专题 7 抛物线切线与阿基米德三角形

第一讲 抛物线切线方程及性质

设在抛物线 $x^2=2py$ 上任意一点 $A(x_0,y_0)$ 的切线方程为：$xx_0=p(y+y_0)$

证明：$\because$ 点 $A(x_0,y_0)$ 在抛物线上 $\therefore x_0{}^2=2py_0$；又 $\because x^2=2py \therefore y=\dfrac{x^2}{2p}$ 求导得 $k=y'=\dfrac{2x}{2p}=\dfrac{x}{p}$；

$\therefore$ 在点 $A(x_0,y_0)$ 的切线方程为：$y-y_0=\dfrac{x_0}{p}(x-x_0)$ 即 $py-py_0=xx_0-x_0{}^2 \Rightarrow xx_0=p(y+y_0)$

同理，在抛物线 $y^2=2px$ 上任意一点 $A(x_0,y_0)$ 的切线方程为：$yy_0=p(x+x_0)$

证明：$\because$ 点 $A(x_0,y_0)$ 在抛物线上 $\therefore y_0{}^2=2px_0$；又 $\because y^2=2px \therefore x=\dfrac{y^2}{2p}$ 对 y 求导得 $k=x'=\dfrac{2y}{2p}=\dfrac{y}{p}$；

$\therefore$ 在点 $A(x_0,y_0)$ 的切线方程为：$x-x_0=\dfrac{y_0}{p}(y-y_0)$ 即 $px-px_0=yy_0-y_0{}^2 \Rightarrow yy_0=p(x+x_0)$

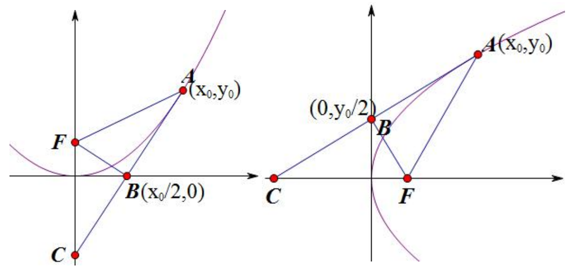
定理：在抛物线 $x^2=2py$ 上任意一点 $A(x_0,y_0)$ 的切线与 x 轴的交点为 B，则 $FB\perp AB$．（图左）

在抛物线 $y^2=2px$ 上任意一点 $A(x_0,y_0)$ 的切线与 y 轴的交点为 B，则 $FB\perp AB$．（图右）

证明：将 $y=0$ 代入点 A 处的切线方程 $xx_0=p(y+y_0)$

得：$xx_0=py_0 \Rightarrow x=\dfrac{py_0}{x_0}=\dfrac{x_0}{2}$；

故 B 为 AC 中点，又 $|FC|=\dfrac{p}{2}+y_0=|AF|$，故 $\triangle AFC$ 为等腰三角形，故 $FB\perp AB$．



同理可证，在图右中 $\triangle AFC$ 为等腰三角形，$FB\perp AB$

【例 1】点 $M(2,1)$ 是抛物线 $x^2=2py$ 上的点，则以点 M 为切点的抛物线的切线方程为________.

【解析】将点 $M(2,1)$ 代入抛物线得：$p=2$，故以点 M 为切点的切线方程为 $2x=2(y+1)$，即 $x-y-1=0$

【例 2】过点 $A(0,2)$ 且和抛物线 C：$y^2=6x$ 相切的直线 l 方程为________.

【解析】设直线与抛物线切于点 $P(x_0,y_0)$，故有 $yy_0=3(x+x_0)$ 代入点 $A(0,2)$ 得：$2y_0=3x_0$，与抛物线方程联立得：$\left(\dfrac{3}{2}x_0\right)^2=6x_0 \Rightarrow \begin{cases}x_0=\dfrac{8}{3}\\ y_0=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=0\\ y_0=0\end{cases}$．故切线方程为 $3x-4y+8=0$ 或 $x=0$．

【例 3】直线 l 经过点 $(0,2)$ 且与抛物线 $y^2=8x$ 只有一个公共点，满足这样条件的直线 l 有________条.

【解析】设直线与抛物线切于点 $P(x_0,y_0)$，故有 $yy_0=4(x+x_0)$ 代入点 $(0,2)$ 得：$y_0=2x_0$，与抛物线方程联立得：$(2x_0)^2=8x_0 \Rightarrow \begin{cases}x_0=0\\ y_0=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=2\\ y_0=4\end{cases}$，故存在两条切线，还有一条直线 $y=2$ 与抛物线只有一个公共点，故答案为 3 条.

达标训练 1

1. 在曲线 $y=x^2$ 上切线的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的点的坐标为__________.

2. 过抛物线 C：$x^2=2y$ 的焦点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A、B 两点，若抛物线 C 在点 B 处的切线斜率为 1，则线段 $|AF|=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3．抛物线 $y=x^2$ 在点 $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ 处的切线的倾斜角是（　　）

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．90°

4．设曲线 $y=ax^2$ 在点 $(1,a)$ 处的切线与直线 $2x-y-6=0$ 平行，则 $a=$（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．1　　D．-1

5．函数 $y=\frac{x^2}{4}$ 在点 P（2, 1）处的切线方程为__________.

6．抛物线 $x^2=4y$ 的准线 l 与 y 轴交于点 P，若直线 l 绕点 P 以每秒 $\frac{\pi}{12}$ 弧度的角速度按逆时针方向旋转 t 秒钟后，恰与抛物线第一次相切，则 $t=$_________.

7．过点 $(2,-1)$ 引直线与抛物线 $y=x^2$ 只有一个公共点，这样的直线共有________条.

8．过点 P（3，4）作抛物线 $x^2=2y$ 的两条切线，切点分别为 A、B，则直线 AB 的斜率为__________.

9．（2014•辽宁）已知点 $A(-2,3)$ 在抛物线 C：$y^2=2px$ 的准线上，过点 A 的直线与 C 在第一象限相切于点 B，记 C 的焦点为 F，则直线 BF 的斜率为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{4}{3}$

10．已知点 A 为抛物线 C：$x^2=4y$ 上的动点（不含原点），过点 A 的切线交 x 轴于点 B，设抛物线 C 的焦点为 F，则△ABF（　　）

A．一定是直角　　B．一定是锐角　　C．一定是钝角　　D．上述三种情况都可能

11．抛物线 $x^2=\frac{1}{2}y$ 在第一象限内图象上一点 $(a_i\ ,\ 2a_i^2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标记为 a_{i+1}，其中 $i\in N^*$，若 $a_2=32$，则 $a_2+a_4+a_6$ 等于（　　）

A．64　　B．42　　C．32　　D．21

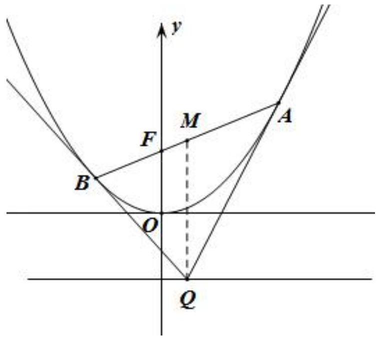
12．抛物线 $C_1:x^2=2py\ (p>0)$ 的焦点与双曲线 $C_2:\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右焦点的连线交 C_1 于第一象限内的点 M.若 C_1 在点 M 处的切线平行于 C_2 的一条渐近线，则 $p=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{16}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{8}$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

第二讲 阿基米德三角形与焦点弦

抛物线的弦与过弦的端点的两条切线所围的三角形，这个三角形又常被称为阿基米德三角形．阿基米德三角形的得名，是因为阿基米德本人最早利用逼近的思想证明 如下结论：

抛物线的弦与抛物线所围成的封闭图形的面积，等于抛物线的弦与过弦的端点的两条切线所围成的三角形面积的三分之二．下面来逐一介绍阿基米德三角形．



如图，已知 Q 是抛物线 $x^2=2py$ 准线上任意一点，过 Q 作抛物线的切线 QA、QB 分别交抛物线于 A、B 两点，M（x_0,y_0）为 AB 中点，则：

（1）$x_Q=x_0$；（2）AB 过抛物线的焦点；（3）$AQ\perp BQ$

证明：（1）∵点 $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ 在抛物线上 $\therefore x_1{}^2=2py_1;x_2{}^2=2py_2$

求导得 $y'=\dfrac{2x}{2p}=\dfrac{x}{p}$；　　（求导）

所以点 $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ 的切线方程为：$\begin{cases} y-y_1=\dfrac{x_1}{p}(x-x_1) \\ y-y_2=\dfrac{x_2}{p}(x-x_2) \end{cases}$ 即

$\begin{cases} xx_1=p(y+y_1) & ① \\ xx_2=p(y+y_2) & ② \end{cases}$　　（切线）

②－①得：$x(x_2-x_1)=p(y_2-y_1)$，　　（作差）

即 $x(x_2-x_1)=p\left(\dfrac{x_2{}^2}{2p}-\dfrac{x_1{}^2}{2p}\right)\Rightarrow x=\dfrac{x_2+x_1}{2}$ $\therefore x_Q=\dfrac{x_2+x_1}{2}=x_0$　　（求点）

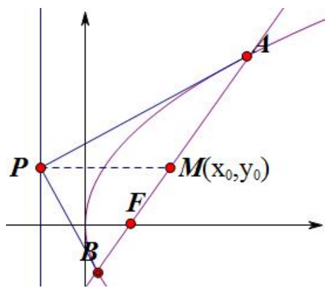
（2）将点 $Q(\dfrac{x_2+x_1}{2},-\dfrac{p}{2})$ 代入切线方程得：$\dfrac{x_2+x_1}{2}x_1=p\left(-\dfrac{p}{2}+y_1\right)\Rightarrow x_1x_2=-p^2$　　（代入）

令 AB 方程为 $y=kx+m$，代入 $x^2=2py$ 得：$x^2-2pkx-2pm=0$ $\begin{cases} x_1+x_2=2pk(3) \\ x_1\cdot x_2=-2pm(4) \end{cases}$　　（联立）

$\therefore x_1x_2=-p^2=-2pm\Rightarrow m=\dfrac{p}{2}$，所以直线 AB 过定点 $\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$ 即抛物线焦点．　　（过定点）

同理，此性质在抛物线 $y^2=2px$ 依然成立．

由于极点极线的方法是不能出现在高考解答题中的，所以在抛物线的切线问题中，上述证明过程即解答题思路，即：导→差→代→联



【例 4】已知点 $P(-3,2)$ 在抛物线 C：$y^2=2px\,(p>0)$ 的准线上，过点 P 的直线与抛物线 C 相切于 A，B 两点，则直线 AB 的斜率为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$

C．$\sqrt{3}$　　D．3

【解析】P（－3，2）在抛物线 C：$y^2=2px\,(p>0)$ 的准线上，故 p=6，抛物线 C：y^2=12x，根据秘籍中的性质（1）可知，AB 中点的纵坐标与 P 点纵坐标相等

（如图），即 $y_0=2$，且 AB 过抛物线的焦点；设 AB 方程为 $x=ky+3$，代入抛物线方程得：$y^2-12ky-36=0$，$y_1+y_2=12k\Rightarrow y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=6k=2\Rightarrow k=\dfrac{1}{3}$，故直线 AB 的斜率为 3.

【例 5】已知抛物线 $P:x^2=2py\left(p>0\right)$.

（1）若抛物线上点 $M(m,2)$ 到焦点 F 的距离为 3，求抛物线 P 的方程；

（2）设抛物线 P 的准线与 y 轴的交点为 E，过 E 作抛物线 P 的切线,求此切线方程;

【解析】（1）$|MF|=y_M+\dfrac{p}{2}=2+\dfrac{p}{2}=3\Rightarrow p=2$，故抛物线的方程为 $x^2=4y$；

(2)E 点坐标为 $\left(0,-1\right)$，设抛物线的切点为 $Q\left(x_0,y_0\right)$，求导得 $y'=\dfrac{2x}{4}=\dfrac{x}{2}$，故切线方程为 $y-y_0=\dfrac{x_0}{2}\left(x-x_0\right)$

将点 E 代入切线方程得：$-1-y_0=\dfrac{x_0}{2}\left(0-x_0\right)\Rightarrow {x_0}^2=2+2y_0\Rightarrow 2+2y_0=4y_0\Rightarrow y_0=1$，故 $x_0=\pm2$，由此可得切线方程为 $x-y-1=0$ 或 $x+y+1=0$.

达标训练 2

1．过抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 准线上任一点作抛物线的两条切线，若切点分别为 M、N，则直线 MN 过定点（　　）

A．$(0，1)$　　B．$(1，0)$　　C．$(0，-1)$　　D．$(-1，0)$

2．已知 A、B 为抛物线 $x^2=2py\left(p>0\right)$ 上两点，直线 AB 过焦点 F，A、B 在准线上的射影分别为 C、D，则① $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DF}=0$；②存在实数 λ 使得 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AO}$（点 O 为坐标原点）；③若线段 AB 的中点 P 在准线上的射影为 T，有 $\overrightarrow{FT}\cdot\overrightarrow{AB}=0$；④抛物线在 A 点的切线和在 B 点切线一定相交，并且相互垂直．其中说法正确的个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3．若过抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 的准线上一动点 P 作此抛物线的两条切线，切点分别为 $A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$；点 O 为坐标原点．则以下命题（1）直线 AB 过定点；（2）$\angle AOB$ 为钝角；（3）$\angle APB$ 可取 60°；（4）若△ABO 的面积为 $\dfrac{5}{2}$，则点 P 坐标为 $\left(\dfrac{3}{2}，-1\right)$ 或 $\left(-\dfrac{3}{2}，-1\right)$．其中正确的个数是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

4．已知抛物线 $y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点为 F，F 关于原点的对称点为 P．过 F 作 x 轴的垂线交抛物线于 M、N 两点．有下列四个命题：①△PMN 必为直角三角形；②△PMN 不一定为直角三角形；③直线 PM 必与抛物线相切；④直线 PM 不一定与抛物线相切．其中正确的命题是__________.

5．F 为抛物线 $y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点，过点 F 的直线与该抛物线交于 A、B 两点，l_1、l_2 分别是该抛物线在 A、B 两点处的切线，l_1、l_2 相交于点 C，设 $|AF|=a$，$|BF|=b$，则 $|CF|=$（　　）

A．$\sqrt{a+b}$　　B．$\dfrac{a+b}{2}$　　C．$\sqrt{a^2+b^2}$　　D．$\sqrt{ab}$

6．已知过抛物线 $x^2=4y$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A、B 两个不同的点，过 A、B 分别作抛物线的切线，且二者相交于点 C，则△ABC 的面积的最小值为________.

7．已知直线 $y=kx+1$ 与抛物线 $x^2=4y$ 相交于 A、B 两点，且该抛物线过 A、B 两点的切线交于 C，点 C 的轨迹记为 E，M、N 是 E 上不同的两点，直线 AM、BN 都与 y 轴平行，则 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=$___________.

8．过 $P(-3，2)$ 做抛物线 $y^2=12x$ 切线交抛物线于 A、B 两点，求直线 AB 斜率.

9．已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F，过焦点 F 且不平行于 x 轴的动直线 l 交抛物线于 A、B 两点，抛物线在 A、B 两点处的切线交于点 M.

（1）求证: A、M、B 三点的横坐标成等差数列;

（2）设直线 MF 交该抛物线于 C、D 两点，求四边形 $ACBD$ 面积的最小值.

10．过抛物线 $x^2=4y$ 上不同两点 A、B 分别作抛物线的切线相交于 P 点，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$.

（1）求点 P 的轨迹方程；

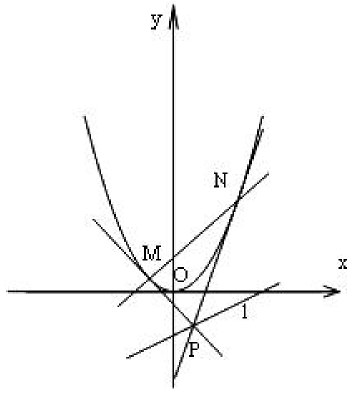
（2）已知点 $F(0，1)$，是否存在实数 λ 使得 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}+\lambda\left(\overrightarrow{FP}\right)^2=0$？若存在，求出λ的值，若不存在，请说明理由.

11．抛物线的顶点在原点，焦点在射线$x-y+1=0(x\ge 0)$上，

（1）求抛物线的标准方程；

（2）过（1）中抛物线的焦点F作动弦AB，过A、B两点分别作抛物线的切线，设其交点为M，求点M的轨迹方程．

12．已知抛物线C： $y=x^2$，直线l： $x-2y-2=0$，点P是直线l上任意一点，过点P作抛物线C的切线PM、PN，切点分别为M、N，直线PM、PN斜率分别k_1、k_2，如图所示．



（1）若$P(4，1)$，求证：$k_1+k_2=16$；

（2）若MN过抛物线的焦点，求点P的坐标．

13．设直线$y=x+2$与抛物线$y=ax^2\ (a>0)$相交于A、B两点，M是线段AB的中点，过点M作x轴的垂线交抛物线于点N.

（1）证明：抛物线在N点处的切线与AB平行；

（2）是否存在实数a，使得$NA\perp NB$？若存在，求出a的值；若不存在，请说明理由．

秒杀秘籍：第三讲 阿基米德三角形的极点极线性质

定理 1：设过点 P 与抛物线对称轴平行的直线交抛物线于 M，交切点弦于点 Q，则 Q 点平分切点弦 AB.（无论点 P 在曲线的什么位置，上述结论均成立）．且 M 处的切线平行于抛物线的切点弦．（图 1,3）

定理 2：直线 $l: y=kx+m$ 上一动点 Q 引抛物线两切线 QA，QB，则过两切点的直线 AB 必过定点 G（图 2,4）可以理解为极点和极线相互牵连；

如图 1，点 $P(x_0,y_0)$ 为抛物线 $x^2=2py$ 外任意一点，过点 P 作抛物线两条切线分别切于 A、B 两点，AB 的中点为 Q，直线 PQ 交抛物线于点 M

求证：（1）$x_0=x_G$，$y_0=-m$（m 为直线 AB 在轴上的截距）；且直线 AB 方程为 $xx_0=p(y+y_0)$；

（2）设点 M 处的切线 l，求证 $AB // l$．

【证明】（1）$\because$ 点 $A(x_1,y_1)\ B(x_2,y_2)$ 在抛物线上 $\therefore\ x_1^2=2py_1;x_2^2=2py_2$ 求导得 $y'=\dfrac{2x}{2p}=\dfrac{x}{p}$；（求导）

在点 $A(x_1,y_1)\ B(x_2,y_2)$ 的切线方程为：$\begin{cases} y-y_1=\dfrac{x_1}{p}(x-x_1) \\ y-y_2=\dfrac{x_2}{p}(x-x_2) \end{cases}$ 即 $\begin{cases} xx_1=p(y+y_1) & ① \\ xx_2=p(y+y_2) & ② \end{cases}$ （写切线方程）

②－①得：$x(x_2-x_1)=p(y_2-y_1)$，即 $x(x_2-x_1)=p\left(\dfrac{x_2^2}{2p}-\dfrac{x_1^2}{2p}\right)\Rightarrow x=\dfrac{x_2+x_1}{2}\ \therefore\ x_0=\dfrac{x_2+x_1}{2}=x_Q$（作差）

将点 $Q(\dfrac{x_2+x_1}{2},y_0)$ 代入切线方程得：$\dfrac{x_2+x_1}{2}x_1=p(y_0+y_1)\Rightarrow x_1x_2=2py_0$ （代入）

令 AB 方程为 $y=kx+m$，代入 $x^2=2py$ 得：$x^2-2pkx-2pm=0\ \therefore x_1x_2=-2pm=2py_0$ 所以直线 AB 过定点（0，$-y_0$）；故 AB 方程为 $y=\dfrac{x_0}{p}x+(-y_0)\Rightarrow xx_0=p(y+y_0)$ （联立）

（2）$x^2-2pkx-2pm=0\Rightarrow x_0=\dfrac{x_2+x_1}{2}=pk\Rightarrow k=\dfrac{x_0}{p}$，M 点坐标为 $\left(x_0,\dfrac{x_0^2}{2p}\right)$，以 M 点为切点的切线斜率为 $y'=\dfrac{2x_0}{2p}=\dfrac{x_0}{p}$，故 $AB // l$．

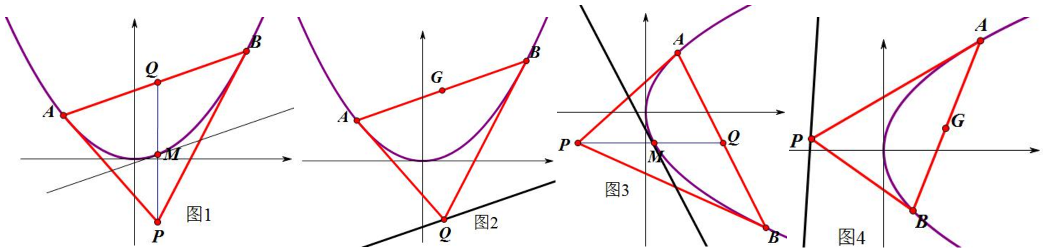
注意：抛物线的切线解题模式为：导→差→代→联，即求导写切线方程，切线方程进行作差，将求出来的点坐标代入切线方程，联立直线与抛物线得到直线过定点．

如图 2，点 $Q(x_0,y_0)$ 为直线 $l: y=kx+m$ 上一动点，过点 Q 引抛物线 $x^2=2py$ 两条切线 QA，QB，则过两切点的直线 AB 必过定点 $G(pk,-m)$．

【证明】由定理 1 结论可知 AB：$xx_0=p(y+y_0)$，又 Q 在直线 l 上，故 $y_0=kx_0+m$，将两式联立得：

$\begin{cases} xx_0=p(y+y_0)\Rightarrow x_0=\dfrac{p(y+y_0)}{x} \\ y_0=kx_0+m \end{cases}\Rightarrow y_0=k\dfrac{p(y+y_0)}{x}+m\Rightarrow y_0(x-kp)-(kpy+mx)=0$，由于 y_0 为任意数，

故 $\begin{cases} x-kp=0 \\ kpy+Cx=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=kp \\ y=-m \end{cases}$（图 4 也可以推导，$l: x=ky+m$ 过直线 AB 定点 $G(-m,kp)$）



【例 6】过点 $P(3,4)$ 作抛物线 $x^2=2y$ 的两条切线，切点分别为 A、B，则直线 AB 的斜率为_________.

【解析】根据定理 1 的公式得，AB 直线方程为：$3x=y+4$，故斜率为 3.

【例 7】在平面直角坐标系 xOy 中，动点 P 到定点 $F(0,\frac{1}{4})$ 的距离比点 P 到 x 轴的距离大 $\frac{1}{4}$，设动点 P 的轨迹为曲线 C，直线 $l: y=kx+1$ 交曲线 C 于 A,B 两点，M 是线段 AB 的中点，过点 M 作 x 轴的垂线交曲线 C 于点 N.

（1）求曲线 C 的方程；

（2）证明:曲线 C 在点 N 处的切线与 AB 平行；

（3）若曲线 C 上存在关于直线 l 对称的两点，求 k 的取值范围.

【解析】（1）$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}-|y|=\frac{1}{4} \Rightarrow x^2=y$

（2）此问明显是定理 1 的结论，话不多说直接上套路：

$\because$ 点 $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ 在抛物线上 $\therefore$ $x_1{}^2=y_1; x_2{}^2=y_2$ 求导得 $y'=2x$；在点 $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ 的切线方程为：$\begin{cases} y-y_1=2x_1(x-x_1) \\ y-y_2=x_2(x-x_2) \end{cases}$，即 $\begin{cases} 2xx_1=y+y_1 & ① \\ 2xx_2=y+y_2 & ② \end{cases}$，②－①得：$2x(x_2-x_1)=y_2-y_1$，即 $2x=\frac{x_2{}^2-x_1{}^2}{x_2-x_1}$

$\therefore x=\frac{x_2+x_1}{2}$ $\therefore$ $x_M=\frac{x_2+x_1}{2}=x_N$ 令 AB 方程为 $y=kx+1$，代入 $x^2=y$ 得：$x^2-kx-1=0 \Rightarrow \frac{x_2+x_1}{2}=\frac{k}{2}$ $\Rightarrow k=2x_N$，N 点坐标为 $(x_N,x_N{}^2)$，以 N 点为切点的切线斜率为 $y'=2x_N$，故 AB// N 的切线；

（3）若存在两点 PQ 关于直线 $l: y=kx+1$ 对称，则 $k_{PQ}=-\frac{1}{k}$，令 PQ 中点 $E(x_0,y_0)$，令 PQ 方程为 $y=-\frac{1}{k}x+m$，由于 E 在直线 $l: y=kx+1$ 上，固有 $y_0=kx_0+1$，根据(2)结论可知 $-\frac{1}{k}=2x_0$，即 $y_0=k\frac{1}{-2k}+1=\frac{1}{2}$，故 $\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{k}\right)\left(-\frac{1}{2k}\right)+m \Rightarrow m=\frac{1}{2}-\frac{1}{2k^2}$，将直线 PQ：$y=-\frac{1}{k}x+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k^2}\right)$ 与抛物线 $x^2=y$ 联立得：$x^2+\frac{1}{k}x-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k^2}\right)=0$　　$\Delta>0 \Rightarrow \frac{1}{k^2}<2 \Rightarrow k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【例 8】过 x 轴上的动点 $A(a,0)$ 引抛物线 $y=x^2+1$ 的两切线 AP、AQ，P、Q 为切点.

（1）求 PQ 的方程；

（2）求证直线 PQ 过定点.

【解析】(1)将坐标系向上移一个单位,得过的动点 $A'(a,-1)$ 引抛物线 $y=x^2$ 两切线 $A'P',A'Q'$,切点为 P',Q',根据定理 1，可得：$A'P',A'Q'$ 方程为 $\frac{1}{2}(y+y_1)=xx_1,\frac{1}{2}(y+y_2)=xx_2$，易知 $P'Q'$ 方程为 $ax=\frac{1}{2}(y-1)$;

再将坐标系向下平移一个单位，得 PQ 的方程为 $y=2ax+2$;

（2）定点（0,2）（具体步骤导差代联，参考定理 1 证明）

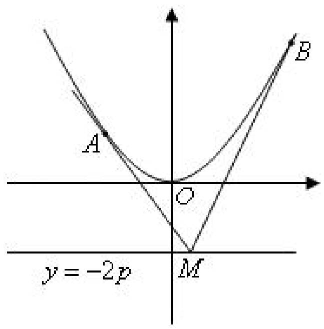
达标训练 3

1. 过点 $M(1\ ,\ 2\sqrt{2})$ 作直线交抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 于 A、B 且 M 为 A、B 中点，过 A、B 分别作抛物线切线，两切线交于点 N，若 N 在直线 $y=-2p$ 上，则 $P=$_________.

2. 过点 $P(-2,1)$ 引抛物线 $y^2=4x$ 的两条切线，切点分别为 A、B，F 是抛物线的焦点，则直线 PF 与直线 AB 的斜率之和为_________.

3. 已知抛物线 C：$y=2x^2$，直线 $y=kx+2$ 交抛物线 C 于 A，B 两点，M 是线段 AB 的中点，过 M 作 x 轴的垂线交 C 于点 N．证明：抛物线 C 在点 N 处的切线与 AB 平行．

4. 如图，设抛物线 $x^2=2py\ (p>0)$，M 为直线 $y=-2p$ 上任意一点，过 M 引抛物线的切线，切点分别为 A、B．求证：A、M、B 三点的横坐标成等差数列．



5．过 x 轴上动点 A $A\left(a\,,\,0\right)$，引抛物线 $y=x^2+3$ 的两条切线 AP、AQ，切点分别为 P、Q.

（1）若 $a=-1$，求直线 PQ 的方程；

（2）探究直线 PQ 是否经过定点，若有，请求出定点的坐标；否则，请说明理由.

6．（深圳一模）在四边形 $ABCD$ 中，已知 $A(0,0)$，$D(0,4)$，点 B 在 x 轴上， $BC//AD$，且对角线 $AC\perp BD$.

（1）求点 C 的轨迹 T 的方程；

（2）若点 P 是直线 $y=2x-5$ 上任意一点，过点 P 作点 C 的轨迹 T 的两切线 PA、PB，A、B 为切点，M 为 AB 的中点．求证： $PM//y$ 轴或 PM 与 y 轴重合；

（3）在（2）的条件下， 直线 AB 是否恒过一定点？若是，请求出这个定点的坐标；若不是，请说明理由.

7．已知抛物线 C： $y=2x^2$，直线 $y=kx+2$ 交 c 于 A、B 两点，M 是线段 AB 的中点，过 M 作 x 轴的垂线交 C 于点 N.

（1）写出抛物线的焦点坐标及准线方程；

（2）证明：抛物线 C 在点 N 处的切线与直线 AB 平行；

（3）是否存在实数 k 使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$，若存在，求 k 的值；若不存在，说明理由.

8．已知抛物线C：$y^2=2px\left(p>0\right)$上的点M到直线l：$y=x+1$的最小距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$．点N在直线l上，过点N作直线与抛物线相切，切点分别为A、B．

（1）求抛物线方程；

（2）当原点O到直线AB的距离最大时，求三角形OAB的面积．

9．已知抛物线C：$y^2=4x$和直线l：$y=x+4$．

（1）求抛物线C上一点到直线l的最短距离；

（2）设M为l上任意一点，过M作两条不平行于x轴的直线．若这两条直线与抛物线C都只有一个公共点，这两个公共点分别记为A、B，证明：直线AB过定点．

10．过点$A\left(-\sqrt{6},0\right)$和抛物线$x^2=2py$焦点$F$的直线与抛物线相交于点$B$，且$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$．

（1）求抛物线的方程；

（2）M、N为抛物线上两点，O为原点，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=-1$，过$M$、$N$分别作抛物线的两条切线，相交于$P$点，求△$PMN$面积的最小值．

11．已知直线 l 的方程是 $y=x-1$ 和抛物线 C：$x^2=y$，自 l 上任意一点 P 作抛物线的两条切线，设切点分别为 A、B；

（1）求证：直线 AB 恒过定点．

（2）求△PAB 面积的最小值．

12．已知椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$．抛物线 C_2：$x^2=-2py\left(p>0\right)$ 的焦点坐标为 $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$．

（1）求椭圆 C_1 和抛物线 C_2 的方程；

（2）若点 M 是直线 l：$2x-y+3=0$ 上的动点，过点 M 作抛物线 C_2 的两条切线，切点分别为 A、B，直线 AB 交椭圆 C_1 于 P、Q 两点．

（i）求证直线 AB 过定点，并求出该定点坐标；

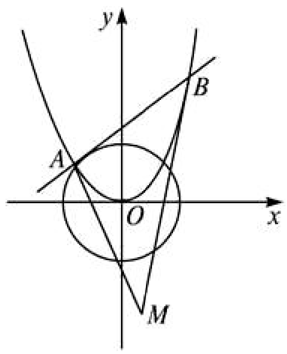
（ii）当△OPQ 的面积取最大值时，求直线 AB 的方程．

13．已知 A、B 是抛物线 W：$y=x^2$ 上的两个点，点 A 的坐标为 $(1,1)$，直线 AB 的斜率为 $k(k>0)$．设抛物线 W 的焦点在直线 AB 的下方．

（1）求 k 的取值范围；

（2）设 C 为 W 上一点，且 $AB\perp AC$，过 B、C 两点分别作 W 的切线，记两切线的交点为 D．判断四边形 $ABDC$ 是否为梯形，并说明理由．

14．如图所示，已知抛物线 $y=x^2$ 的动弦 AB 所在直线与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，分别过点 A、B 的抛物线的两条切线相交于点 M，求点 M 的轨迹方程．



秒杀秘籍：第四讲　阿基米德三角形的面积问题

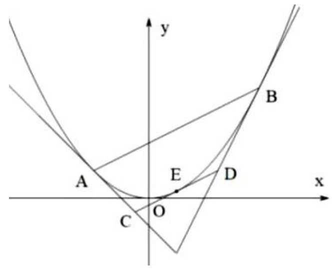
在阿基米德三角形 PAB 中，根据之前所叙述的观点可知：点 P 的坐标为 $(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{2p})$；底边 AB 所在的直线方程为 $(x_1+x_2)x-2py-x_1x_2=0$；那么一定有 $\triangle PAB$ 的面积 $S_{\triangle PAB}=\frac{|x_1-x_2|^3}{8p}$．

【证明】点 P 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{\left|(x_1+x_2)\cdot\frac{x_1+x_2}{2}-2p\cdot\frac{x_1x_2}{2p}-x_1x_2\right|}{\sqrt{(x_1+x_2)^2+4p^2}}=\frac{(x_1-x_2)^2}{2\sqrt{(x_1+x_2)^2+4p^2}}$，

$|AB|=\sqrt{1+(\frac{x_1+x_2}{2p})^2}\cdot|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2+4p^2}}{2p}\cdot|x_1-x_2|$，

故得 $\triangle PAB$ 的面积 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2+4p^2}}{2p}\cdot|x_1-x_2|\cdot\frac{(x_1-x_2)^2}{2\sqrt{(x_1+x_2)^2+4p^2}}=\frac{|x_1-x_2|^3}{8p}$．

推论 1：如图，若 E 为抛物线弧 AB 上的动点，点 E 处的切线与 PA,PB 分别交于点 C,D，则有 $\frac{|AC|}{|CP|}=\frac{|CE|}{|ED|}=\frac{|PD|}{|DB|}$．



证明：　由定理 1．1 知点 P,C,D 的横坐标分别为
$x_P=\frac{x_1+x_2}{2},x_C=\frac{x_1+x_E}{2},x_D=\frac{x_2+x_E}{2}$，

所以 $\frac{|AC|}{|CP|}=\frac{|x_C-x_1|}{|x_P-x_C|}=\frac{\left|\frac{x_1+x_E}{2}-x_1\right|}{\left|\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1+x_E}{2}\right|}=\frac{|x_E-x_1|}{|x_2-x_E|}$，$\frac{|CE|}{|ED|}=\frac{|x_E-x_C|}{|x_D-x_E|}=\frac{\left|x_E-\frac{x_1+x_E}{2}\right|}{\left|\frac{x_E+x_2}{2}-x_E\right|}=\frac{|x_E-x_1|}{|x_2-x_E|}$，所以 $\frac{|AC|}{|CP|}=\frac{|CE|}{|ED|}$，

同理 $\frac{|PD|}{|DB|}=\frac{|CE|}{|ED|}$，故得 $\frac{|AC|}{|CP|}=\frac{|CE|}{|ED|}=\frac{|PD|}{|DB|}$．

推论 2　若 E 为抛物线 AB 上的动点，抛物线在点 E 处的切线与阿基米德 $\triangle PAB$ 的边 PA,PB 分别交于点 C,D，则有 $\frac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle PCD}}=2$．

证明：设 $\frac{|AC|}{|CP|}=\frac{|CE|}{|ED|}=\frac{|PD|}{|DB|}=\lambda$，记作 $S_{\triangle PCE}=S$，则 $\frac{S_{\triangle ACE}}{S}=\frac{|AC|}{|CP|}=\lambda$，即 $S_{\triangle CAE}=\lambda S$，同理

$S_{\triangle PED}=\frac{S}{\lambda}$，$S_{\triangle DEB}=\frac{S}{\lambda^2}$．因为 $\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PCD}}=\frac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}=\frac{\lambda+1}{1}\cdot\frac{1+\lambda}{\lambda}=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}$，于是

$S_{\triangle PAB}=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}(S+\frac{S}{\lambda})=\frac{(\lambda+1)^3}{\lambda^2}S$

所以 $S_{\triangle EAB}=S_{\triangle PAB}-S_{\triangle PCD}-S_{\triangle CAE}-S_{\triangle DBE}=\frac{(\lambda+1)^3}{\lambda^2}S-(S+\frac{S}{\lambda})-\lambda S-\frac{S}{\lambda^2}=\frac{2(\lambda+1)}{\lambda}S$

$S_{\triangle PCD}=S+\frac{S}{\lambda}=\frac{\lambda+1}{\lambda}S$ 所以 $\frac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle PCD}}=2$.

【例 9】（2019•新课标III）已知曲线 $C:y=\frac{x^2}{2}$，D 为直线 $y=-\frac{1}{2}$ 上的动点，过 D 作 C 的两条切线，切点分别为 A，B.

（1）证明：直线 AB 过定点；

（2）若以 $E(0,\frac{5}{2})$ 为圆心的圆与直线 AB 相切，且切点为线段 AB 的中点，求四边形 $ADBE$ 的面积.

【解析】（1）证明：$y=\frac{x^2}{2}$ 的导数为 $y'=x$，设切点 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，即有 $y_1=\frac{x_1^2}{2}$，$y_2=\frac{x_2^2}{2}$，

切线 DA 的方程为 $y-y_1=x_1(x-x_1)$，即为 $y=x_1x-\frac{x_1^2}{2}$，切线 DB 的方程为 $y=x_2x-\frac{x_2^2}{2}$，

联立两切线方程可得 $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，可得 $y=\frac{1}{2}x_1x_2=-\frac{1}{2}$，即 $x_1x_2=-1$，

直线 AB 的方程为 $y-\frac{x_1^2}{2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$，即为 $y-\frac{x_1^2}{2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)(x-x_1)$，

可化为 $y=\frac{1}{2}(x_1+x_2)x+\frac{1}{2}$，可得 AB 恒过定点 $(0,\frac{1}{2})$；

（2）设直线 AB 的方程为 $y=kx+\frac{1}{2}$，由（1）可得 $x_1+x_2=2k$，$x_1x_2=-1$，AB 中点 $H(k,k^2+\frac{1}{2})$，

由 H 为切点可得 E 到直线 AB 的距离即为 $|EH|$，可得 $\frac{|\frac{1}{2}-\frac{5}{2}|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{k^2+(k^2-2)^2}$，解得 $k=0$ 或 $k=\pm1$，

即有直线 AB 的方程为 $y=\frac{1}{2}$ 或 $y=\pm x+\frac{1}{2}$，由 $y=\frac{1}{2}$ 可得 $|AB|=2$，四边形 $ADBE$ 的面积为 $S_{\Delta ABE}+S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}\times2\times(1+2)=3$；由 $y=\pm x+\frac{1}{2}$，可得 $|AB|=\sqrt{1+1}\bullet\sqrt{4+4}=4\sqrt{2}$，

此时 $D(\pm1,-\frac{1}{2})$ 到直线 AB 的距离为 $\frac{|1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$；$E(0,\frac{5}{2})$ 到直线 AB 的距离为 $\frac{|\frac{1}{2}-\frac{5}{2}|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

则四边形 $ADBE$ 的面积为 $S_{\Delta ABE}+S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times(\sqrt{2}+\sqrt{2})=8$；综上可得四边形 $ADBE$ 的面积为 3 或 8.

【例 10】（2012•江西卷）已知三点 $O(0,0)$，$A(-2,1)$，$B(2,1)$，曲线 C 上任意一点 $M(x,y)$满足 $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+2$.

（1）求曲线 C 的方程；

（2）动点 $Q(x_0,y_0)(-2<x_0<2)$在曲线 C 上，曲线 C 在点 Q 处的切线为直线 l.是否存在定点 $P(0,t)(t<0)$，使得 l 与 PA，PB 都相交，交点分别为 D，E，且△QAB 与△PDE 的面积之比是常数？若存在，求 t 的值．若不存在，说明理由．

【解析】（1）由 $\overrightarrow{MA}=(-2-x,1-y)$，$\overrightarrow{MB}=(2-x,1-y)$ 可得 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=(-2x,2-2y)$，

$\therefore|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=\sqrt{4x^2+(2-2y)^2}$，$\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+2=(x,\ y)\cdot(0,\ 2)+2=2y+2$．

由题意可得 $\sqrt{4x^2+(2-2y)^2}=2y+2$，化简可得 $x^2=4y$．

（2）法一：假设存在点 $P(0,\ t)(t<0)$，满足条件，则直线 PA 的方程是 $y=\dfrac{t-1}{2}x+t$，直线 PB 的方程是 $y=\dfrac{1-t}{2}x+t$

$\because -2<x_0<2$，$\therefore -1<\dfrac{x_0}{2}<1$ ①当 $-1<t<0$ 时，$-1<\dfrac{t-1}{2}<-\dfrac{1}{2}$，存在 $x_0\in(-2,2)$，使得 $\dfrac{x_0}{2}=\dfrac{t-1}{2}$ $\therefore l//PA$，$\therefore$ 当 $-1<t<0$ 时，不符合题意；②当 $t\leqslant-1$ 时，$\dfrac{t-1}{2}\leqslant-1<\dfrac{x_0}{2}$，$\dfrac{1-t}{2}\geqslant1>\dfrac{x_0}{2}$，

$\therefore l$ 与直线 PA，PB 一定相交，分别联立方程组

$\begin{cases}y=\dfrac{t-1}{2}x+t\\ y=\dfrac{x_0}{2}x-\dfrac{x_0^{\ 2}}{4}\end{cases}$，$\begin{cases}y=\dfrac{1-t}{2}x+t\\ y=\dfrac{x_0}{2}x-\dfrac{x_0^{\ 2}}{4}\end{cases}$，解得 D，E 的横坐标分别是 $x_D=\dfrac{x_0^{\ 2}+4t}{2(x_0+1-t)}$，$x_E=\dfrac{x_0^{\ 2}+4t}{2(x_0+t-1)}$

$\therefore x_E-x_D=(1-t)\dfrac{x_0^{\ 2}+4t}{x_0^{\ 2}-(t-1)^2}$ $\because|FP|=-\dfrac{x_0^{\ 2}}{4}-t$ $\therefore S_{\triangle PDE}=\dfrac{1}{2}|FP||x_E-x_D|=\dfrac{t-1}{8}\times\dfrac{(x_0^{\ 2}+4t)^2}{x_0^{\ 2}-(t-1)^2}$

$\because S_{\triangle QAB}=\dfrac{4-x_0^{\ 2}}{2}$ $\therefore \dfrac{S_{\triangle QAB}}{S_{\triangle PDE}}=\dfrac{4}{1-t}\times\dfrac{x_0^{\ 4}-[4+(t-1)^2]x_0^{\ 2}+4(t-1)^2}{x_0^{\ 4}+8tx_0^{\ 2}+16t^2}$

$\because x_0\in(-2,2)$，$\triangle QAB$ 与 $\triangle PDE$ 的面积之比是常数 $\therefore\begin{cases}-4-(t-1)^2=8t\\ 4(t-1)^2=16t^2\end{cases}$，解得 $t=-1$，

$\therefore\triangle QAB$ 与 $\triangle PDE$ 的面积之比是 2.

法二：参考推论 2 的书写，不再详述.

达标训练 4

1．（2019•黄山三模）已知 P 是圆 $C:(x-2)^2+(y+2)^2=1$ 上一动点，过点 P 作抛物线 $x^2=8y$ 的两条切线，切点分别为 A，B，则直线 AB 斜率的最大值为（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{3}{8}$　　D．$\frac{1}{2}$

2．（2019•长沙月考）过抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 上两点 A，B 分别作抛物线的切线，若两切线垂直且交于点 $P(1,-2)$，则直线 AB 的方程为（　　）

A．$y=\frac{1}{2}x+2$　　B．$y=\frac{1}{4}x+3$　　C．$y=\frac{1}{2}x+3$　　D．$y=\frac{1}{4}x+2$

3．（2019•博望月考）已知抛物线 $C:x^2=8y$，过点 $M(x_0,\ y_0)$ 作直线 MA、MB 与抛物线 C 分别切于点 A、B，且以 AB 为直径的圆过点 M，则 y_0 的值为（　　）

A．-1　　B．-2　　C．-4　　D．不能确定

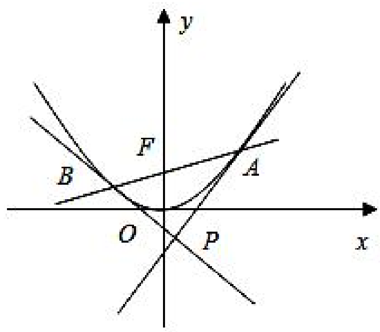
4．（2018•武汉模拟）过点 $P(2,-1)$ 作抛物线 $x^2=4y$ 的两条切线，切点分别为 A、B，且 PA,PB 分别交 x 轴于 E,F 两点，O 为坐标原点，则△PEF 与△OAB 的面积之比为（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{3}{4}$

5．（2019•杭州期中）已知 $Q(1,1)$ 是抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 上一点，过抛物线焦点 F 作一条直线 l 与抛物线交于不同两点 A、B．在点 A 处作抛物线的切线 l_1，在点 B 处作抛物线的切线 l_2，直线 l_1、l_2 交于 P 点．

（1）求 p 的值及焦点 F 的坐标；

（2）求证 $PA\perp PB$．



6．（2019•汕头二模）已知抛物线$D:x^2=4y$，过x轴上一点E（不同于原点）的直线l与抛物线D交于两点$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，与y轴交于C点．

（1）若$\overrightarrow{EA}=\lambda_1\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{EB}=\lambda_2\overrightarrow{EC}$，求乘积$\lambda_1\cdot\lambda_2$的值；

（2）若$E(4,0)$，过A，B分别作抛物线D的切线，两切线交于点M，证明：点M在定直线上，求出此定直线方程．

7．（2019•凯里模拟）已知抛物线$E:x^2=4y$．

（1）A、B是抛物线E上不同于顶点O的两点，若以AB为直径的圆经过抛物线的顶点，试证明直线AB必过定点，并求出该定点的坐标；

（2）在（1）的条件下，抛物线在A、B处的切线相交于点D，求$\triangle ABD$面积的取值范围．

8.（2019•遂宁模拟）已知直线 $l_1: x+y+1=0$ 与直线 $l_2: x+y+3=0$ 的距离为 a，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）在（1）的条件下，抛物线 $D: y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 与点 $(-\dfrac{1}{8},2)$ 关于 y 轴上某点对称，且抛物线 D 与椭圆 C 在第四象限交于点 Q，过点 Q 作抛物线 D 的切线，求该切线方程并求该直线与两坐标轴围成的三角形面积．

9．（2017·江西一模）如图，已知抛物线 $C: x^2=2py(p>0)$，其焦点 F 到准线的距离为 2，点 A,B 是抛物线 C 上的定点，它们到焦点 F 的距离均为 2，且点 A 位于第一象限．

（1）求抛物线 C 的方程及点 A,B 的坐标．

（2）若点 $Q(x_0,y_0)$ 是抛物线 C 上异于 A,B 的一动点，分别以点为切点做抛物线 C 的三条切线 l_1,l_2,l_3，若 l_1 与 l_2、l_1 与 l_3、l_2 与 l_3 分别相交于点 D,E,H，设△QAB，△DEH 的面积依次为 $S_{\triangle ABQ}$，$S_{\triangle DEH}$，记 $\lambda=\dfrac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle DEH}}$，问：$\lambda$ 是否为定值？若是，请求出该定值；若不是，请说明理由．