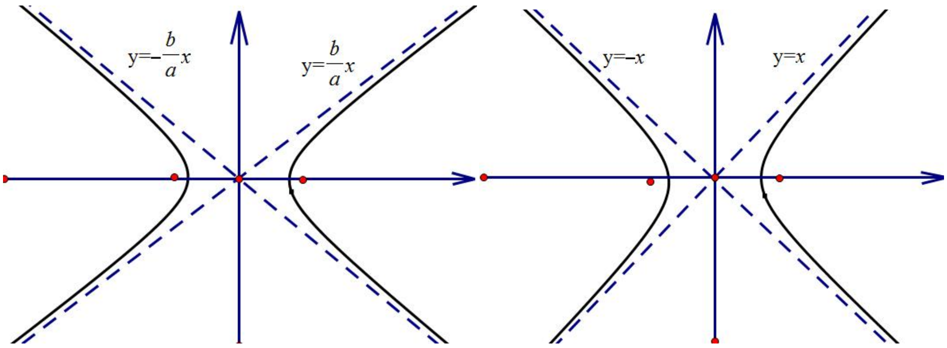
专题 8 双曲线的仿射与旋转

第一讲 双曲线仿射为等轴双曲线

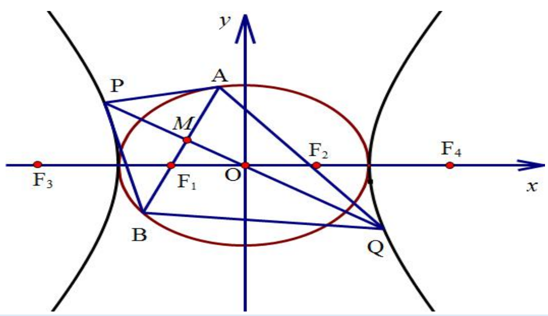


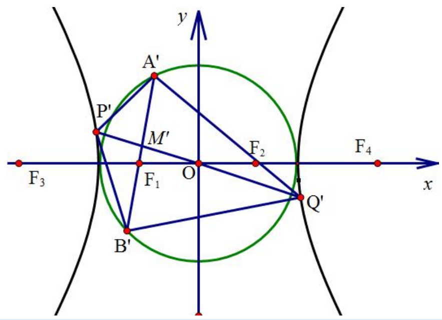
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{a}{b} y \end{cases} \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2 \Rightarrow \rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta = a^2 \Rightarrow \rho^2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta}\text{(极坐标表达式)}$$

【例 1】（2014•湖南）如图，O 为坐标原点，椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 e_1；双曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_3，F_4，离心率为 e_2，已知 $e_1e_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且 $|F_2F_4|=\sqrt{3}-1$.

（1）求 C_1、C_2 的方程；

（2）过 F_1 作 C_1 的不垂直于 y 轴的弦 AB，M 为 AB 的中点，当直线 OM 与 C_2 交于 P，Q 两点时，求四边形 $APBQ$ 面积的最小值.





【解析】（1）由题意可知，$e_1=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}, e_2=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}$，且 $|F_1F_2|=2\sqrt{a^2-b^2}$．$\because e_1e_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

且 $|F_2F_4|=\sqrt{3}-1$．$\therefore \sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}\bullet\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且 $\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}-1$．解得：$a=\sqrt{2}, b=1$．

$\therefore$ 椭圆 C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，双曲线 C_2 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$；

（2）由（1）可得 $F_1(-1,0)$．$\because$ 直线 AB 不垂直于 y 轴，如图，故作仿射变换，即 $\begin{cases} x'=x \\ y'=\sqrt{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2-y^2=2 \end{cases}$

$S_{PAQB}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}S_{P'A'Q'B'}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}|AB||PQ|$，根据几何意义，$|AM|^2=2-|OM|^2$，故当 $|OM'|^2$ 取最大值，即 $|OM'|^2=|OF_1|\cos^2\theta\le 1$ 时，$|AM|$ 取最小值，此时 $|PQ|$ 也取到最小值 $2\sqrt{2}$，

$S_{PAQB}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}S_{P'A'Q'B'}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}|AB||PQ| \quad \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \quad 2 \quad 2\sqrt{2} \quad 2$．

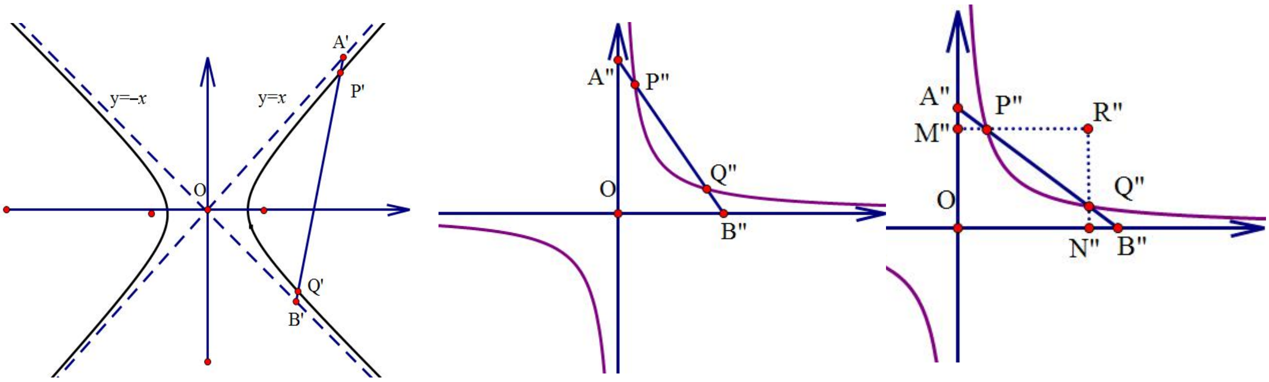
另解：化极坐标，$\rho^2=\dfrac{a^2}{\cos 2\theta}$，$S_{PAQB}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}S_{PAQB'}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\times 2\sqrt{2-\cos^2\theta}\times 2\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\theta}}=2\sqrt{\dfrac{3}{2\cos 2\theta} \quad \dfrac{1}{2}}\le 2$.

第二讲 双曲线仿射后旋转45°形成反比例函数

设如图，将等轴双曲线逆时针旋转 45°，即变成了初中的反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $k=\frac{a^2}{2}$ ，将拥有以下性质：

①$\frac{|A'P'|}{|PB|}=\frac{|A''P''|}{|P''B''|}=\lambda=\frac{|B'Q'|}{|Q'A'|}=\frac{|B''Q''|}{|Q''A''|}$ ②$|A'P'|=|Q'B'|;|A''P''|=|Q''B''|$

③$S_{\triangle A'OB'}=f(\lambda)=\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}k=\frac{(\lambda+1)^2a^2}{4\lambda}$（参考例题）④若 AB 与双曲线相切，则切点为 AB 中点，$S_{\triangle A'OB'}=a^2$；



证明：设 $P''(x_1,y_1),Q''(x_2,y_2)$，由 $x_1y_1=x_2y_2$ 得：$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}$ 故

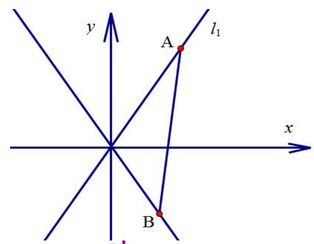
$$\frac{|M''P''|}{|P''R''|}=\frac{|N''Q''|}{|Q''R''|}=\frac{|A''P''|}{|P''Q''|}=\frac{|B''Q''|}{|Q''P''|}\Rightarrow|A''P''|=|B''Q''|;\therefore\frac{|A''P''|}{|P''B''|}=\frac{|A''P''|}{|A''P''|+|P''Q''|}=\lambda=\frac{|B''Q''|}{|Q''A''|}$$

当 $A''B''$ 与双曲线相切时，P''与Q'' 重合，则$|A''P''|=|B''P''|$，$S_{A'OB'}=a^2$.

【例 2】（2014•福建）已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别为 $l_1:y=2x$，$l_2:y=-2x$.

（1）求双曲线 E 的离心率；

（2）如图，O 点为坐标原点，动直线 l 分别交直线 l_1，l_2 于 A，B 两点（A，B 分别在第一、第四象限），且△OAB 的面积恒为 8，试探究：是否存在总与直线 l 有且只有一个公共点的双曲线 E？若存在，求出双曲线 E 的方程，若不存在，说明理由.

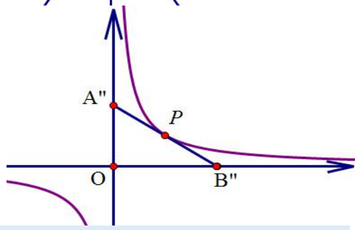


【解析】（1）因为双曲线 E 的渐近线分别为 $l_1:y=2x$，$l_2:y=-2x$，所以 $\frac{b}{a}=2$. 所以 $\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=2$. 故 $c=\sqrt{5}a$，从而双曲线 E 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.

（2）由（1）知，双曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1$.

作 $\begin{cases}x'=x\\ y'=\frac{1}{2}y\end{cases}\Rightarrow x'^2-y'^2=a^2$，

再将双曲线沿逆时针旋转 45°



得：$x\ y\ =\frac{a^2}{2}$；$S_{\triangle A''OB''}=\frac{1}{2}S_{\triangle AOB}=4$ $|OA\ |\ |OB\ |=8$

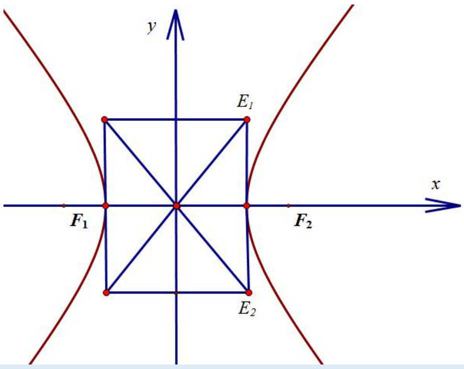
设 $A\ B$ 与双曲线切于点 $P\ \ x_0,\frac{a^2}{2x_0}$ ，则 $k_{A\ B}=-\frac{a^2}{2x_0^2}$，

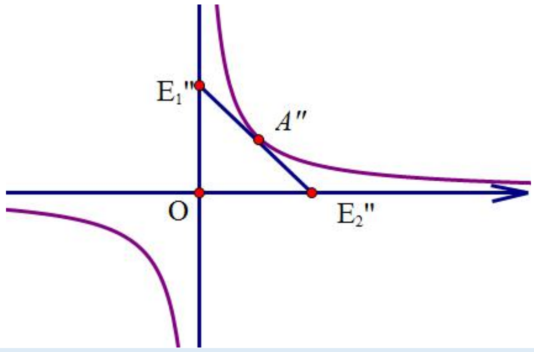
故 $A\ B$ 方程为 $y-\frac{a^2}{2x_0}=-\frac{a^2}{2x_0^2}(x-x_0)$，$\therefore|OB\ |=2x_0,|OA\ |=2y_0$，

$\therefore 4x_0y_0=8=2a^2\Rightarrow a^2=4$，

通过仿射变换回去可知，双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

【例 3】如图所示， 直线 $x=2$ 与双曲线 $\Gamma:\frac{x}{4}-y^2=1$ 的渐近线交于 E_1， E_2 两点， 记 $\overrightarrow{OE_1}=\overrightarrow{e_1}$， $\overrightarrow{OE_2}=\overrightarrow{e_2}$，任取双曲线上的点 P，若 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{e_1}+b\overrightarrow{e_2}(a,b\in R)$，则 a、 b 满足的一个等式是_________.





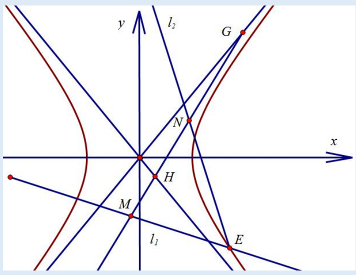
【解析】$\Gamma:\frac{x^2}{4}-y^2=1\Rightarrow x'^2-y'^2=4\Rightarrow x''y''=2$， $\left|OE_1\right|=\left|OE_2\right|$， $S_{OE_1E_2}=a^2=4$ ， $\therefore\left|e_1''\right|=2\sqrt{2},\left|e_2''\right|=2\sqrt{2}$，设 P 在 x 轴的射影为 B ，则 $S_{\triangle OP''B''}=\frac{xy}{2}=1\Rightarrow\frac{a\left|e_1''\right|\cdot b\left|e_2''\right|}{2}=1\Rightarrow ab=\frac{1}{4}$.

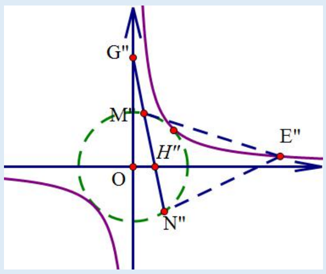
【例 4】（2010•重庆）已知以原点 O 为中心， $F(\sqrt{5},0)$ 为右焦点的双曲线 C 的离心率 $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

（1）求双曲线 C 的标准方程及其渐近线方程；

（2）如图，已知过点 $M(x_1,\ y_1)$ 的直线 $l_1:x_1x+4y_1y=4$ 与过点 $N(x_2,\ \ y_2)$（其中 $x_2\neq x_1$）的直线 $l_2:x_2x+4y_2y=4$ 的交点 E 在双曲线 C 上，直线 MN 与两条渐近线分别交与 G、H 两点，求△OGH 的面积.

【解析】(1) 设 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则由题意知 $c=\sqrt{5}$， $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$， $\therefore a=2$， $b=1$，$\therefore C$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$． $\therefore C$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$， 即 $x-2y=0$ 和 $x+2y=0$．





(2) 由题意知， 作 $\begin{cases}x'=x\\y'=2y\end{cases}\Rightarrow x^2-y^2=4$， 再将双曲线沿逆时针旋转 $45°$ 得： $x\ y\ =2$； 如图，点 M',N' 在直线 $l_1:x_1'x+y_1'y=4$ 和 $l_2:x_2'x+y_2'y=4$ 上，故点 M',N' 在 $x^2+y^2=4$ 圆上，l_1,l_2 为过点 M',N' 的切线，点 E 在 $x_{E''}x+y_{E''}y=4$ 上， 因此直线 MN 的方程为 $x_{E''}x+y_{E''}y=4$．

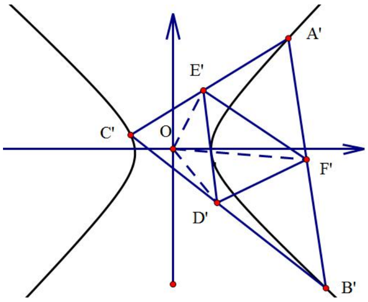
$x=0,y=\frac{4}{y_E}=\left|OG\right|;y=0,x=\frac{4}{x_E}=\left|OH\right|\ \therefore S_{\triangle OGH}=\frac{1}{2}S_{\triangle OG''H''}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{y_{E''}}\cdot\frac{4}{x_{E''}}=2$．

反比例函数的逆仿射：需要逆反射成双曲线，这里往往涉及一个中点弦问题 $k_{AB}k_{OM}=1$

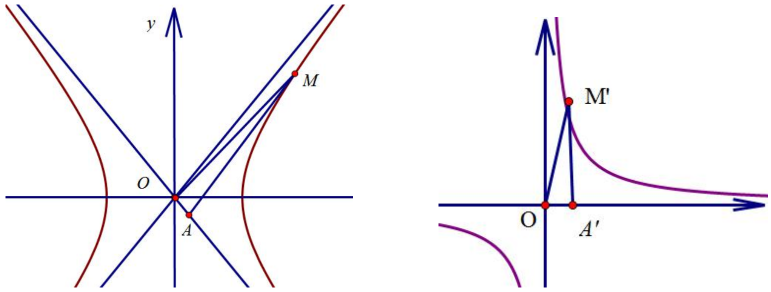
【例 5】(2017•武汉调考)在平面直角坐标系中，设 A、B、C 是曲线 $y=\frac{1}{x-1}$ 上三个不同的点，且 D、E、F 分别为 BC、CA、AB 的中点，则过 D、E、F 三点的圆一定经过定点___________.

【解析】将 $y=\frac{1}{x-1}$ 向左移一个单位得 $y=\frac{1}{x}$， 将其顺时针旋转 $45°$ 得 $x^2-y^2=2$，根据点差法易知 $k_{OF'}k_{A'B'}=1$， $k_{OE'}k_{A'C'}=1,k_{OD'}k_{B'C'}=1$;① 故 $\tan\angle E'F'D'=\frac{k_{E'F'}-k_{D'F'}}{1+k_{E'F'}k_{D'F'}}=\frac{k_{B'C'}-k_{A'C'}}{1+k_{B'C'}k_{A'C'}}$，代入①得

$\tan\angle E'F'D'=\frac{\frac{1}{k_{OD'}}-\frac{1}{k_{OE'}}}{1+\frac{1}{k_{OD'}}\frac{1}{k_{OE'}}}=-\frac{k_{OD'}-k_{OE'}}{1+k_{OD'}k_{OE'}}=-\tan\angle E'OD'$， 所以 $E'F'D'+\ E'OD'=180$ ， O、D'、E'、F' 四点共圆， 则过 D、E、F 三点的圆一定过点 $(1,0)$．



例 5 图



例 6 图

【例 6】在平面直角坐标系 xoy 中，已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的一个焦点为 $(2\sqrt{2},0)$ 过双曲线上的一点 M 作一条渐近线的平行线交另一条渐近线于点 A，若 $\triangle OMA$ 的面积为 1，则其离心率为________.

【解析】如上图根据仿射原理可知：$S_{\triangle OMA}=\dfrac{k}{2}=\dfrac{a^2}{4}=1\quad \dfrac{a^2}{b^2}\quad b^2=4$，又因为 $a^2=c^2-b^2=4$，故离心率 $e=\sqrt{2}$.

【例 7】已知双曲线 C 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$，点 A 和点 B 是双曲线 C 的两条渐近线上的两个动点，双曲线 C 上的点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\cdot\overrightarrow{PB}$（其 中 $\lambda\in[\dfrac{1}{2},\ 3]$）． 求 $\triangle AOB$ 面积的取值范围．

【解析】作 $\begin{cases}x'=x\\ y'=\dfrac{1}{2}y\end{cases}\Rightarrow x^2-y^2=1$，，再将双曲线沿逆时针旋转 $45°$ 得 $x\ y\ =\dfrac{1}{2}$，设 $P''\ x_0,\dfrac{1}{2x_0}\ ,Q''(x_0,0)$，

$\overrightarrow{A\ P''}=\lambda\overrightarrow{P\ B}$，$\therefore\overrightarrow{OP''}=\dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA''}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB''}$，故 $\left|\overrightarrow{OA''}\right|=x_0(1+\lambda)$，$\left|\overrightarrow{OB''}\right|=\dfrac{1+\lambda}{2\lambda x_0}$

$S_{\triangle OAB}=2S_{\triangle OA''B''}=\left|\overrightarrow{OA''}\right|\left|\overrightarrow{OB''}\right|=x_0(1+\lambda)\dfrac{1+\lambda}{2\lambda x_0}=\dfrac{1}{2}\ \ \lambda+\dfrac{1}{\lambda}+2$，$\lambda\in[\dfrac{1}{2},3]$，根据基本不等式和对勾函数性质得 $\lambda=1$，$S_{\min}=2$，$S(\dfrac{1}{2})=\dfrac{9}{4}$，$S(3)=\dfrac{13}{6}$，当 $\lambda=1$ 时，$\triangle AOB$ 的面积取得最小值 2，当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，$\triangle AOB$ 的面积取得最大值 $\dfrac{9}{4}$． $\therefore\triangle AOB$ 面积的取值范围是 $[2,\dfrac{9}{4}]$．

达标训练

1．（2017•芜湖期末）已知直线 $x=3$ 与双曲线 $C:\dfrac{x^2}{9}-y^2=1$ 的渐近线交于 A，B 两点，设 P 为双曲线上任一点，若 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}(a$，$b\in R$，$O$ 为坐标原点），则下列不等式恒成立的是（　　）

A．$a^2+b^2\geqslant 1$　　B．$|ab|\geqslant 1$　　C．$|a+b|\geqslant 1$　　D．$|a-b|\geqslant 1$

2．（2018•衡阳三模）已知直线 l 与双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两条渐近线分别交于 M，N 两点，且线段 MN 的中点在双曲线上，则 $\triangle MON$ 的面积为（　　）

A．1　　B．8　　C．4　　D．2

3．（2018•成都模拟）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 右支上的一点 P，经过点 P 的直线与双曲线 C 的两条渐近线分别相交于 A，B 两点，若点 A，B 分别位于第一、四象限，O 为坐标原点，当 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PB}$ 时，$\triangle AOB$ 的面积为 $2b$，则双曲线 C 的实轴长为（　　）

A．$\dfrac{32}{9}$　　B．$\dfrac{16}{9}$　　C．$\dfrac{8}{9}$　　D．$\dfrac{4}{9}$

4.（2010•上海）在平面直角坐标系中，双曲线Γ的中心在原点，它的一个焦点坐标为$(\sqrt{5},0)$，$\vec{e}_1=(2,1)$、$\vec{e}_2=(2,-1)$分别是两条渐近线的方向向量．任取双曲线Γ上的点P，若$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{e_1}+b\overrightarrow{e_2}$($a$、$b\in R$)，则$a$、$b$满足的一个等式是_________．

5.已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>a>0)$的右焦点为$F$，$O$为坐标原点，若存在直线$l$过点$F$交双曲线$C$的右支于$A,B$两点，使$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，则双曲线离心率的取值范围是___________．

6.（2008•上海）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$，P为C上的任意点．

（1）求证：点P到双曲线C的两条渐近线的距离的乘积是一个常数；

（2）设点A的坐标为$(3,0)$，求$|PA|$的最小值．

7.（2017•湖北期中）已知F_1，F_2是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点，$|F_1F_2|=2\sqrt{5}$，点$P(2\sqrt{5}$，$2)$在双曲线上．

（1）求双曲线的标准方程；

（2）若直线l与双曲线相切与于点Q，与双曲线的两条渐近线分别相交于M，N两点，当点Q在双曲线上运动时，$\overrightarrow{OM}\bullet\overrightarrow{ON}$的值是否为定值？若是，求出定值；否则，请说明理由．

8.（2009•陕西）已知双曲线C的方程为$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，离心率$e=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，顶点到渐近线的距离为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

（1）求双曲线C的方程；

（2）P是双曲线C上一点，A，B两点在双曲线C的两条渐近线上，且分别位于第一、二象限，若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$\lambda\in[\dfrac{1}{3},2]$，求$\triangle AOB$面积的取值范围．

9.（2018•上海模拟）已知等轴双曲线C的两个焦点F_1、F_2在直线$y=x$上，线段F_1F_2的中点是坐标原点，且双曲线经过点$(3,\dfrac{3}{2})$．

（1）若已知下列所给的三个方程中有一个是等轴双曲线C的方程：①$x^2-y^2=\dfrac{27}{4}$；②$xy=9$；③$xy=\dfrac{9}{2}$．请确定哪个是等轴双曲线C的方程，并求出此双曲线的实轴长；

（2）现要在等轴双曲线C上选一处P建一座码头，向$A(3,3)$、$B(9,6)$两地转运货物．经测算，从P到A、从P到B修建公路的费用都是每单位长度a万元，则码头应建在何处，才能使修建两条公路的总费用最低？

（3）如图，函数$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{1}{x}$的图象也是双曲线，请尝试研究此双曲线的性质，你能得到哪些结论？（本小题将按所得到的双曲线性质的数量和质量酌情给分）