

专题 2 指数切线放缩

第一讲 由 $e^x \geq x+1$ 引出的放缩

① $e^{x-1} \geq x$. (用 $x-1$ 替换 x , 切点横坐标是 $x=1$), 通常表达为 $e^x \geq ex$.

② $e^{x+a} \geq x+a+1$. (用 $x+a$ 替换 x , 切点横坐标是 $x=-a$), 平移模型, 找到切点是关键.

③ $xe^x \geq x + \ln x + 1$. (用 $x + \ln x$ 替换 x , 切点横坐标满足 $x + \ln x = 0$), 常见的指对跨阶改头换面模型, 切线的方程是按照指数函数给予的.

④ $e^x \geq \frac{e^2}{4}x^2 > x^2 (x > 0)$ (用 $\frac{x}{2}$ 替换 x , 切点横坐标是 $x=2$); 通常有 $e^{\frac{x}{n}} \geq e \cdot \frac{x}{n} (x > 0)$ 的构造模型.

在一些解答题的书写过程中, 通常要用上“指数找基友”模型, 具体一些书写过程大家可以参照秒 1 的“对数单身狗, 指数找基友”专题, 这里不详述.

【例 1】 (2019·济宁二模) 已知 a, b 为正实数, 直线 $y = x - a + 2$ 与曲线 $y = e^{x+b} - 1$ 相切, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 ()

A. 1

B. 2

C. 4

D. 8

【解析】 根据 $e^x \geq x+1$, 则 $e^{x+b} - 1 \geq x+b = x-a+2$, 故 $a+b=2$, 故 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{1}{2}(\sqrt{1} + \sqrt{1})^2 = 2$, 当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立, 此时取得最小值 2. 故选 B.

【例 2】 (2019·江西模拟) 已知函数 $f(x) = xe^{ax-1} - \ln x - ax$, $a \in (-\infty, -\frac{1}{e^2}]$, 函数 $f(x)$ 的最小值 M , 则实数 M 的最小值是 ()

A. -1

B. $-\frac{1}{e}$

C. 0

D. $-\frac{1}{e^3}$

【解析】 $f(x) = xe^{ax-1} - \ln x - ax = e^{ax+\ln x-1} - \ln x - ax \geq ax + \ln x - 1 + 1 - \ln x - ax = 0$, 切点满足条件 $ax + \ln x = 1$, 即 $a = \frac{1 - \ln x}{x}$, $g(x) = \frac{1 - \ln x}{x} = \frac{1}{e} \cdot \frac{e - \ln e}{x} \in \left[-\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$, 显然 $a = g(x)$ 时可以获得相切取等条件, 此题小用了同构式模型求最值, 减低计算成本, $\therefore M$ 的最小值为 0. 故选 C.

【例 3】 (2019·山东模拟) 设函数 $f(x) = e^{2x} - a(x+1)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) > 0$ 对 $x \in R$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

【解析】 (1) 由函数的解析式可得: $f'(x) = 2e^{2x} - a$, 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 R 上单调递增, 当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$ 可得 $x = \frac{1}{2} \ln \frac{a}{2}$, 则 $x \in (-\infty, \frac{1}{2} \ln \frac{a}{2})$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, $x \in (\frac{1}{2} \ln \frac{a}{2}, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

(2) 法一: 由题意可得: $e^{2x} - a(x+1) > 0$, $e^{2x} > a(x+1)$ 恒成立, 很明显 $a < 0$ 不合题意, 当 $a \geq 0$ 时, 原问题等价于指数函数 $y = (e^2)^x$ 的图象恒在 $y = a(x+1)$ 的上方, 直线 $y = a(x+1)$ 恒过定点 $(-1, 0)$, 考查函数 $y = (e^2)^x$ 过 $(-1, 0)$ 的切线方程: 易知切点坐标为 (x_0, e^{2x_0}) , 切线斜率为 $k = 2e^{2x_0}$, 故切线方程为: $y - e^{2x_0} = 2e^{2x_0}(x - x_0)$, 切线过 $(-1, 0)$, 故 $0 - e^{2x_0} = 2e^{2x_0}(-1 - x_0)$, 解得: $x_0 = -\frac{1}{2}$, $k = 2e^{2x_0} = 2 \cdot e^{-1} = \frac{2}{e}$, 综上可得, 实数 a 的取值范围是 $[0, \frac{2}{e})$.

法二: 构造函数 $g(x) = e^x - x - 1$, 显然 $g(x) \geq 0$ 恒成立, 当仅当 $x=0$ 时等号成立, 要使 $e^{2x} > a(x+1)$ 恒成立, 很明显 $a < 0$ 不合题意, 令 $t = 2x$, 即 $e^t > \frac{a}{2}(t+2) \Rightarrow \frac{1}{e}e^{t+1} > \frac{a}{2}(t+2)$, 当仅当 $t = -1$ 取得相切等号, 故 $0 \leq a < \frac{2}{e}$.

第五章 导数

第二讲 二次函数处在特殊位置相切的放缩表达式

⑤ $x=0$ 处的相切构造: $e^x \geq x^2 + 1$; $e^x \geq \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

⑥ $x=1$ 处的相切构造: $e^x \geq ex + (x-1)^2 (x \geq 0)$.

【例 4】 (2019·长春四模) 已知函数 $f(x) = e^x - x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 若对任意 $x > 0$, $f(x) > \frac{1}{2}ax^2 + 1$ 有解, 求 a 的取值范围.

【解析】 (1) 令 $f'(x) = e^x - 1 = 0$, $x = 0$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↓	极小值	↑

$\therefore f(x)_{\text{极小值}} = f(0) = 1$, 无极大值;

(2) 对任意 $x > 0$, $f(x) > \frac{1}{2}ax^2 + 1$ 即 $e^x - x - \frac{1}{2}ax^2 - 1 > 0$, 设 $g(x) = e^x - x - \frac{1}{2}ax^2 - 1$, $g'(x) = e^x - 1 - ax$,

① 当 $a \leq 0$ 时, $g'(x)$ 单调递增, $g'(0) = 0$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, $g(x) > g(0) = 0$, 成立;

② 当 $0 < a \leq 1$ 时, 令 $h(x) = g'(x)$, $h'(x) = e^x - a > 0$, $g'(x)$ 单调递增, $g'(0) = 0$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, $g(x) > g(0) = 0$, 成立;

③ 当 $a > 1$ 时, 当 $0 < x < \ln a$ 时, $h'(x) = e^x - a < 0$, $g'(x)$ 单调递减, $g'(0) = 0$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

$g(x) < g(0) = 0$, 不成立. 综上, $a \leq 1$.

【例 5】 (2019·洛阳一模) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2 - 1 (x \in \mathbb{R})$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 e , 求 a 的值;

(2) 若 $0 \leq a \leq \frac{e}{2}$, 求证: 当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 的图象恒在 x 轴上方.

【解析】 (1) 函数 $f(x) = e^x - ax^2 - 1 (x \in \mathbb{R})$. 可得 $f'(x) = e^x - 2ax$, 曲线 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 e ,

$\therefore f'(1) = e - 2a = e$, $\therefore a = 0$.

(2) 法一: $f'(x) = e^x - 2ax$, 令 $h(x) = f'(x)$, $h'(x) = e^x - 2a$, (i) 当 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) > 0$, $f'(x)$ 单调递增, $f'(x) > f'(0) = 1$, $f(x)$ 单调递增, $f(x) > f(0) = 0$, 满足题意. (ii) 当 $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e}{2}$ 时, $h'(x) = e^x - 2a = 0$, 解得 $x = \ln 2a$. 当 $x \in (0, \ln 2a)$, $h'(x) < 0$, $f'(x)$ 单调递减; 当 $x \in (\ln 2a, +\infty)$, $h'(x) > 0$, $f'(x)$ 单调递增, 此时 $f'(x)_{\min} = f'(\ln 2a) = e^{\ln 2a} - 2a \ln 2a = 2a(1 - \ln 2a)$, $\because a \leq \frac{e}{2}$, $1 - \ln 2a \geq 0$, 即 $f'(x)_{\min} > 0$, $\therefore f(x)$ 单调递增, $f(x) > f(0) = 0$, 满足题意.

综上所述: 当 $0 \leq a \leq \frac{e}{2}$ 且 $x > 0$ 时, $f(x)$ 的图象恒在 x 轴上方.

法二: 构造函数 $g(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$, $g'(x) = \frac{-(x-1)^2}{e^x} \leq 0$, 显然 $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递减, 故 $g(x)_{\max} = g(0) = 1$,

即 $e^x > x^2 + 1 > \frac{e}{2}x^2 + 1$, 命题得证.

第五章 导数

【例 6】 (2019·南雄模拟第二问) 证明: $e^x > x^2 - (2-e)\ln(x+1) + 1$.

【解析】 构造 $h(x) = \frac{ex + (x-1)^2}{e^x} (x > 0)$, 则 $h'(x) = \frac{-(x-1)(x+e-3)}{e^x}$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x) \uparrow$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x) \downarrow$, 得 $h(x)_{\max} = h(1) = 1$, 所以 $e^x \geq ex + (x-1)^2$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 要证 $e^x > x^2 - (2-e)\ln(x+1) + 1$, 等价于证, $ex + x^2 - 2x + 1 \geq x^2 - (2-e)\ln(x+1) + 1$ (当且仅当 $x=0$ 时等号成立) 即 $ex - 2x \geq (e-2)\ln(x+1) \Rightarrow x(e-2) \geq (e-2)\ln(x+1) \Rightarrow x \geq \ln(x+1)$ (当且仅当 $x=0$ 时等号成立).

【例 7】 (2019·越秀期末) 若 $e^x \geq ex + m \ln^2 x$ 对任意的 $x > 0$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

【解析】 $e^x \geq ex + m \ln^2 x \Leftrightarrow e^x - ex \geq m \ln^2 x$ 由 $\ln x \leq x-1$ 得 $\ln^2 x \leq (x-1)^2$ (当且仅当 $x=1$ 时等号成立), 又 $e^x \geq ex + (x-1)^2$ (当且仅当 $x=1$ 时等号成立), 得 $(x-1)^2 \geq m(x-1)^2$, 即 $m \leq 1$.

【例 8】 (2019·郑州二模) 已知函数 $f(x) = e^x - x^2$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(2) 求证: 当 $x > 0$ 时, $\frac{e^x + (2-e)x - 1}{x} \geq \ln x + 1$.

【解析】 (1) $f(x) = e^x - x^2$, $f'(x) = e^x - 2x$, $f'(1) = e - 2$, $f(1) = e - 1$, 所以曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y = (e-2)(x-1) + e-1$, 即 $y = (e-2)x + 1$;

(2) 法一常规法: 令 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = e^x - 2$, 当 $x < \ln 2$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > \ln 2$ 时, $g'(x) > 0$, 所以函数 $g(x) = f'(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2)$ 上单点递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单点递增,

$g(x)_{\min} = g(\ln 2) = f'(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$, 所以函数 $f(x) = e^x - x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y = (e-2)(x-1) + e-1$, $f(1) = e-1$, 可猜测函数 $f(x)$ 的图像恒在切线 $y = (e-2)x + 1$ 的上方. 先证明当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq (e-2)x + 1$, 设 $h(x) = f(x) - (e-2)x - 1 (x > 0)$, $h'(x) = e^x - 2x - (e-2)$, $h''(x) = e^x - 2$, 当 $x < \ln 2$ 时, $h''(x) < 0$, 当 $x > \ln 2$ 时, $h''(x) > 0$, 所以函数 $h'(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2)$ 上单点递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单点递增, 由 $h'(0) = 3 - e > 0$, $h'(1) = 0$, $0 < \ln 2 < 1$, 所以 $h'(\ln 2) < 0$, 所以存在 $x_0 \in (0, \ln 2)$, 使得 $h'(x_0) = 0$, 所以当 $x \in (0, x_0) \cup (1, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x \in (x_0, 1)$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $x \in (0, x_0) \cup (1, +\infty)$ 单调递增, 在 $x \in (x_0, 1)$ 单调递减. 因为 $h(0) = h(1) = 0$, 所以 $h(x) \geq 0$, 即 $f(x) \geq (e-2)x + 1$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号, 所以当 $x > 0$ 时, $e^x - x^2 \geq (e-2)x + 1$, 变形可得

$\frac{e^x + (2-e)x - 1}{x} \geq x$, 又 $x \geq \ln x + 1$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号, 所以 $\frac{e^x + (2-e)x - 1}{x} \geq \ln x + 1$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号, 得证.

第五章 导数

法二秘籍法：构造 $h(x) = \frac{ex + (x-1)^2}{e^x} (x > 0)$ ，则 $h'(x) = \frac{-(x-1)(x+e-3)}{e^x}$ ，当 $x \in (0, 1)$ 时，

$h'(x) > 0$ ， $h(x) \uparrow$ ，当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $h'(x) < 0$ ， $h(x) \downarrow$ ，得 $h(x)_{\max} = h(1) = 1$ ，所以 $e^x \geq ex + (x-1)^2$ 对任

意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立（当且仅当 $x=1$ 时取“=”），要证 $\frac{e^x + (2-e)x - 1}{x} \geq \ln x + 1$ 等价于证

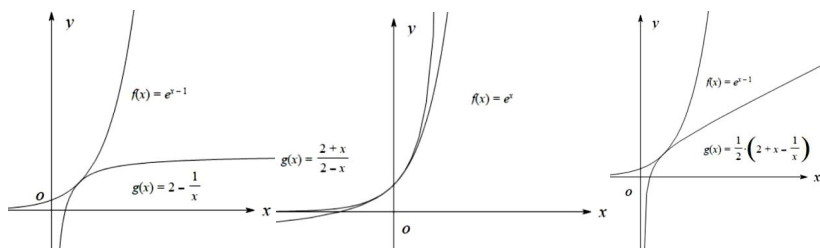
$e^x + (2-e)x - 1 \geq x \ln x + x$ ，即证 $ex + (x-1)^2 + (2-e)x - 1 \geq x \ln x + x$ ，即 $x^2 \geq x \ln x + x \Rightarrow \ln x \leq x - 1$ （当且仅当 $x=1$ 时取“=”）得证。

第三讲 反比例函数在特殊位置相切的放缩表达式

⑦ $x=1$ 处的相切构造 $e^{x-1} \geq 2 - \frac{1}{x}$ ，或者 $xe^{x-1} \geq 2x - 1$ 切点为 $(1, 1)$ ，利用 $e^{x-1} - x + x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$ 证明；

$e^{x-1} \geq \frac{1}{2}(2+x-\frac{1}{x})$ ，或者 $xe^{x-1} \geq \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$ 证明过程用求切线方程或者参照“指数找基友”即可。

⑧ $x=0$ 处的相切构造 $e^x \leq \frac{2+x}{2-x} (0 < x < 2)$ 证明过程按照“指数找基友”即可。



【例 9】（2019·肇庆三模）已知函数 $f(x) = xe^x - mx + \frac{m}{2}$ (e 为自然对数的底数) 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点，则 m 的范围是 ()

A. $(0, e)$

B. $(0, 2e)$

C. $(e, +\infty)$

D. $(2e, +\infty)$

【解析】法一：由 $f(x) = xe^x - mx + \frac{m}{2} = 0$ 得 $xe^x = mx - \frac{m}{2} = m(x - \frac{1}{2})$ ，当 $x = \frac{1}{2}$ 时，方程不成立，即 $x \neq \frac{1}{2}$ ，

则 $m = \frac{xe^x}{x - \frac{1}{2}}$ ，设 $h(x) = \frac{xe^x}{x - \frac{1}{2}}$ ，($x > 0$ 且 $x \neq \frac{1}{2}$)，则 $h'(x) = \frac{(xe^x)'(x - \frac{1}{2}) - xe^x}{(x - \frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{2}e^x(x-1)(2x+1)}{(x - \frac{1}{2})^2}$ ， $\because x > 0$ 且

$x \neq \frac{1}{2}$ ， \therefore 由 $h'(x) = 0$ 得 $x = 1$ ，当 $x > 1$ 时， $h'(x) > 0$ ，函数为增函数，当 $0 < x < 1$ 且 $x \neq \frac{1}{2}$ 时， $h'(x) < 0$ ，函

数为减函数，则当 $x=1$ 时函数取得极小值，极小值为 $h(1) = 2e$ ，当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时， $h(x) < 0$ ，且单调递减，

作出函数 $h(x)$ 的图象如图：要使 $m = \frac{xe^x}{x - \frac{1}{2}}$ 有两个不同的根，则 $m > 2e$ 即可，即实数 m 的取值范围是 $(2e, +\infty)$ ，

故选 D。

法二：由 $f(x) = xe^x - mx + \frac{m}{2} = 0$ 得 $xe^x = mx - \frac{m}{2} = m(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow e^{x-1} = \frac{m}{2e}(2 - \frac{1}{x})$ ，要使 $e^{x-1} = \frac{m}{2e}(2 - \frac{1}{x})$ 有两个

不同的根，则 $m > 2e$ 即可，即实数 m 的取值范围是 $(2e, +\infty)$ ，故选 D。

【例 10】 (2019·齐齐哈尔期末) 曲线 $f(x) = \frac{xe^x}{e}$, $g(x) = ax - 1$, 若曲线 $g(x) \leq f(x)$, 求实数 a 的取值范围_____.

【解析】 $g(x) \leq f(x) \Leftrightarrow \frac{xe^x}{e} \leq ax - 1$, 即 $xe^{x-1} \geq ax - 1$ 根据切线放缩秘籍⑦ $xe^{x-1} \geq 2x - 1$ 得 $a \leq 2$.

注: 证明 $xe^{x-1} \geq 2x - 1$, 也可这样证 $xe^{x-1} \geq x^2 \geq 2x - 1$.

达标训练

- (2019·岳麓模拟) 已知 $a \in R$, 函数 $f(x) = e^{x-1} - ax$ 的图象与 x 轴切于点 $P(x_0, 0)$, 则实数 a, x_0 的值分别为 ()

A. 1, 1 B. -1, 1 C. 1, -1 D. -1, -1
- (2019·广东二模) 若函数 $f(x) = x^3 - ke^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 k 的取值范围为 ()

A. $[0, +\infty)$ B. $[\frac{27}{e^2}, +\infty)$ C. $[\frac{12}{e^2}, +\infty)$ D. $[\frac{3}{e}, +\infty)$
- (2019·成都模拟) 已知直线 l 即是曲线 $C_1: y = e^x$ 的切线, 又是曲线 $C_2: y = \frac{1}{4}e^2x^2$ 的切线, 则直线 l 在 x 轴上的截距为 ()

A. 2 B. 1 C. e^2 D. $-e^2$
- (2019·德阳模拟) 函数 $f(x) = 2e^x - a(x-1)^2$ 有且只有一个零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(\frac{e}{4}, 1)$ B. $(1, 2\sqrt{e})$ C. $(0, \frac{e^3}{2})$ D. $(-\infty, \frac{e^3}{2})$
- (2019·河南三模) 若函数 $f(x) = e^x - (m+1)\ln x + 2(m+1)x - 1$ 恰有两个极值点, 则 m 的取值范围为 ()

A. $(-e^2, -e)$ B. $(-\infty, -\frac{e}{2})$ C. $(-\infty, -\frac{1}{2})$ D. $(-\infty, -e-1)$
- (2018·香坊月考) 已知函数 $f(x) = e^x - x^2 + a$, $x \in R$ 的图象在点 $x=0$ 处的切线为 $y = bx$.
 - 求函数 $f(x)$ 的解析式;
 - 当 $x \in R$ 时, 求证: $f(x) \geq -x^2 + x$.
- (2018·麒麟月考) 已知函数 $f(x) = ae^x - 2x^2$.
 - 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线方程;
 - 若函数 $f(x)$ 为 R 上的单调递增函数, 试求 a 的取值范围.
- (2019·亳州期中) 已知函数 $f(x) = e^x - a(x-1)^2$, 其中 e 为自然对数的底数.
 - 求证: 当 $a=0$ 时, 对任意 $x \in [0, +\infty)$ 都有 $f(x) > x^2$;
 - 若函数 $f(x)$ 有两个极值点, 求实数 a 的取值范围.
- (2018·靖远期末) 已知函数 $f(x) = ax^2 - e^x (a \in R)$.
 - 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 y 轴垂直, 求 $y = f'(x)$ 的最大值;
 - 证明: 当 $1 < a \leq \frac{e}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上是单调函数.
- (2019·香坊月考) 已知函数 $f(x) = e^x - x^2 + a$, $x \in R$ 的图象在点 $x=0$ 处的切线为 $y = bx$.
 - 求函数 $f(x)$ 的解析式;
 - 当 $x \in R$ 时, 求证: $f(x) \geq -x^2 + x$.

第五章 导数

11. (2019·四川二模) 已知函数 $f(x) = e^x - x - a (a \in R)$.

- (1) 当 $a = 0$ 时, 求证: $f(x) > x$;
- (2) 讨论函数 $f(x)$ 在 R 上的零点个数, 并求出相对应的 a 的取值范围.

12. (2019·安庆模拟) 已知函数 $f(x) = (x-1)e^x$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和零点;
- (2) 若 $f(x) \geq ax - e$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

13. (2019·新乡二模) 已知函数 $f(x) = e^x + ax + b$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $2x - y + 1 = 0$.

- (1) 求 $f(x)$ 的表达式;
- (2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq x^2 + mx + 1$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

14. (2019·武汉模拟) 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - 1$

- (1) 若直线 $y = x + a$ 为 $f(x)$ 的切线, 求 a 的值.
- (2) 若 $\forall x \in [0, +\infty)$, $f(x) \geq bx$ 恒成立, 求 b 的取值范围.

15. (2019·天津二模) 已知函数 $f(x) = (x-3)e^x + a(x-3)^2$ (e 为自然对数的底数), 其中 $a \in R$.

- (1) 若 $a = 0$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 求 $f(x)$ 零点的个数.

16. (2019·陕西二模) 已知函数 $f(x) = e^x - ax + 2 (a \in R)$, $g(x) = xe^x + 3$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的极值;
- (2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 求证: $a \geq 0$.

17. (2019·西安模拟) 已知函数 $f(x) = e^x - x^2 + 2a + b (x \in R)$ 的图象在 $x = 0$ 处的切线为 $y = bx$. (e 为自然对数的底数).

- (1) 求 a, b 的值;
- (2) 当 $x \in R$ 时, 求证: $f(x) \geq -x^2 + x$.

18. (2019·扬州模拟) 已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{e^x}, g(x) = 1 - ax^2 (a \in R)$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的极值;
- (2) 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 判断方程 $f(x) = g(x)$ 的实根个数, 并加以证明;
- (3) 求证: 当 $a \geq 1$ 时, 对于任意实数 $x \in [-1, +\infty)$, 不等式 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立.

19. (2019·揭阳模拟) 已知函数 $f(x) = e^x - m(x+1) + 1 (m \in R)$.

- (1) 若函数 $f(x)$ 的极小值为 1, 求实数 m 的值;
- (2) 当 $x \geq 0$ 时, 不等式 $f(x) + \frac{m}{2} \ln(x+1) \geq 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

20. (2019·福建模拟) 已知函数 $f(x) = x(e^{2x} - a)$.

- (1) 若 $y = 2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 求 a 的值;
- (2) 若 $f(x) \geq 1 + x + \ln x$, 求 a 的取值范围.

21. (2018·常德月考) 已知函数 $f(x) = e^x + ax - 1$ (e 是自然对数的底数)

- (1) 当 $a = 1$ 时, 求点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (2) 若 $f(x) \geq x^2$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.