

专题 1 函数的切线问题

第一讲 切线的几何意义

1. 导数的几何意义:

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义就是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率.

注: $(k = f'(x_0) = \tan \alpha)$

切线方程 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ 的计算:

2. 在点 $A(x_0, y_0)$ 处的切线方程: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ 抓住关键: $\begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ k = f'(x_0) \end{cases}$

3. 过点 $A(x_1, y_1)$ 的切线方程: 设切点为 $P(x_0, y_0)$, 则斜率 $k = f'(x_0)$, 过切点的切线方程为: \because 过点 $A(x_1, y_1)$, $\therefore y_1 - y_0 = f'(x_0)(x_1 - x_0)$ 然后解出 x_0 的值. (x_0 有几个值, 就有几条切线, 三次函数多解)

4. 定理: 令 $\begin{cases} f(x) = e^x \\ g(x) = \ln x \end{cases}$ 过原点的切线斜率为 $\begin{cases} e \\ \frac{1}{e} \end{cases}$;

$\begin{cases} h(x) = e^{ax} \\ t(x) = \ln \frac{x}{a} \end{cases}$ 过原点的切线斜率为 $\begin{cases} ae \\ \frac{1}{ae} \end{cases}$

类推: $\begin{cases} f(x), h(x) \text{ 过 } (m, 0) \\ g(x), t(x) \text{ 过 } (0, m) \end{cases}$ 的切线斜率分别为 $\begin{cases} e^{m+1} \\ \frac{1}{e^{m+1}} \end{cases}$ (根据平移记忆) 和 $\begin{cases} ae^{am+1} \\ \frac{1}{ae^{am+1}} \end{cases}$ (不要求记忆)

考点 1 切线及斜率问题

【例 1】曲线 $y = xe^{x-1}$ 在点 $(1, 1)$ 处切线的斜率等于 ()

- A. $2e$ B. e C. 2 D. 1

【解析】 $f'(x) = x \cdot (e^{x-1})' + x'e^{x-1} = (x+1)e^{x-1}$, $k = f'(1) = 2e^0 = 2$, 选 C.

【例 2】设点 P 是曲线 $y = x^3 - \sqrt{3}x + \frac{3}{5}$ 上的任意一点, 点 P 处切线的倾斜角为 α , 则角 α 的范围是 ()

- A. $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ B. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$
C. $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ D. $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$

【解析】 $f'(x) = 3x^2 - \sqrt{3} = \tan \alpha$, $\because 3x^2 - \sqrt{3} \geq -\sqrt{3} \therefore \tan \alpha \geq -\sqrt{3} \therefore \frac{2\pi}{3} \leq \alpha < \pi$ (α 为第二象限角) 或 $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (α 为第一象限角).

【例 3】已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为_____.

【解析】 $\because f'(x) = \frac{2-x}{e^x}$, $\therefore f'(1) = \frac{1}{e}$, $\because f(1) = 0$, \therefore 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = \frac{1}{e}(x-1)$, 又 $f(x)$ 是偶函数, \therefore 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程与曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程关于 y 轴对称, 为 $y = -\frac{1}{e}(x+1)$, 故答案为 $y = -\frac{1}{e}(x+1)$.

第五章 导数

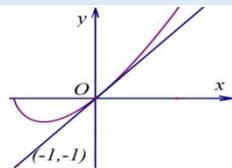
【例4】 设 P 是函数 $y = \sqrt{x}(x+1)$ 图象上异于原点的动点, 且该图象在点 P 处的切线的倾斜角为 θ , 则 θ 的取值范围是_____.

【解析】 由题意知 $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \therefore \tan\theta = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \sqrt{3} \therefore \theta \in [0, \pi) \therefore \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

【例5】 若 P 是函数 $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$ 图象上的动点, 点 $A(-1, -1)$, 则直线 AP 斜率的取值范围为()

- A. $[1, +\infty)$ B. $[0, 1]$ C. $(e^{-1}, e]$ D. $(-\infty, e^{-1}]$

【解析】 由题意可得: $f'(x) = \ln(x+1) + 1$, 结合函数的定义域可知, 函数在区间 $\left(-1, -1 + \frac{1}{e}\right)$ 上单调递减, 在区间 $\left(-1 + \frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增, 且 $f\left(-1 + \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} > -1$, 绘制函数图象如图所示, 当直线与函数图象相切时直线的斜率取得最小值, 设切点坐标为 $(x_0, (x_0+1)\ln(x_0+1))$, 该点的斜率为 $k = \ln(x_0+1) + 1$, 切线方程为: $y - (x_0+1)\ln(x_0+1) = [\ln(x_0+1) + 1](x - x_0)$, 切线过点 $(-1, -1)$, 则: $-1 - (x_0+1)\ln(x_0+1) = [\ln(x_0+1) + 1](-1 - x_0)$, 解得: $x_0 = 0$, 切线的斜率 $k = \ln(x_0+1) + 1 = 1$, 综上所述可得: 则直线 AP 斜率的取值范围为 $[1, +\infty)$.



【例6】 已知函数 $f(x) = mx^3 + nx^2$ 的图象在点 $(-1, 2)$ 处的切线恰好与直线 $3x + y = 0$ 平行, 若 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上单调递减, 则实数 t 的取值范围是_____.

【解析】 由题意知 $f(x) = mx^3 + nx^2$, $\therefore f'(x) = 3mx^2 + 2nx$. 由题意得 $\begin{cases} f(-1) = -m + n = 2 \\ f'(-1) = 3m - 2n = -3 \end{cases}$
解得 $\begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases}$, $\therefore f(x) = x^3 + 3x^2$, $\therefore f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$,
由 $f'(x) = 3x(x+2) < 0$, 得 $-2 < x < 0$, 所以函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-2, 0)$.
由题意得 $[t, t+1] \subseteq [-2, 0]$, $\therefore \begin{cases} t \geq -2 \\ t+1 \leq 0 \end{cases}$, 解得 $-2 \leq t \leq -1$.

考点2 切线条数问题

【例7】 过点 $A(m, m)$ 与曲线 $f(x) = x \ln x$ 相切的直线有且只有两条, 则 m 的取值范围是()

- A. $(-\infty, e)$ B. $(e, +\infty)$ C. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ D. $(1, +\infty)$

【解析】 设切点为 (x_0, y_0) , $f'(x) = \ln x + 1$, 所以切线方程为: $y - x_0 \ln x_0 = (\ln x_0 + 1)(x - x_0)$, 代入 $A(m, m)$, 得 $m - x_0 \ln x_0 = (\ln x_0 + 1)(m - x_0)$, 即这个关于 x_0 的方程有两个解. 化简方程为 $x_0 = m \ln x_0$, 即 $\frac{1}{m} = \frac{\ln x_0}{x_0}$, 令 $g(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$, $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, $g(e) = \frac{1}{e}$, $x \rightarrow +\infty$, $g(x) \rightarrow 0$, $g(1) = 0$, 所以 $0 < \frac{1}{m} < \frac{1}{e}$, 所以 $m > e$. 故选 B.

【例8】 已知曲线 $y = e^{x+a}$ 与 $y = x^2$ 恰好存在两条公切线, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $[2\ln 2 - 2, +\infty)$ B. $(2\ln 2, +\infty)$ C. $(-\infty, 2\ln 2 - 2]$ D. $(-\infty, 2\ln 2 - 2)$

【解析】 $y=x^2$ 的导数 $y'=2x$, $y=e^{x+a}$ 的导数为 $y'=e^{x+a}$, 设与曲线 $y=e^{x+a}$ 相切的切点为 (m, n) , $y=x^2$ 相切的切点为 (s, t) , 则有公共切线斜率为 $2s=e^{m+a}=\frac{t-n}{s-m}$, 又 $t=s^2$, $n=e^{m+a}$, 即有 $2s=\frac{s^2-2s}{s-m}$, 即为 $s-m=\frac{s}{2}-1$, 即有 $m=\frac{s+2}{2}(s>0)$, 则有 $e^{m+a}=2s$, 即为 $a=\ln 2s-\frac{s+2}{2}(s>0)$, 恰好存在两条公切线, 即 s 有两解, 令 $f(x)=\ln 2x-\frac{x+2}{2}(x>0)$, 则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$, 当 $x>0$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 递减, 当 $0<x<2$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 递增, 即有 $x=2$ 处 $f(x)$ 取得极大值, 也为最大值, 且为 $2\ln 2-2$, 由恰好存在两条公切线可得 $y=a$ 与 $y=f(x)$ 有两个交点, 结合函数的图象与单调性可得 a 的范围是 $a<2\ln 2-2$, 故选 D.

【例 9】 过点 $A(m, n)$ 与曲线 $f(x)=x\ln x$ 相切的直线有且只有两条, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, e)$ B. $(e, +\infty)$ C. $(0, \frac{1}{e})$ D. $(1, +\infty)$

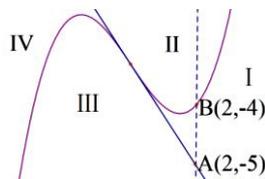
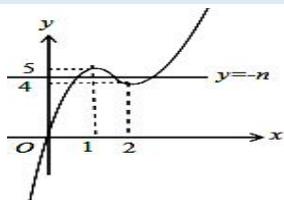
【解析】 设切点为 (x_0, y_0) , $f'(x)=\ln x+1$, 所以切线方程为: $y-x_0\ln x_0=(\ln x_0+1)(x-x_0)$, 代入 $A(m, n)$, 得 $m-x_0\ln x_0=(\ln x_0+1)(m-x_0)$, 即这个关于 x_0 的方程有两个解. 化简方程为 $m\ln x_0=x_0$, 即 $\frac{1}{m}=\frac{\ln x_0}{x_0}$, 令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$, $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, $g(e)=\frac{1}{e}$, $x\rightarrow+\infty$, $g(x)\rightarrow 0$, $g(1)=0$, 所以 $0<\frac{1}{m}<\frac{1}{e}$, 所以 $m>e$.

【例 10】 设函数 $f(x)=x^3-3x^2$, 若过点 $(2, n)$ 可作三条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切, 则实数 n 的取值范围是 ()

- A. $(-5, -4)$ B. $(-5, 0)$ C. $(-4, 0)$ D. $(-5, -3]$

【解析】 法一: $f(x)=x^3-3x^2$, 则 $f'(x)=3x^2-6x$, 设切点为 $(x_0, x_0^3-3x_0^2)$, 则 $f'(x_0)=3x_0^2-6x_0$. \therefore 过切点处的切线方程为 $y-x_0^3+3x_0^2=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)$, 把点 $(2, n)$ 代入得: $n-x_0^3+3x_0^2=(3x_0^2-6x_0)(2-x_0)$. 整理得: $2x_0^3-9x_0^2+12x_0+n=0$. 若过点 $(2, n)$ 可作三条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切, 则方程 $2x_0^3-9x_0^2+12x_0+n=0$ 有三个不同根 (左图) 令 $g(x)=2x^3-9x^2+12x$, 则 $g'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$, \therefore 当 $x\in(-\infty, 1)\cup(2, +\infty)$ 时, $g'(x)>0$; 当 $x\in(1, 2)$ 时, $g'(x)<0$, $\therefore g(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, 1)$ 和 $(2, +\infty)$; 单调减区间为 $(1, 2)$. \therefore 当 $x=1$ 时, $g(x)$ 有极大值为 $g(1)=5$; 当 $x=2$ 时, $g(x)$ 有极小值为 $g(2)=4$. 由 $4<-n<5$, 得 $-5<n<-4$. \therefore 实数 n 的取值范围是 $(-5, -4)$. 故选 A.

法二: $f(x)=x^3-3x^2$ 关于点 $(1, -2)$ 中心对称, $f'(x)=3x^2-6x\Rightarrow f'(1)=-3$, 在对称中心的切线方程为 $y=-3x+1$, $x=2$ 时, $y=-5$, $f(2)=-4$. 故当点 $(2, n)$ 位于区域 I, 有三条切线时, $-5<n<-4$. (如右图)



第五章 导数

考点3 零点、交点、极值点问题

【例 11】若函数 $f(x) = ae^x - x - 2a$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, \frac{1}{e})$ B. $(0, \frac{1}{e})$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, +\infty)$

【解析】法一： $\because f(x) = ae^x - x - 2a, \therefore f'(x) = ae^x - 1$.

①当 $a \leq 0$ 时， $f'(x) \leq 0$ 恒成立，故函数 $f(x)$ 在 R 上单调，不可能有两个零点；

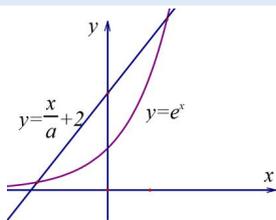
②当 $a > 0$ 时，令 $f'(x) = 0$ ，得 $x = \ln \frac{1}{a}$ ，函数在 $(-\infty, \ln \frac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\ln \frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(\ln \frac{1}{a}) = 1 - \ln \frac{1}{a} - 2a = 1 + \ln a - 2a$ ，令 $g(a) = 1 + \ln a - 2a, a > 0$ ，则 $g'(a) = \frac{1}{a} - 2 = \frac{1-2a}{a}$ ，

\therefore 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时， $g'(a) > 0, g(a)$ 单调递增；当 $a > \frac{1}{2}$ 时， $g'(a) < 0, g(a)$ 单调递

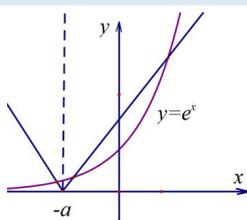
减. $\therefore g(a)_{\max} = g(\frac{1}{2}) = -\ln a < 0, \therefore f(x)$ 的最小值为 $f(\ln \frac{1}{a}) = 1 + \ln a - 2a < 0, \therefore$ 函数 $f(x) = ae^x - x - 2a$

有两个零点. 综上实数 a 的取值范围是 $(0, +\infty)$.

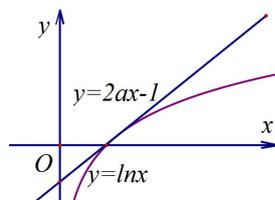
法二： $f(x) = ae^x - x - 2a = 0 \Rightarrow e^x = \frac{x}{a} + 2$ ，即 $y = e^x$ 与 $y = \frac{2}{a}x + 2$ 交点问题，由图可知， $a > 0$ 时，一定有两个交点， $a < 0$ 时，有仅有一个交点；故选 D.



例题 10



例题 11



例题 12

【例 12】关于 x 的方程 $2|x+a| = e^x$ 有 3 个不同的实数解，则实数 a 的取值范围为_____.

【解析】如图，临界情况为 $y = 2(x+a)$ 与 $y = e^x$ 相切的情况， $y' = e^x = 2$ ，则 $x = \ln 2$ ，所以切点坐标为 $(\ln 2, 2)$ ，则此时 $a = 1 - \ln 2$ ，所以只要 $y = 2|x+a|$ 图象向左移动，都会产生 3 个交点，所以 $a > 1 - \ln 2$ ，即 $(1 - \ln 2, +\infty)$.

【例 13】已知函数 $f(x) = x(\ln x - ax)$ 有两个极值点，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, \frac{1}{2})$ C. $(0, 1)$ D. $(0, +\infty)$

【解析】函数 $f(x) = x(\ln x - ax)$ ，则 $f'(x) = \ln x - ax + x(\frac{1}{x} - a) = \ln x - 2ax + 1$ ，

令 $f'(x) = \ln x - 2ax + 1 = 0$ 得 $\ln x = 2ax - 1$ ，函数 $f(x) = x(\ln x - ax)$ 有两个极值点，等价于

$f'(x) = \ln x - 2ax + 1$ 有两个零点，等价于函数 $y = \ln x$ 与 $y = 2ax - 1$ 的图象有两个交点，在同一坐标系中作出它们的图象（如图），当 $a = \frac{1}{2}$ 时，直线 $y = 2ax - 1$ 与 $y = \ln x$ 的图象相切，由图可知，当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时，

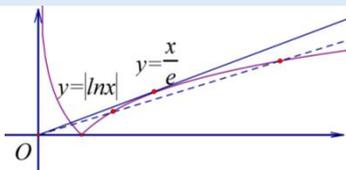
$y = \ln x$ 与 $y = 2ax - 1$ 的图象有两个交点，则实数 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{2})$ ，故选 B.

第五章 导数

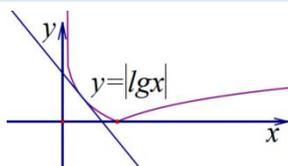
【例 14】 设 $f(x) = |\ln x|$, 若函数 $g(x) = f(x) - ax$ 在区间 $(0, e^2)$ 上有三个零点, 则实数 a 的取值范围 ()

- A. $(0, \frac{1}{e})$ B. $(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e})$ C. $(\frac{2}{e^2}, \frac{2}{e})$ D. $(\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e})$

【解析】 令 $g(x) = f(x) - ax = 0$, 可得 $f(x) = ax$. 在坐标系内画出函数 $f(x) = |\ln x|$ 的图象 (如图 9 所示). 当 $x > 1$ 时, $f(x) = \ln x$. 由 $y = \ln x$ 得 $y' = \frac{1}{x}$. 设过原点的直线 $y = ax$ 与函数 $y = \ln x$ 的图象切于点 $A(x_0, \ln x_0)$, 则有 $\begin{cases} \ln x_0 = ax_0 \\ a = \frac{1}{x_0} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x_0 = e \\ a = \frac{1}{e} \end{cases}$. 所以当直线 $y = ax$ 与函数 $y = \ln x$ 的图象切时 $a = \frac{1}{e}$. 又当直线 $y = ax$ 经过点 $B(e^2, 2)$ 时, 有 $2 = a \cdot e^2$, 解得 $a = \frac{2}{e^2}$. 结合图象可得当直线 $y = ax$ 与函数 $f(x) = |\ln x|$ 的图象有 3 个交点时, 实数 a 的取值范围是 $(\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e})$. 即函数 $g(x) = f(x) - ax$ 在区间 $(0, e^2)$ 上有三个零点时, 实数 a 的取值范围是 $(\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e})$. 故选 D.



例题 13



例题 14

【例 15】 对任意的 $x > 0$, 总有 $f(x) = a - x - |\lg x| \leq 0$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, \lg e - \lg(\lg e)]$ B. $(-\infty, 1]$ C. $[1, \lg e - \lg(\lg e)]$ D. $[\lg e - \lg(\lg e), +\infty)$

【解析】 原问题即 $|\lg x| \geq -x + a$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 考查临界情况, 即函数 $g(x) = |\lg x|$ 与 $h(x) = -x + a$ 相切时的情形, 如图 10, 很明显切点横坐标位于区间 $(0, 1)$ 内, 此时, $g(x) = -\lg x, g'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$, 由 $g'(x) = -1$ 可得: $x = -\frac{1}{\ln 10} = -\lg e$, 则切点坐标为: $(-\lg e, -\lg(\lg e))$, 切线方程为: $y + \lg(\lg e) = x + \lg e$, 令 $x = 0$ 可得纵截距为: $\lg e - \lg(\lg e)$, 结合如图所示的函数图象可得则 a 的取值范围是 $(-\infty, \lg e - \lg(\lg e)]$. 选 A.

【例 16】 已知定义在 $[\frac{1}{\pi}, \pi]$ 上的函数 $f(x)$, 满足 $f(x) = f(\frac{1}{x})$, 且当 $x \in [1, \pi]$ 时 $f(x) = \ln x$, 若函数 $g(x) = f(x) - ax$ 在 $[\frac{1}{\pi}, \pi]$ 上有唯一的零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(\frac{1}{e}, \pi \ln \pi]$ B. $(\frac{\ln \pi}{\pi}, \pi \ln \pi] \cup \{0\}$ C. $[0, \pi \ln \pi]$ D. $(\frac{1}{e}, \pi \ln \pi] \cup \{0\}$

【解析】 由题意知 $f(x) = f(\frac{1}{x})$, $x \in [1, \pi]$ 时, $f(x) = \ln x$, $\therefore x \in (\frac{1}{\pi}, 1]$ 时, $\frac{1}{x} \in [1, \pi]$, $f(\frac{1}{x}) = \ln \frac{1}{x} = -\ln x = f(x)$, $f(x) = -\ln x$, $g(x)$ 零点, 就是 $y = f(x)$ 与 $y = ax$ 的交点, 画出两函数图象, 如图, 由图 11 知, $k_{OA} = \pi \ln \pi$ 过原点与 $y = \ln x$ 相切的直线斜率为 $\frac{1}{e}$, 所有直线与曲线有一个交点的 a 的范围是 $(\frac{1}{e}, \pi \ln \pi] \cup \{0\}$, 故选 D.

第五章 导数

【例 22】若直线 $y = kx + b$ 为函数 $f(x) = \ln x$ 图象的一条切线, 则 $k + b$ 的最小值为_____.

【解析】设切点 $P(x_0, \ln x_0)$, 则 $k = f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$, 所以方程为 $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$, 即 $y = \frac{1}{x_0}x + \ln x_0 - 1$, 所以 $k = \frac{1}{x_0}, b = \ln x_0 - 1$, $g(x_0) = k + b = \frac{1}{x_0} + \ln x_0 - 1 (x_0 > 0)$, 可得 $g(x_0)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, 所以当 $x_0 = 1$ 时, $k + b$ 取得最小值 0.

考点 5 距离问题和平行切线问题

【例 23】设点 P 在曲线 $y = \frac{1}{2}e^x$ 上, 点 Q 在曲线 $y = \ln(2x)$ 上, 则 $|PQ|$ 最小值为 ()

- A. $1 - \ln 2$ B. $\sqrt{2}(1 - \ln 2)$ C. $1 + \ln 2$ D. $\sqrt{2}(1 + \ln 2)$

【解析】两函数互为反函数, 即图像关于 $y = x$ 对称, 函数 $y = \frac{1}{2}e^x$ 上的点 $(x, \frac{1}{2}e^x)$ 到直线 $y = x$ 的距离为 $\frac{|\frac{1}{2}e^x - x|}{\sqrt{2}}$, 设函数 $g(x) = \frac{1}{2}e^x - x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}e^x - 1$, 得 $g(x)_{\min} = 1 - \ln 2$, 所以 $d_{\min} = \frac{1 - \ln 2}{\sqrt{2}}$, 由图像关于 $y = x$ 对称得: $|PQ|$ 的最小值为 $2d_{\min} = \sqrt{2}(1 - \ln 2)$.

【例 24】直线 $y = m$ 分别与曲线 $y = 2(x + 1)$, 与 $y = x + \ln x$ 交于点 A, B , 则 $|AB|$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ B. 2 C. 3 D. $\frac{3}{2}$

【解析】由题意可知, 当过点 B 的切线与 $y = 2(x + 1)$ 平行时, $|AB|$ 取得最小值. 为此对 $y = x + \ln x$ 进行求导得 $y' = 1 + \frac{1}{x}$, 令 $y' = 2$, 解得 $x = 1$, 代入 $y = x + \ln x$, 知 $y = 1$, 所以当 $|BC|$ 取到最小值时, $m = 1$, 所以 $A(-\frac{1}{2}, 1), B(1, 1)$, 易知 $|AB| = 1 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$, 故选 D.

【例 25】已知函数 $f(x) = -f'(0)e^x + 2x$, 点 P 为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线 l 上的一点, 点 Q 在曲线 $y = e^x$ 上, 则 $|PQ|$ 的最小值为_____.

【解析】由 $f'(x) = -f'(0)e^x + 2$, 令 $x = 0$ 可得 $f'(0) = 1$, 所以 $f(x) = -e^x + 2x$, 所以切线的斜率 $k = f'(0) = 1$, 又 $f(0) = -1$, 故切线方程为 $x - y - 1 = 0$. 由题意可知与直线 $x - y - 1 = 0$ 平行且与曲线 $y = e^x$ 相切的切点到直线 $x - y - 1 = 0$ 的距离即为所求. 设切点为 $Q(t, e^t)$, 则 $k_1 = e^t = 1$, 故 $t = 0$, 即 $Q(0, 1)$, 该点到直线 $x - y - 1 = 0$ 的距离为 $d = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

【例 26】函数 $f(x) = e^x + x^2 + x + 1$ 与 $g(x)$ 的图象关于直线 $2x - y - 3 = 0$ 对称, P, Q 分别是函数 $f(x), g(x)$ 图象上的动点, 则 $|PQ|$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $2\sqrt{5}$

【解析】由题意得当 P 点处切线平行直线 $2x - y - 3 = 0$, Q 为 P 关于直线 $2x - y - 3 = 0$ 对称点时, $|PQ|$ 取最小值. $\because f'(x) = e^x + 2x + 1$, $\therefore f'(x) = e^x + 2x + 1 \Rightarrow e^x + 2x + 1 = 2 \Rightarrow P(0, 2)$, $|PQ|$ 的最小值为 $2 \times \frac{|0 - 2 - 3|}{\sqrt{1 + 4}} = 2\sqrt{5}$, 故选 D.

【例 27】已知实数 a, b 满足 $2a^2 - 5\ln a - b = 0, c \in \mathbb{R}$, 则 $(a-c)^2 + (b+c)^2$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{9}{2}$

【解析】考查 $\sqrt{(a-c)^2 + (b+c)^2}$ 的最小值: x 代换 a , y 代换 b , 则 x, y 满足: $2x^2 - 5\ln x - y = 0$, 即 $y = 2x^2 - 5\ln x (x > 0)$, 以 x 代换 c , 可得点 $(x, -x)$, 满足 $y+x=0$. 因此求 $\sqrt{(a-c)^2 + (b+c)^2}$ 的最小值即为求曲线 $y = 2x^2 - 5\ln x (x > 0)$ 上的点到直线 $y+x=0$ 的距离的最小值.

设直线 $y+x+m=0$ 与曲线 $y=f(x)=2x^2-5\ln x(x>0)$ 相切于点 $P(x_0, y_0)$,

$f'(x) = 4x - \frac{5}{x}$, 则 $f'(x_0) = 4x_0 - \frac{5}{x_0} = -1$, 解得 $x_0 = 1$, \therefore 切点为 $P(1, 2)$. \therefore 点 P 到直线 $y+x=0$ 的距

离 $d = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 得: $(a-c)^2 + (b+c)^2$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$.

【例 28】已知 $S = (x-a)^2 + (\ln x - a)^2 (a \in \mathbb{R})$, 则 S 的最小值为 ()

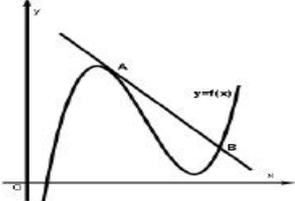
- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

【解析】设 $A(x, \ln x), B(a, a)$, 则问题化为求平面上两动点 $A(x, \ln x), B(a, a)$ 之间距离的平方的最小值的问题, 也即求曲线 $f(x) = \ln x$ 上的点到直线 $y=x$ 的点的距离最小值问题. 因 $f'(x) = \frac{1}{x}$, 设切点 $P(t, \ln t)$, 则切线的斜率 $k = \frac{1}{t}$, 由题设当 $\frac{1}{t} = 1$, 即 $t = 1$ 时, 点 $P(1, 0)$ 到直线 $y=x$ 的距离最近, 其最小值为 $d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 所以所求 S 的最小值为 $S_{\min} = \frac{1}{2}$, 故选 B.

达标训练

- 直线 $y = m$ 分别与曲线 $y = 2(x+1)$, 与 $y = x + \ln x$ 交于点 A, B , 则 $|AB|$ 的最小值为 ()
A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ B. 2 C. 3 D. $\frac{3}{2}$
- 已知函数 $f(x) = 10\sin x + \frac{1}{6}x^3$ 在 $x=0$ 处的切线与直线 $nx - y = 0$ 平行, 则二项式 $(1+x+x^2)(1-x)^n$ 展开式中 x^4 的系数为 ()
A. 120 B. 135 C. 140 D. 100
- 已知 $f(x) = (a-2)x + \frac{4x}{x+1} (x > 0)$, 若曲线 $f(x)$ 上存在不同两点 A, B , 使得曲线 $f(x)$ 在点 A, B 处的切线垂直, 则实数 a 的取值范围是 ()
A. $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ B. $(-2, 2)$ C. $(-\sqrt{3}, 2)$ D. $(-2, \sqrt{3})$
- 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 且满足 $b^2 + c^2 = 1$, 如果存在两条互相垂直的直线与函数 $f(x) = ax + b \cos x + c \sin x$ 的图象都相切, 则 $a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c$ 的取值范围是 ()
A. $[-2, 2]$ B. $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ C. $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$ D. $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$
- 设函数 $f(x) = (x-a)^2 + (2\ln x - 2a)^2$, 其中 $x > 0, a \in \mathbb{R}$, 存在 x_0 使得 $f(x_0) \leq \frac{4}{5}$ 成立, 则实数 a 的值是 ()
A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

第五章 导数

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的单调函数, 满足 $f[f(x)-e^x]=1$, 则 $f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 ()
- A. $y=x+1$ B. $y=x-1$ C. $y=-x+1$ D. $y=-x-1$
7. 已知 P_1, P_2 为曲线 $C: y=|\ln x|$ ($x>0$ 且 $x \neq 1$) 上的两点, 分别过 P_1, P_2 作曲线 C 的切线交 y 轴于 M, N 两点, 若 $\overrightarrow{P_1M} \cdot \overrightarrow{P_2N} = 0$, 则 $|\overline{MN}| =$ ()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
8. 如右图, 直线 $y=ax+2$ 与曲线 $y=f(x)$ 交于 A, B 两点, 其中 A 是切点, 记 $h(x)=\frac{f(x)}{x}, g(x)=f(x)-ax$, 则下列判断正确的是 ()
- A. $h(x)$ 只有一个极值点
 B. $h(x)$ 有两个极值点, 且极小值点小于极大值点
 C. $g(x)$ 的极小值点小于极大值点, 且极小值为 -2
 D. $g(x)$ 的极小值点大于极大值点, 且极大值为 2
- 
9. 过点 $A(2, 1)$ 作曲线 $f(x)=x^3-3x$ 的切线最多有 ()
- A. 3条 B. 2条 C. 1条 D. 0条
10. 设函数 $f(x)=3x^2-4ax$ ($a>0$) 与 $g(x)=2a^2\ln x+b$ 有公共点, 且在公共点处的切线方程相同, 则实数 b 的最大值为 ()
- A. $\frac{1}{e^2}$ B. $\frac{1}{2e^2}$ C. $\frac{1}{3e^2}$ D. $\frac{1}{4e^2}$
11. 已知定义在 $[\frac{1}{\pi}, \pi]$ 上的函数 $f(x)$, 满足 $f(x)=f(\frac{1}{x})$, 且当 $x \in [1, \pi]$ 时 $f(x)=\ln x$, 若函数 $g(x)=f(x)-ax$ 在 $[\frac{1}{\pi}, \pi]$ 上有唯一的零点, 则实数 a 的取值范围是 ()
- A. $[\frac{1}{e}, \pi \ln \pi]$ B. $(\frac{\ln \pi}{\pi}, \pi \ln \pi] \cup \{0\}$ C. $[0, \pi \ln \pi]$ D. $(\frac{1}{e}, \pi \ln \pi] \cup \{0\}$
12. 已知 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ($x_1 > x_2$) 是函数 $f(x)=x^3-|x|$ 图像上的两个不同点. 且在 A, B 两点处的切线互相平行, 则 $\frac{x_2}{x_1}$ 的取值范围是 ()
- A. $(-1, 1)$ B. $(-1, 2)$ C. $(-2, 0)$ D. $(-1, 0)$
13. 设函数 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-2ax$ ($a>0$) 与 $g(x)=a^2\ln x+b$ 有公共点, 且在公共点处的切线方程相同, 则实数 b 的最大值为 ()
- A. $\frac{1}{2e^2}$ B. $\frac{1}{2}e^2$ C. $\frac{1}{e}$ D. $-\frac{3}{2e^2}$
14. 设直线 l_1, l_2 分别是函数 $f(x)=\begin{cases} -\ln x, & 0 < x < 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ 图象上点 P_1, P_2 处的切线, l_1 与 l_2 垂直相交于点 P , 且 l_1, l_2 分别与 y 轴相交于点 A, B , 则 ΔPAB 的面积取值范围是 ()
- A. $(0, 1)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(0, 2)$
15. 函数 $f(x)=\ln x$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线 l 与函数 $g(x)=e^x$ 的图象也相切, 则满足条件的切点 P 的个数有 ()
- A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 3个
16. 已知函数 $f(x)=x-e^{\frac{x}{a}}$ ($a>0$), 且 $y=f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线 l 与曲线 $y=e^x$ 相切, 符合情况的切线 ()
- A. 有0条 B. 有1条 C. 有2条 D. 有3条
17. 若曲线 $f(x)=\frac{1}{a \ln(x+1)}$ ($e-1 < x < e^2-1$) 和 $g(x)=-x^3+x^2$ ($x < 0$) 上分别存在点 A, B , 使得 ΔAOB 是以原点 O 为直角顶点的直角三角形, 且斜边 AB 的中点在 y 轴上, 则实数 a 的取值范围是 ()
- A. (e, e^2) B. $(e, \frac{e^2}{2})$ C. $(1, e^2)$ D. $[1, e)$

第五章 导数

18. 已知函数 $f(x) = x\left(a - \frac{1}{e^x}\right)$, 曲线 $y = f(x)$ 上存在两个不同点, 使得曲线在这两点处的切线都与 y 轴垂直, 则实数 a 的取值范围是 ()
- A. $(-e^2, +\infty)$ B. $(-e^2, 0)$ C. $\left(-\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$ D. $\left(-\frac{1}{e^2}, 0\right)$
19. 已知函数 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \ln(-x) - ax$. 若直线 $y = x$ 与曲线 $y = f(x)$ 至少有两个交点, 则实数 a 的取值范围是 ()
- A. $\left[-1 - \frac{1}{e}, 1 - \frac{1}{e}\right]$ B. $\left(-1 - \frac{1}{e}, -1\right) \cup \left\{1 - \frac{1}{e}\right\}$
 C. $\left(1 - \frac{1}{e}, +\infty\right)$ D. $\left(-1 - \frac{1}{e}, -1\right) \cup \left[1 - \frac{1}{e}, +\infty\right)$
20. 若曲线 $C_1: y = ax^2 (a > 0)$ 与曲线 $C_2: y = e^x$ 存在公共切线, 则 a 的取值范围为 ()
- A. $\left[0, \frac{e^2}{8}\right]$ B. $\left[0, \frac{e^2}{4}\right]$ C. $\left[\frac{e^2}{8}, +\infty\right)$ D. $\left[\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$
21. 已知曲线 $y = x^2 + 1$ 在点 $P(x_0, x_0^2 + 1)$ 处的切线为 l , 若 l 也与函数 $y = \ln x, x \in (0, 1)$ 的图象相切, 则 x_0 满足 () (其中 $e = 2.71828\dots$)
- A. $1 < x_0 < \sqrt{2}$ B. $\sqrt{2} < x_0 < \sqrt{e}$ C. $\sqrt{e} < x_0 < \sqrt{3}$ D. $\sqrt{3} < x_0 < 2$
22. 已知曲线 $C_1: y = x^2$ 与曲线 $C_2: y = \ln x (x > \frac{\sqrt{2}}{2})$, 直线 l 是曲线 C_1 和曲线 C_2 的公切线, 设直线 l 与曲线 C_1 切点为 P , 则点 P 的横坐标 t 满足 ()
- A. $0 < t < \frac{1}{2e}$ B. $\frac{1}{2e} < t < \frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2} < t < \sqrt{2}$
23. 设函数 $f(x) = |\sin x|$ 的图象与直线 $y = kx (k > 0)$ 有且仅有三个公共点, 这三个公共点横坐标的最大值为 α , 则 $\alpha =$ ()
- A. $-\cos \alpha$ B. $\tan \alpha$ C. $-\sin \alpha$ D. $-\tan \alpha$
24. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 的可导函数, $f'(x)$ 为其导函数, 当 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ 时, $\frac{2f(x) + xf'(x)}{x-1} > 0$, 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线的斜率为 $-\frac{3}{4}$, 则 $f(1) =$ ()
- A. 0 B. 1 C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{5}$
25. 函数 $y = f(x)$ 图象上不同两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 处的切线的斜率分别是 k_A, k_B , 规定 $\varphi(A, B) = \frac{|k_A - k_B|}{|AB|}$ 叫做曲线在点 A 与点 B 之间的“弯曲度”. 设曲线 $y = e^x$ 上不同的两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 且 $x_1 - x_2 = 1$, 若 $t \cdot \varphi(A, B) < \sqrt{3}$ 恒成立, 则实数 t 的取值范围是 ()
- A. $(-\infty, 3]$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(-\infty, \sqrt{3}]$ D. $[1, 3]$
26. 过点 $M(2, -2p)$ 引抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的切线, 切点分别为 A, B , 若 $|AB| = 4\sqrt{10}$, 则 P 的值是 ()
- A. 1 或 2 B. $\sqrt{2}$ 或 2 C. 1 D. 2
27. 已知曲线 $f(x) = x^3 + x^2 + x + 3$ 在 $x = -1$ 处的切线与抛物线 $y = 2px^2$ 相切, 则抛物线的准线方程为 ()
- A. $x = \frac{1}{16}$ B. $x = 1$ C. $y = -1$ D. $y = 1$

28. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + a, & x < 0 \\ -\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 的图象上存在不同的两点 A, B , 使得曲线 $y = f(x)$ 在这两点处的切线重合, 则实数 a 的取值范围是_____.

29. 若 $2f(x) + f(-x) = x^3 + x + 3$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为_____.

第五章 导数

30. 直线 $\overline{FB} = (x_2, y_2 - 1)$ 分别是函数 $f(x) = \sin x, x \in [0, \pi]$ 图象上点 P_1, P_2 处的切线, l_1, l_2 垂直相交于点 P , 且 l_1, l_2 分别与 y 轴相交于点 A, B , 则 ΔPAB 的面积为_____.
31. 已知函数 $f(x) = x^n - x^{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线与 y 轴的交点的纵坐标为 b_n , 则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为_____.
32. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x^2$. 若直线 l 与曲线 $f(x), g(x)$ 都相切, 则直线 l 的斜率为_____.
33. 设 P 是函数 $y = \sqrt{x}(x+1)$ 图象上异于原点的动点, 且该图象在点 P 处的切线的倾斜角为 θ , 则 θ 的取值范围是_____.
34. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 与函数 $f(x) = 2x^2 + a^2 (x > 0)$ 和 $g(x) = 2x^3 + a^2 (x > 0)$ 均相切 (其中 a 为常数), 切点分别为 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2$ 的值为_____.
35. 过点 $(1, -1)$ 与曲线 $f(x) = x^3 - 2x$ 相切的直线方程是_____.
36. 若直线 $y = kx + b$ 为函数 $f(x) = \ln x$ 图象的一条切线, 则 $k + b$ 的最小值为_____.
37. 若曲线 $y = \frac{n}{2}x + \ln x (n \in \mathbb{N}^*)$ 在 $x = \frac{2}{n}$ 处的切线斜率为 a_n , 则数列 $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和 $S_n =$ _____.
38. 曲线 $y = a\sqrt{x} (a > 0)$ 与曲线 $y = \ln\sqrt{x}$ 有公共点, 且在公共点处的切线相同, 则 a 的值为_____.
39. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为_____.
40. 已知函数 $f(x) = x^3$. 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_1, f(x_1))$ 处的切线与该曲线交于另一点 $Q(x_2, f(x_2))$, 记 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导数, 则 $\frac{f'(x_1)}{f'(x_2)}$ 的值为_____.
41. 若实数 a, b, c, d 满足 $\frac{2a^2 - \ln a}{b} = \frac{3c - 2}{d} = 1$, 则 $(a-c)^2 + (b-d)^2$ 是最小值为_____.
42. 已知函数 $f(x) = (3\ln x - x^2 - a - 2)^2 + (x-a)^2 (a \in \mathbb{R})$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq 8$ 有解, 则实数 a 为_____.
43. 已知函数 $f(x) = 3\ln x - \frac{1}{2}x^2 + x, g(x) = 3x + \frac{5}{2}$, P, Q 分别 $f(x), g(x)$ 为图象上任意一点, 则 $|PQ|$ 的最小值为_____.
44. 已知函数 $f(x) = x^2 + (\ln 3x)^2 - 2a(x + 3\ln 3x) + 10a^2$ 若存在 x_0 使得 $f(x_0) \leq \frac{1}{10}$ 有解, 则实数 a 为_____.