正式阐述了极点与极线的定义．

### 一 极点和极线的定义（代数定义）

已知圆锥曲线Γ：$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$，则称点 $P$（$x_0,y_0$）和直线 $l$：$Ax_0x+Cy_0y+D(x_0+x)+E(y_0+y)+F=0$ 是圆锥曲线Γ的一对极点和极线．

以上代数定义表面，在圆锥曲线方程中，以 $x_0x$ 替换 $x^2$，以 $\frac{x_0+x}{2}$ 替换 $x$（另一变量 $y$ 也是如此），即可得到点 $P(x_0,y_0)$ 的极线方程．

特别的：

（1）对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a\neq b)$，与点 $P(x_0,y_0)$ 对应的极线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$；当 $P(x_0,y_0)$ 为其焦点 $F(c,0)$ 时，极线 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ 变成 $x=\frac{a^2}{c}$，恰是椭圆的右准线．

（2）对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，与点 $P(x_0,y_0)$ 对应的极线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$；当 $P(x_0,y_0)$ 为其焦点 $F(c,0)$ 时，极线 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ 变成 $x=\frac{a^2}{c}$，恰是双曲线的右准线．

（3）对于抛物线 $y=2px^2$，与点 $P(x_0,y_0)$ 对应的极线方程为 $y_0y=p(x_0+x)$．当 $P(x_0,y_0)$ 为其焦点 $F(\frac{p}{2},0)$ 时，极线 $y_0y=p(x_0+x)$ 变为 $x=-\frac{p}{2}$，恰为抛物线的准线．

### 二 极点与极线的作图（几何意义）

如图 1，$P$ 是不在圆锥曲线上的点，过点 $P$ 引两条割线依次交圆锥曲线与四点 $E$，$F$，$G$，$H$，连接 $EH$，$FG$ 交于点 $N$，连接 $EG$，$FH$ 交于点 $M$，则直线 $MN$ 为点 $P$ 对应的极线．

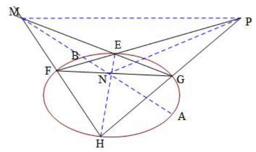



图 1

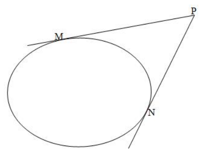



图 2

如图 2，同理可知 $PM$ 为点 $N$ 对应的极线，$PN$ 是点 $M$ 对应的极线．△$MNP$ 称为自极三点形．若连接 $MN$ 交圆锥曲线与点 $A$，$B$，则 $PA$，$PB$ 恰为圆锥曲线的两条切线．

## 第二讲 极点与极线的性质

**定理 1** （1）当点 $P$ 在圆锥曲线Γ上时，其极线时曲线Γ在点 $P$ 点处的切线；

（2）当点 $P$ 在Γ外时，其极线 $l$ 时曲线Γ从点 $P$ 所引两条切线的切点所确定的直线（即切点弦所在的线）；

（3）当点 $P$ 在Γ内时，其极线 $l$ 时曲线Γ过点 $P$ 的任一割线两端点处的切线交点的轨迹．

证明（1）假设同以上代数定义，对Γ：$Ax_0x+Cy_0y+2D(x_0+x)+2E(y_0+y)+F=0$ 的方程，两边对 $x$ 求导得 $2Ax+2cyy'+2D+2Ey'=0$，解得 $y'=-\frac{Ax+D}{Cx+E}$，于是曲线Γ在 $P$ 点处的切线斜率 $k=-\frac{Ax+D}{Cy+E}$，故切线 $l$ 的为 $y-y_0=-\frac{Ax_0+D}{Cy_0+E}(x-x_0)$，化简得，$Ax_0x+Cy_0y-Ax_0^2-Cy_0^2+Dx+Ey-Dx_0-Ey_0=0$，又点 $P(x_0,y_0)$ 在曲线Γ上，故有 $Ax_0^2+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F=0$，从中解出 $Ax_0^2+Cy_0^2$，然后代入前式可得曲线Γ在 $P$ 点处的切线 $l$ 的方程为 $Ax_0x+Cy_0y+D(x_0+x)+E(y_0+y)+F=0$．

根据代数定义，此方程恰为点 $P(x_0,y_0)$ 的极线方程．

（2）设过点 $P$ 所作的两条切线的切点分别为 $M$（$x_1$，$y_1$），$N(x_2,y_2)$，如图 2，则由（1）知，在点 $M$，$N$ 处的切线方程分别为 $Ax_1x+Cy_1y+D(x_1+x)+E(y_1+y)+F=0$ 和 $Ax_2x+Cy_2y+D(x_2+x)+E(y_2+y)+F=0$，又点 $P$ 在切线上，所以有

$Ax_0x_1+Cy_0y_1+D(x_0+x_1)+E(y_0+y_1)+F=0$， $Ax_0x_2+Cy_0y_2+D(x_0+x_2)+E(y_0+y_2)+F=0$，

观察这两个式子，可发现点 $M$（$x_1$，$y_1$），$N(x_2，y_2)$ 都在直线 $Ax_0x+Cy_0y+D(x_0+x)+E(y_0+y)+F=0$ 上，又两点确定一条直线，故切点弦 $MN$ 所在的直线方程为 $Ax_0x+Cy_0y+D(x_0+x)+E(y_0+y)+F=0$．根据代数定义，此方程恰为点 $P$ 对应的极线方程．

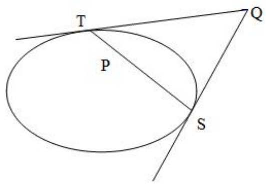



图 3

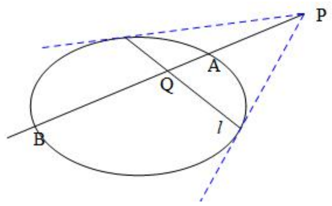



图 4

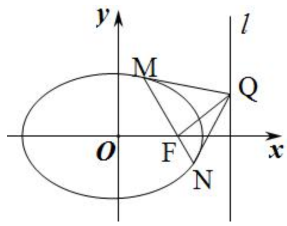



图 5

（3）设曲线 Γ 经过 $P(x_0,y_0)$ 点的弦的两端分别为 $S$（$x_1$，$y_1$），$T(x_2，y_2)$,如图 3，则由（1）知，曲线在这两处的切线方程 $Ax_1x+Cy_1y+D(x_1+x)+E(y_1+y)+F=0$， $Ax_2x+Cy_2y+D(x_2+x)+E(y_2+y)+F=0$，

设两切线的交点为 $Q(m，n)$，则有 $Ax_1m+Cy_1n+D(x_1+m)+E(y_1+n)+F=0$，

$$Ax_2m+Cy_2n+D(x_2+m)+E(y_2+n)+F=0，$$

观察这两个式子，可发现点 $S$（$x_1$，$y_1$），$T(x_2，y_2)$ 都在直线 $Axm+Cyn+D(x+m)+E(y+n)+F=0$ 上，又两点确定一条直线，故直线 $ST$ 的方程为 $Ax_1m+Cy_1n+D(x_1+m)+E(y_1+n)+F=0$．

又直线 $ST$ 过点 $P(x_0,y_0)$，所以 $Ax_0m+Cy_0n+D(x_0+m)+E(y_0+n)+F=0$ 这意味着点 $Q(m，n)$ 在直线 $Ax_0m+Cy_0n+D(x_0+m)+E(y_0+n)+F=0$．

所以，两切线的交点的轨迹方程式 $Ax_0x+Cy_0y+D(x_0+x)+E(y_0+y)+F=0$．

根据上述几何定义个性质可知，当曲线为圆或椭圆时，若极点在曲线外，则极线与曲线相交有两个共同点；若极点在曲线内，则极线与曲线相离没有公共点；若极线与曲线相交，则极点在曲线外；若极线与曲线相离，则极点在曲线内．

若过极线 $l$ 上一点 $Q$ 可作 Γ 的两条切线，$M$，$N$ 为切点，则直线 $MN$ 必过极点 $P$．

**定理2（配极原则）**点 $P$ 关于圆锥曲线 Γ 的极线 $p$ 过点 $Q$ $\Leftrightarrow$ 点 $Q$ 关于 Γ 的极线 $q$ 经过点 $P$；

直线 $p$ 关于 Γ 的极点 $P$ 在直线 $q$ 上 $\Leftrightarrow$ 直线 $q$ 关于 Γ 的极点 $Q$ 在直线 $p$．

由此可知，共线点的极线必共点；共点线的极点必共线．

**定理3** 如图 4，设点 $P$ 关于圆锥曲线 Γ 的极线为 $l$，过点 $P$ 任作一割线交 Γ 于 $A$，$B$ 两点，交 $l$ 于点 $Q$，则 $\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QB}$①．反之，若①式成立，则称点 $P$，$Q$ 调和分割线段 $AB$，或称点 $P$ 与点 $Q$ 关于 Γ 调和共轭．

点 $P$ 关于圆锥曲线 Γ 的调和共轭点的轨迹是一条直线，这条直线就是点 $P$ 的极线．

定理 2 和定理 3 的证明，在高等解析几何教材中都能找到，在此均省略．

**定理 4**:如图 5，设圆锥曲线 Γ 的一个焦点为 $F$，与 $F$ 相应的准线为 $l$．

（1）若过点 $F$ 的直线与圆锥曲线 Γ 相交于 $M,N$ 两点,则 Γ 在 $M,N$ 两点处的切线的交点 $Q$ 在准线 $l$ 上，且 $FQ\perp MN$；

（2）若过准线 $l$ 上一点 $Q$ 作圆锥曲线 Γ 的两条切线，切点分别为 $M,N$，则直线 $MN$ 过焦点 $F$，且 $FQ\perp MN$；

（3）若过焦点 $F$ 的直线与圆锥曲线 Γ 相交于 $M,N$ 两点，过 $F$ 作 $FQ\perp MN$ 交准线 $l$ 于 $Q$，则连线 $QM,QN$ 是圆锥曲线 Γ 的两条切线．

注意：极点与极线一般在小题中直接用很爽，但是在大题中，由于不在中学的课本范围内，基本上都无法直接使用，那么解答题中我们只给出思路，很多书写过程还是参考之后提到的切线部分的阿基米德三角形写法，曲线系写法或者定比点差写法．

## 考点 1 求切线和切点弦方程问题

【例 1】（2013•山东）过点 $(3,1)$ 作圆 $(x^2-1)^2+y^2=1$ 的两条切线，切点分别为 $A$、$B$ 则直线 $AB$ 的方程为

（ ）

A．$2x+y-3=0$　　B．$2x-y-3=0$　　C．$4x-y-3=0$　　D．$4x+y-3=0$

【解析】切点弦 $AB$ 所在的直线就是点 $(3,1)$ 对应的极线，其方程为 $(3-1)(x-1)+1\times y=1$，化简即得 $2x+y-3=0$．故选 A．

【例 2】（2019•武汉模拟）过椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 内一点 $M(3,2)$，做直线 $AB$ 与椭圆交于点 $A$，$B$，作直线 $CD$ 与椭圆交于点 $C$，$D$，过 $A$，$B$ 分别作椭圆的切线交于点 $P$，过 $C$，$D$ 分别作椭圆的切线交于点 $Q$，求 $PQ$ 所在的直线方程．

【解析】本题实质就是求椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 内一点 $M(3,2)$ 对应的极线方程，结果为 $\frac{3x}{25}+\frac{2y}{9}=1$．

## 考点 2 讨论直线与圆锥曲线的位置关系

【例 3】（2010•湖北）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的两个焦点 $F_1$，$F_2$，点 $P(x_0,y_0)$ 满足 $0<\frac{x_0^2}{2}+y_0^2<1$，则 $|PF_1|+|PF_2|$ 的取值范围为_________，直线 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$ 与椭圆 $C$ 的公共点个数是_________．

【解析】由 $0<\frac{x_0^2}{2}+y_0^2<1$ 知点 $P$ 在椭圆内且不是中心，由椭圆定义得 $|F_1F_2|\le|PF_1|+|PF_2|<2a$，即 $2\le|PF_1|+|PF_2|<2\sqrt{2}$．由题意知，点 $P(x_0,y_0)$ 和直线 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$ 恰好是椭圆的一对极点和极线，因为点 $P$ 在椭圆内，所以极线与椭圆相离，故极线与椭圆公共点的个数为零．

【例 4】（2009•安徽）已知点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$x_0=a\cos\beta$，$y_0=b\sin\beta$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，直线 $l_2$ 与直线 $l_1:\frac{x_0x}{a_2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ 垂直，$O$ 为坐标原点，直线 $OP$ 的倾斜角为 $\alpha$，直线 $l_2$ 的倾斜角为 $\gamma$．证明：点 $P$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与直线 $l_1$ 的唯一交点．

【方法】显然点 $P(x_0,y_0)$ 与直线 $l_1$ 是椭圆的一对极点极线，易知点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆上所以直线 $l_1$ 与椭圆相切与点 $P$，即点 $P$ 是椭圆 $l_1:\frac{x_0x}{a_2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ 与直线 $l_1$ 唯一交点．

## 考点 3 探究最值问题

【例 5】（2018•云南月考）已知椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，过直线 $l:x=4$ 上任意一点 $Q$，作椭圆 $C$ 的两条切线，切点分别为 $A$，$B$，则原点到直线 $AB$ 距离的最大值为___________．

【解析】由题设，切点弦 $AB$ 是点 $Q$ 对应的极线，设点 $Q$ 的坐标为 $(4,y_0)$，则可知直线 $AB$ 的方程为 $\frac{4x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1$，即 $x+\frac{y_0y}{3}=1$，显然直线 $AB$ 过焦点 $(1,0)$，所以原点到直线 $AB$ 的距离的最大值为 1．

【例 6】（2017•清华领军计划第 27 题）已知椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，$P$ 为其右准线上一点，过点 $P$ 向椭圆作切线，切点分别为 $A$，$B$，椭圆的左焦点 $F$．则（ ）

A．$|AB|$ 的最小值为 1　　B．$|AB|$ 的最小值为 $\sqrt{3}$

C．$\triangle FAB$ 的周长为定值　　D．$\triangle FAB$ 的面积为定值

【解析】首先，注意到点 $P$ 为其右准线上一点，则点 $P$ 对应的极线（即切线 $PA,PB$）经过右焦点，且点弦 $|AB|$ 的最小值为通经 $\frac{2b^2}{a^2}=1$．设椭圆的右焦点为 $F'$，根据椭圆定义，可知 $\triangle FAB$ 的周长为 $|AF|+|AF'|+|BF|+|BF'|=4a=8$ 为定值．故选 A，C．

## 考点 4 证明直线过定点

【例 7】（2018•河南预赛）在直线 $x=3$ 上任取一点 $P$，过点 $P$ 向圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 作两条切线，切点分别为 $A$，$B$，则直线 $AB$ 经过一个定点，该定点的坐标为__________.

【解析】设点 $P$ 的坐标为 $(3,t)$，因为点 $P$ 对应的极线为直线 $AB$，其方程为 $3x+(t-2)(y-2)=4$，整理得（$y-2$）$t+(3x-2y)=0$，令 $y+2=0,3x-2y=0$，可见直线 $AB$ 过定点（$\frac{4}{3},2$）.

【例 8】（2017•广东预赛）设直线 $l:y=x+b$ 与椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 不相交．过直线 $l$ 上点 $P$ 作椭圆 $C$ 的切线 $PM,PN$，切点分别 $M$，$N$，连接 $MN$．当点 $P$ 在直线 $l$ 上运动时，证明：直线 $MN$ 恒过定点 $Q$．

【解析】设点 $P(x_0,y_0)$，则点 $P$ 对应的极线为直线 $MN$，其方程为 $\frac{x_0x}{25}+\frac{y_0y}{9}=1$①．当点 $P$ 在直线 $l$ 上运动时，可理解为 $x_0$ 取遍一切实数，相应的 $y_0$ 为 $y_0=x_0+b$．代入①式消去 $y_0$ 的 $\frac{x_0x}{25}+\frac{(x_0+b)y}{9}-1=0$．②

②式对一切 $x_0\in R$ 恒成立，变形可得 $x_0\left(\frac{x}{25}+\frac{y}{9}\right)+\left(\frac{b}{9}y-1\right)=0$，对一切 $x_0\in R$ 恒成立．$\therefore\begin{cases}\frac{x}{25}+\frac{y}{9}=0\\ \frac{b}{9}y-1=0\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}x=-\frac{25}{b}\\ y=\frac{9}{b}\end{cases}$

【例 9】（2018•十校联考）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 4，离心率为 $\frac{1}{2}$，点 $P$ 是椭圆上异于顶点的任意一点，过点 $P$ 做椭圆的切线 $l$，交 $y$ 轴于点 $A$，直线 $l'$ 过点 $P$ 且垂直于 $l$，交 $y$ 轴于点 $B$．

（1）求椭圆的方程；

（2）试判断以 $AB$ 为直径的圆能否过定点？若能，求出定点坐标；若不能，请说明理由．

【解析】（1）因为 $2a=4$，$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $a=2,c=1,b=\sqrt{3}$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（2）设点 $p(x_0,y_0)(x_0\neq0,y_0\neq0)$，则直线 $l$ 的方程为 $\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1$，所以点 $A$ 的坐标为 $(0,\frac{3}{y_0})$．

又直线 $l'$ 的方程为 $y-y_0=\frac{4y_0}{3x_0}(x-x_0)$，令 $x=0$，得点 $B$ 坐标为 $(0,-\frac{y_0}{3})$，所以以 $AB$ 为直径的圆的方程为 $x\cdot x+(y-\frac{3}{y_0})\cdot(y+\frac{y_0}{3})=0$，整理得 $x^2+y^2+(\frac{y_0}{3}-\frac{3}{y_0})\cdot(y+\frac{y_0}{3})=0$，令 $y=0$，得 $x=\pm1$，所以以 $AB$ 为直

## 考点 5 证明动点在定直线上

【例 10】（2015•一模）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与 $y$ 轴的交点为 $A$，$B$（点 $A$ 位于点 $B$ 的上方），$F$ 为左焦点，原点 $O$ 到直线 $FA$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}b$．

（1）求椭圆 $C$ 的离心率；

（2）设 $b=2$，直线 $y=kx+4$ 与椭圆 $C$ 交于不同的两点 $M$，$N$，求证：直线 $BM$ 与直线 $AN$ 的交点 $G$ 在定直线上．

【解析】（1）由题意设 $F$ 的坐标为 $(-c,0)$，依题意有 $bc=\frac{\sqrt{2}}{2}ab$，$\therefore$ 椭圆 $C$ 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

（2）若 $b=2$，由（1）得 $a=2\sqrt{2}$，$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$．设直线 $MN$（即直线 $y=kx+4$）与直线 $AB$（$y$ 轴）的交点为 $S(0,4)$，直线 $AM$ 与直线 $BN$ 的交点为 $R$，则 $G$，$R$，$S$ 构成椭圆 $C$ 的自极三点形，点 $G$ 一定在点 $S(0,4)$ 对应的极线 $GR$ 上，其方程为 $\frac{0\times x}{8}+\frac{4\times y}{4}=1$，即 $y=1$，就是说直线 $BM$ 与直线 $AN$ 的交点 $G$ 在定直线上．

【例 11】(2018•太原模拟)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 $A_1$，$A_2$，右焦点为 $F_2(1,0)$，点 $B(1,\frac{3}{2})$ 在椭圆 $C$ 上.

(1) 求椭圆方程;

(2) 若直线 $l:y=k(x-4)(k\neq 0)$ 与椭圆 $C$ 交于 $M$，$N$ 两点，已知直线 $A_1M$ 与 $A_2N$ 相交于点 $G$，证明：点 $G$ 在定直线上，并求出定直线的方程.

【解析】(1) $F_2(1,0)$，$\therefore c=1$，由题目已知条件知 $\begin{cases} a^2=1+b^2 \\ \frac{1}{a^2}+\frac{\frac{9}{4}}{b^2}=1 \end{cases}$，$\therefore a=2,b=\sqrt{3}$，$\therefore$ 椭圆的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2) 法一：由椭圆对称性知 $G$ 在 $x=x_0$ 上，假设直线 $l$ 过椭圆上顶点，则 $M(0,\sqrt{3})$，

$\therefore k=-\frac{\sqrt{3}}{4},N(\frac{8}{5},\frac{3\sqrt{3}}{5})$，$l_{A_1M}:y=\frac{\sqrt{3}}{2}(x+2),l_{A_2N}:y=-\frac{3\sqrt{3}}{2}(x-2)$，$\therefore G(1,\frac{3\sqrt{3}}{2})$，所以 $G$ 在定直线 $x=1$ 上.

当 $M$ 不在椭圆顶点时，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$\begin{cases} y=k(x-4) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，整理得 $(3+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{32k^2}{3+4k^2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{64k^2-12}{3+4k^2}$，$l_{A_1M}:y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2),l_{A_2N}:y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

当 $x=1$ 时，$\frac{3y_1}{x_1+2}=\frac{-y_2}{x_2-2}$，得 $2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8=0$，所以 $2\frac{64k^2-12}{3+4k^2}-5\frac{32k^2}{3+4k^2}+\frac{8(3+4k^2)}{3+4k^2}=0$，显然成立，所以 $G$ 在定直线 $x=1$ 上.

法二：曲线系法，设 $l_{A_1M}:x=k_1y-2$，$l_{A_2N}$：$x=k_2y+2$，$l_{MN}:y=k(x-4)$，$l_{MN}:y=0$

以 $A_1MA_2N$ 四点曲线系方程为 $[(x-k_1y+2)][(x-k_2y-2)]+uy[y-kx+4k]=\lambda(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-1)$

$xy$ 的系数为 0，$-k_1-k_2-ku=0$；$y$ 的系数为 0，$2k_1-2k_2+4ku=0$；

$l_{A_1M}:x=k_1y-2$，$l_{A_2N}$：$x=k_2y+2$ 相加可以得到，$2x=k_1y+k_2y$，相减可以得到 $k_1y-k_2y-4=0$

联立可得 $x=1$，即点 $Q$ 在定直线 $x=1$ 上.

注　由于直线 $l:y=k(x-4)(k\neq 0)$ 经过顶点 $P(4,0)$，设直线 $A_1N$ 与 $A_2M$ 相交于点 $H$，则直线 $GH$ 在点 $P(4,0)$ 所对应的极线上，点 $P(4,0)$ 对应的极线方程 $\frac{4x}{4}+\frac{0\times y}{3}=1$，即 $x=1$ 所一点 $G$ 在顶点 $x=1$ 上.

## 达标训练

1. (2018•兰州月考) 过点 $P(-3,4)$ 作圆 $x^2+y^2=4$ 的两条切线，切点分别为 $A,B$，则 $AB$ 所在直线的方程为（　　）

A. $3x+4y-7=0$　　B. $3x-4y+4=0$　　C. $3x-4y+25=0$　　D. $3x-4y=0$

2. (2018•蚌埠二模) 已知 $A(4,3)$，$F$ 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点，过点 $A$ 的直线与椭圆在 $x$ 轴上方相切与于点 $B$，则直线 $BF$ 的斜率为（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. 1　　D. $-\frac{4}{3}$

3. (2014•辽宁) 已知点 $A(-2,3)$ 在抛物线 $C$：$y^2=2px$ 的准线上，过点 $A$ 的直线与 $C$ 在第一象限相切与点 $B$，记 $C$ 得焦点 $F$，则直线 $BF$ 的斜率为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

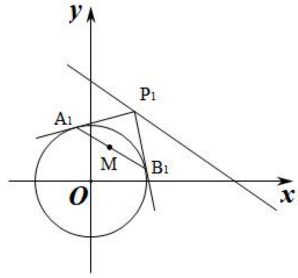
4.（2014•内蒙古自治区预赛）若过点 $P(1,3)$ 作圆 $x^2+y^2=9$ 的切线，则两点所在直线方程为__________.

5.（2018•深圳期末）对于抛物线 $C:y_2=4x$，我们称满足 $y_0^2<4x_0$ 的点 $(x_0,y_0)$ 在抛物线的内部，则直线 $l:y_0y=2(x+x_0)$ 与抛物线 $C$（　　）

A．恰有 1 个公共点　　　　B．恰有 2 个公共点

C．可能有 1 个公共也可能有 2 个公共点　　　　D．没有公共点

6.（2018•甘肃预赛）已知点 $P$ 为 $x+2y=4$ 上一动点. 过点 $P$ 作椭圆 $x^2+4y^2=4$ 的两条切线，切点分别 $A$、$B$，当点 $P$ 运动时，直线 $AB$ 过定点，该定点的坐标是__________.




7.（2011•希望杯）从直线 $l:\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{4}=1$ 上的任意一点 $P$ 作圆 $O$：$x^2+y^2=8$ 的两条切线，切点为 $A$、$B$，则弦 $AB$ 长度的最小值为__________.

8.（2017•广西预赛）已知抛物线 $C:y=\dfrac{1}{2}x^2$ 与直线 $l:y=kx-1$ 没有公共点．设点 $P$ 为直线 $l$ 上的动点，过点 $P$ 作抛物线 $C$ 的两条切线，$A$，$B$ 为切点．证明：直线 $AB$ 恒过定点 $Q$.

9. 设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，点 $M(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，过 $M$ 点的动直线与椭圆交于点 $A$、$B$，点 $A$、$B$ 处的切线交于点 $N$．求证：点 $N$ 的轨迹为一条定直线.

10.（2011•福建卷）已知直线 $l:y=x+m$，$m\in R$.

（1）若以点 $M(2,0)$ 为圆心的圆与直线 $l$ 相切于点 $P$，且点 $P$ 在 $y$ 轴上，求该圆的方程；

（2）若直线 $l$ 关于 $x$ 轴对称的直线为 $l'$，问直线 $l'$ 与抛物线 $C:x^2=4y$ 是否相切？说明理由.

11.（2010•全国 1 卷）已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 $F$，过点 $K(-1,0)$ 的直线 $l$ 与 $C$ 相交于 $A$、$B$ 两点，点 $A$ 关于 $x$ 轴的对称点为 $D$．证明：点 $F$ 在直线 $BD$ 上.

12.（2010•江苏）在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左、右顶点为 $A$、$B$，右焦点为 $F$．设过点 $T(t,m)$ 的直线 $TA$、$TB$ 与椭圆分别交于点 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，其中 $m>0$，$y_1>0$，$y_2<0$.

（1）设动点 $P$ 满足 $PF^2-PB^2=4$，求点 $P$ 的轨迹；

（2）设 $x_1=2$，$x_2=\dfrac{1}{3}$，求点 $T$ 的坐标；

（3）设 $t=9$，求证：直线 $MN$ 必过 $x$ 轴上的一定点（其坐标与 $m$ 无关）.

13.（2018•咸阳模拟）已知 $A(-2,0)$, $B(2,0)$ ,点 $C$ 是动点，且直线 $AC$ 和直线 $BC$ 的斜率之积为 $-\dfrac{3}{4}$.

（1）求动点 $C$ 的轨迹方程；

（2）设至直线 $l$ 与（1）中轨迹相切于点 $P$ ,与直线 $x=4$ 相较于点 $Q$ ,判断以 $PQ$ 为直径的圆是否过 $x$ 轴上一定点.

14. 凸四边形 $ABCD$ 的四个顶点都在椭圆 $C$:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，其中 $A,B$ 是椭圆的左右顶点，设直线 $CD$ 与 $x$ 轴交于 $M$ ,对角线 $AC$ 与 $BD$ 相交于点 $N$．若 $O$ 为坐标原点，求证：$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=a^2$.

15.（2011•四川）椭圆有两顶点 $A(-1,0)$、$B(1,0)$，过其焦点 $F(0,1)$ 的直线 $l$ 与椭圆交于 $C$、$D$ 两点，并与 $x$ 轴交于点 $P$．直线 $AC$ 与直线 $BD$ 交于点 $Q$.

（1）当 $|CD|=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ 时，求直线 $l$ 的方程；

（2）当点 $P$ 异于 $A$、$B$ 两点时，求证：$\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ}$ 为定值.

16.（2009•浙江）已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 上一点 $A(m,4)$ 到其焦点的距离为 $\dfrac{17}{4}$.

（1）求 $p$ 与 $m$ 的值；

（2）设抛物线 $C$ 上一点 $p$ 的横坐标为 $t(t>0)$，过 $p$ 的直线交 $C$ 于另一点 $Q$，交 $x$ 轴于 $M$ 点，过点 $Q$ 作 $PQ$ 的垂线交 $C$ 于另一点 $N$．若 $MN$ 是 $C$ 的切线，求 $t$ 的最小值.

17.（2018•深圳二模）已知实数 $P>0$ ,且过点 $M(0,-P^2)$ 的直线 $l$ 与曲线 $C$：$x^2=2py$ 交于 $A,B$ 两点.

（1）设 $O$ 为坐标原点，直线 $OA,OB$ 的斜率分别为 $k_1,k_2$，若 $k_1k_2=1$，求 $p$ 的值；

（2）设直线 $MT_1,MT_2$ 与曲线 $C$ 分别相切于点 $T_1,T_2$，点 $N$ 为直线 $T_1,T_2$ 与弦 $AB$ 的交点，且 $\overrightarrow{MA}=\lambda\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{MB}=\mu\overrightarrow{MN}$ ,证明：$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$ 为定值.

18.（2008•安徽）设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $M(\sqrt{2},1)$，且左焦点为 $F_1(-\sqrt{2},0)$ .

（1）求椭圆 $C$ 的方程；

（2）当过点 $P(4,1)$ 的动直线 $l$ 与椭圆 $C$ 相交于两不同点 $A$，$B$ 时，在线段 $AB$ 上取点 $Q$，满足 $|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{AQ}|\cdot|\overrightarrow{PB}|$，证明：点 $Q$ 总在某定直线上.

19.（2017•徐汇诊断）$A,B$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 长轴的两个端点，$M,N$ 是椭圆上与 $A,B$ 均不重合的相异两点，设直线 $AM,BN,AN$ 的斜率分别是 $k_1,k_2,k_3$ .

（1）求 $k_2\cdot k_3$ 的值；

（2）若直线 $MN$ 过点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，求证：$k_1\cdot k_3=-\frac{1}{6}$；

（3）设直线 $MN$ 与 $x$ 轴的交点为 $(t,0)$（$t$ 为常数且 $t\neq 0$），试探究直线 $AM$ 与直线 $BN$ 的交点 $Q$ 是否落在某条定直线上？若是，请求出该定直线的方程；若不是，请说明理由.

20.（2014•华约自主招生）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与圆 $x^2+y^2=b^2$，过椭圆上一点 $M$ 作圆的两条切线，切点分别为 $P$，$Q$，连结 $PQ$ 分别与 $x$ 轴，$y$ 轴交于点 $E$，$F$，求△$EOF$ 面积的最小值.