

专题 9 平移坐标系构造齐次式

第一讲 圆锥曲线斜率之和与积的问题——平移构造齐次式进阶篇

在秒杀压轴题系列 1 中，我们讲解了有关过圆锥曲线上的一个定点 P 作两条直线与圆锥曲线交于 A, B ，在直线 PA 和 PB 斜率之和或者斜率之积为定值的情况下，直线 AB 过定点或者 AB 定斜率的问题，秒 1 中给出平移构造齐次式的秒杀方法。那么有些同学提出疑问，如果定点 P 不在圆锥曲线上时，我们该如何秒杀？

秒杀秘籍：已知点 $P(x_0, y_0)$ 是平面内一个定点，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上有两动点 A, B

(1) 若直线 $k_{PA} + k_{PB} = \lambda$ ，则直线 AB 过定点。

(2) 若直线 $k_{PA} \cdot k_{PB} = \lambda$ ，则直线 AB 过定点。

证明：将椭圆 C 按向量 $\overrightarrow{PO}(-x_0, -y_0)$ 方向平移，得椭圆 $C': \frac{(x+x_0)^2}{a^2} + \frac{(y+y_0)^2}{b^2} = 1$ ，展开得：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{2x_0}{a^2}x + \frac{2y_0}{b^2}y + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0.$$

平面内的定点 $P(x_0, y_0)$ 和椭圆 C 上的动点 A, B 分别对应椭圆 C' 上的定点 O 和动点 A', B' ，设直线 $A'B'$

的方程为 $mx + ny = 1$ ，代入展开式得 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \left(\frac{2x_0}{a^2}x + \frac{2y_0}{b^2}y\right)(mx + ny) + \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right)(mx + ny)^2 = 0$ (构

造齐次式)，当 $x \neq 0$ 时，两边同时除以 x^2 整理得，

$$\left(\frac{n^2 x_0^2}{a^2} + \frac{(ny_0 + 1)^2}{b^2} - n^2\right) \frac{y^2}{x^2} + \left(\frac{2mnx_0^2 + 2x_0n}{a^2} + \frac{2mny_0^2 + 2y_0m}{b^2} - 2mn\right) \frac{y}{x} + \left(\frac{(mx_0 + 1)^2}{a^2} + \frac{m^2 y_0^2}{b^2} - m^2\right) = 0,$$

因为点 A', B' 的坐标满足这个方程，所以 $k_{OA'}$ 和 $k_{OB'}$ 是关于 $\frac{y}{x}$ 的方程的两根。

(1) 若 $k_{PA} + k_{PB} = \lambda$ ，由平移性质知 $k_{OA'} + k_{OB'} = \lambda$ ，所以

$$k_{OA'} + k_{OB'} = -\frac{\frac{2mnx_0^2 + 2x_0n}{a^2} + \frac{2mny_0^2 + 2y_0m}{b^2} - 2mn}{\frac{n^2 x_0^2}{a^2} + \frac{(ny_0 + 1)^2}{b^2} - n^2} = \lambda, \text{ 整理可得到 } m \text{ 和 } n \text{ 的关系, 从而可知直线 } A'B'$$

过定点，由平移性质可得直线 AB 过定点。

(2) 若 $k_{PA} \cdot k_{PB} = \lambda$ ，由平移性质知 $k_{OA'} \cdot k_{OB'} = \lambda$ ，所以 $k_{OA'} \cdot k_{OB'} = \frac{\frac{(mx_0 + 1)^2}{a^2} + \frac{m^2 y_0^2}{b^2} - m^2}{\frac{n^2 x_0^2}{a^2} + \frac{(ny_0 + 1)^2}{b^2} - n^2} = \lambda$ ，整理可

得到 m 和 n 的关系，从而可知直线 $A'B'$ 过定点，由平移性质可得直线 AB 过定点。

第四章 圆锥曲线

【例 1】 (2018·新课标 I) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$.

- (1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 AM 的方程;
- (2) 设 O 为坐标原点, 证明: $\angle OMA = \angle OMB$.

【答案】 (1) 略.

(2) 将椭圆按照 \overrightarrow{MO} 方向平移得椭圆 C' , 则 $M \rightarrow O, A \rightarrow A', B \rightarrow B', F \rightarrow F'$, 椭圆 $C': \frac{(x+2)^2}{2} + y^2 = 1$, 设直线 $l_{P'Q'}: mx + ny = 1$, 直线过 $(-1, 0)$, 即 $m = -1$, 椭圆 $C': x^2 + 4x + 2y^2 + 2 = 0$, 即: $x^2 + 4x(mx + ny) + 2y^2 + 2(mx + ny)^2 = 0$ (齐次化), 两边同除以 x^2 , 整理得, $(2 + 2n^2)\frac{y^2}{x^2} + (4n + 4mn)\frac{y}{x} + 2m^2 + 4m + 1 = 0$, 又因为 $k_{MA} = k_{OA'}$, $k_{MB} = k_{OB'}$, 所以 $k_{MA} + k_{MB} = k_{OA'} + k_{OB'} = -\frac{4n + 4mn}{2 + 2n^2} = 0$, 所以 $\angle OMA = \angle OMB$.

【例 2】 (2019·全国模拟) 已知 O 为坐标原点, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 椭圆上两点 M, N (非椭圆顶点) 满足 $\angle MON = 90^\circ$, 且 $\frac{1}{|OM|^2} + \frac{1}{|ON|^2} = \frac{3}{2}$.

- (1) 求椭圆的标准方程.
- (2) 不平行于 y 轴的直线与椭圆交于 P, Q 两点, F 为椭圆的右焦点, 当 $k_{PF} + k_{QF} = 0$ 时, 直线 PQ 是否过定点? 若过, 求出此定点, 若不过, 请说明理由.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 将椭圆按 \overrightarrow{FO} 平移得椭圆 C' , 则 $F \rightarrow O, P \rightarrow P', Q \rightarrow Q'$, 椭圆 $C': \frac{(x+1)^2}{2} + y^2 = 1$, 设 $l_{P'Q'}: mx + ny = 1$, 椭圆 $C': \frac{x^2}{2} + y^2 + x - \frac{1}{2} = 0$, 即 $\frac{x^2}{2} + y^2 + x(mx + ny) - \frac{1}{2}(mx + ny)^2 = 0$, 两边同除以 x^2 , 整理得, $(1 - \frac{n^2}{2})\frac{y^2}{x^2} + (n - mn)\frac{y}{x} + (\frac{1}{2} + m - \frac{1}{2}m^2) = 0$, 又因为 $k_{PF} = k_{OP'}$, $k_{QF} = k_{OQ'}$, 所以 $k_{PF} + k_{QF} = k_{OP'} + k_{OQ'} = -\frac{n - mn}{1 - \frac{n^2}{2}} = 0$, 所以 $m = 1$, 即直线 $l_{P'Q'}$ 过定点 $(1, 0)$, 所以直线 PQ 过定点 $(2, 0)$.

【例 3】 (2018·新课标 I) 设抛物线 $C: y^2 = 2x$, 点 $A(2, 0), B(-2, 0)$, 过点 A 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点.

- (1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 BM 的方程.
- (2) 证明: $\angle ABM = \angle ABN$.

【答案】 (1) 略.

(2) 将抛物线按 \overrightarrow{BO} 方向平移得抛物线 C' , 则 $A \rightarrow A', B \rightarrow O, M \rightarrow M', N \rightarrow N'$, 抛物线 C' 的方程为 $y^2 = 2(x - 2)$, 设直线 $l_{M'N'}$ 的方程为 $mx + ny = 1$, 因为 $l_{M'N'}$ 过定点 $(4, 0)$, 即 $m = \frac{1}{4}$, 抛物线 $C': y^2 = 2x - 4$, 即 $y^2 = 2x(mx + ny) - 4(mx + ny)^2$, 两边同时除以 x^2 , 整理得 $(1 + 4n^2)\frac{y^2}{x^2} + (8mn - 2n)\frac{y}{x} + 2m^2 = 0$. 所以 $k_{BM} + k_{BN} = k_{OM'} + k_{ON'} = -\frac{8mn - 2n}{1 + 4n^2} = 0$, 即 $\angle ABM = \angle ABN$.

第四章 圆锥曲线

【例 4】 (2018·宁德期末) 已知抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 与椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 有相同的焦点 F ，且两曲线相交于点 $(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3})$ ，过 F 作斜率为 $k (k \neq 0)$ 的动直线 l ，交椭圆 C 于 M, N 两点。

(1) 求抛物线 E 和椭圆 C 的方程；

(2) 若 A 为椭圆 C 的左顶点，直线 AM, AN 的斜率分别为 k_1, k_2 ，求证： $\frac{k}{k_1} + \frac{k}{k_2}$ 为定值，并求出该定值。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, y^2 = 4x$

(2) 将椭圆按 \overrightarrow{AO} 的方向平移，则 $A \rightarrow 0, M \rightarrow M', F \rightarrow F', N \rightarrow N'$ ，平移后椭圆方程为 $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，即 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + x = 0$ ，设 $l_{M'N'}$ 方程为 $mx + ny = 1$ ，将直线代入椭圆方程，得 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + x(mx + ny) = 0$ ，两边

同除以 x^2 ，整理得 $\frac{1}{3} \cdot \frac{y^2}{x^2} - n \cdot \frac{y}{x} + (\frac{1}{4} - m) = 0$ ， $k_1 + k_2 = k_{OM'} + k_{ON'} = \frac{n}{1} = 3n$ ，

$k_1 \cdot k_2 = k_{OM'} \cdot k_{ON'} = \frac{\frac{1}{4} - m}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} - 3m$ ， $k = k_{M'N'} = -\frac{m}{n}$ ， $\because mx + ny = 1$ 过点 $F'(3, 0)$ ， $\therefore m = \frac{1}{3}$ ，

$\therefore \frac{k}{k_1} + \frac{k}{k_2} = \frac{k(k_1 + k_2)}{k_1 k_2} = \frac{-\frac{m}{n}(3n)}{\frac{3}{4} - 3m} = 4$ ，即： $\frac{k}{k_1} + \frac{k}{k_2}$ 定值为 4。

【例 5】 (2019·济南二模) 已知 Q 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上一动点， Q 在 x 轴， y 轴上的射影分别为点 A, B ，动点 P 满足 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AP}$ ，记动点 P 的轨迹为曲线 C 。

(1) 求曲线 C 的方程；

(2) 过点 $P(0, -\frac{3}{5})$ 的直线与曲线 C 交于 M, N 两点，判断以 MN 为直径的圆是否过定点？若是，求出定点的坐标，若不是，说明理由。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) 当直线 l 斜率不存在时，以 MN 为直径的圆方程为 $x^2 + y^2 = 1$ ；当直线 l 斜率为 0 时，由 $\begin{cases} y = -\frac{3}{5} \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$ ，

得 $x = \pm \frac{8}{5}$ ，则此时圆的方程为 $x^2 + (y + \frac{3}{5})^2 = \frac{64}{25}$ ，

两圆的公共点为 $B(0, 1)$ ，下证以 MN 为直径的圆过 $B(0, 1)$ 。将椭圆按 \overrightarrow{BO} 方向平移，此时 $M \rightarrow M', N \rightarrow N', P(0, -\frac{3}{5}) \rightarrow P'(0, -\frac{8}{5})$ ， $k_{BM} = k_{OM'}$ ， $k_{BN} = k_{ON'}$ 。

新椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + (y+1)^2 = 1$ ，即 $\frac{x^2}{4} + y^2 + 2y = 0$ ，设直线 $M'N'$ 的方程为 $mx + ny = 1$ ，所以

$\frac{x^2}{4} + y^2 + 2y(mx + ny) = 0$ ，即 $(2n+1)\frac{y^2}{x^2} + 2m\frac{y}{x} + \frac{1}{4} = 0$ ，由 $M'N'$ 过点 $P'(0, -\frac{8}{5})$ ，则 $n = -\frac{5}{8}$ ；所以

$k_{BM} \cdot k_{BN} = k_{OM'} \cdot k_{ON'} = \frac{\frac{1}{4}}{2n+1} = -1$ ，即 $BM \perp BN$ ，所以以 MN 为直径的圆过点 $B(1, 0)$ 。

【例 6】 (2019·长郡模拟) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，且椭圆 C 过点 $(1, -\frac{3}{2})$ 。

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 若直线 l 过椭圆 C 的左顶点 M ，且与椭圆 C 的另一个交点为 N ，直线 NF_2 与椭圆 C 的另一个交点为 P ，若 $PF_1 \perp MN$ ，求直线 l 的方程。

【解答】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 连 MP , 设 $k_{MN} = k_1$, $k_{MP} = k_2$, $k_{PF_1} = k_3$, 将椭圆按 \overrightarrow{MO} 方向平移, 得: $N \rightarrow N'$, $P \rightarrow P'$, 则直线 $N'P'$ 过定点 $(3, 0)$. 设 $l_{N'P'}$ 为 $mx + ny = 1$, $\therefore m = \frac{1}{3}$.

平移后椭圆方程为 $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 即 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - x = 0$

$$\therefore \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - x(mx + ny) = 0, \quad \frac{1}{3} \left(\frac{y}{x}\right)^2 - n \frac{y}{x} + \left(\frac{1}{4} - m\right) = 0, \quad \therefore k_1 k_2 = \frac{\frac{1}{4} - m}{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{4}, \quad \text{又} \because k_1 k_3 = -1, \quad \therefore \frac{k_2}{k_3} = \frac{1}{4},$$

$$\text{即} \frac{\frac{y_P}{x_P + 2}}{\frac{y_P}{x_P + 1}} = \frac{1}{4}, \quad \therefore x_P = -\frac{2}{3}, \quad \therefore y_P = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}, \quad \therefore k_3 = \frac{\pm \frac{2\sqrt{6}}{3}}{-\frac{2}{3} + 1} = \pm 2\sqrt{6}, \quad \therefore k_1 = \pm \frac{\sqrt{6}}{12}, \quad \therefore l: y = \pm \frac{\sqrt{6}}{12}(x + 2).$$

达标训练

1. (2017·全国文) 设 A, B 为曲线 $C: y = \frac{x^2}{4}$ 上两点, A 与 B 的横坐标之和为 4

(1) 求直线 AB 的斜率

(2) 设 M 为曲线 C 上一点, C 在 M 处的切线与直线 AB 平行, 且 $AM \perp BM$, 求直线 AB 的方程.

2. (2013·上海) 已知椭圆 C 的两个焦点分别为 $F_1(-1, 0)$ 、 $F_2(1, 0)$, 短轴的两个端点分别为 B_1, B_2

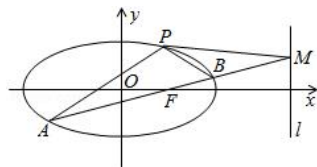
(1) 若 $\triangle F_1 B_1 B_2$ 为等边三角形, 求椭圆 C 的方程;

(2) 若椭圆 C 的短轴长为 2, 过点 F_2 的直线 l 与椭圆 C 相交于 P, Q 两点, 且 $\overline{F_1 P} \perp \overline{F_1 Q}$, 求直线 l 的方程.

3. (2013·江西) 如图, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P(1, \frac{3}{2})$, 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 直线 l 的方程为 $x = 4$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) AB 是经过右焦点 F 的任一弦 (不经过点 P), 设直线 AB 与直线 l 相交于点 M , 记 PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 . 问: 是否存在常数 λ , 使得 $k_1 + k_2 = \lambda k_3$? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 说明理由.



4. (2015·新课标I) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C: y = \frac{x^2}{4}$ 与直线 $l: y = kx + a (a > 0)$ 交于 M, N 两点.

(1) 当 $k = 0$ 时, 分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程.

(2) y 轴上是否存在点 P , 使得当 k 变动时, 总有 $\angle OPM = \angle OPN$? (说明理由)

5. (2018·眉山期末) 已知抛物线的顶点为原点, 关于 y 轴对称, 且过点 $N(-1, \frac{1}{2})$.

(1) 求抛物线的方程;

(2) 已知 $C(0, -2)$, 若直线 $y = kx + 2$ 与抛物线交于 A, B 两点, 记直线 CA, CB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求证: $k_1 k_2 + k^2$ 为定值.

6. (2017·济宁期末) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 其离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 短轴端点与焦点构成四边形的面积为 $2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若过点 $(-1, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A, B , O 为坐标原点, 当 $k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{1}{4}$ 时, 试求直线 l 的方程.