专题 4　三次函数的图像和性质

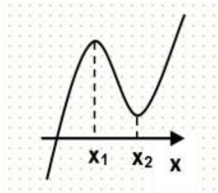
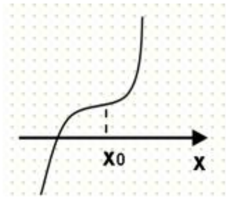
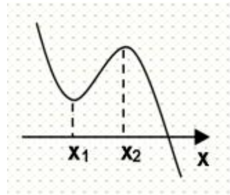
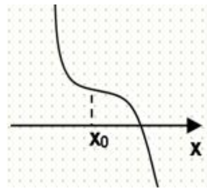
第一讲 三次函数的基本性质

设三次函数为 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$（a、b、c、$d\in R$ 且 $a\neq0$），其基本性质有：

性质一：定义域为 R.

性质二：值域为 R，函数在整个定义域上没有最大值、最小值.

性质三：单调性和图象.

	$a>0$		$a<0$	
	$\Delta>0$	$\Delta\le0$	$\Delta>0$	$\Delta\le0$
图像				

当 $a>0$ 时，先看二次函数 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$， $\Delta=4b^2-12ac=4(b^2-3ac)$

①当 $\Delta=4b^2-12ac=4(b^2-3ac)>0$，即 $b^2-3ac>0$ 时， $f'(x)$ 与 x 轴有两个交点 x_1， x_2， $f(x)$ 形成三个单点区间和两个极值点 x_1， x_2，图像如图 1，2.

②当 $\Delta=4b^2-12ac=4(b^2-3ac)=0$，即 $b^2-3ac=0$ 时， $f'(x)$ 与 x 轴有两个等根 x_1， x_2， $f(x)$ 没有极值点图像如图 3，4.

③当 $\Delta=4b^2-12ac=4(b^2-3ac)<0$，即 $b^2-3ac<0$ 时， $f'(x)$ 与 x 轴没有交点， $f(x)$ 没有极值点，图像如图 5，6.

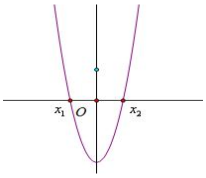


图 1

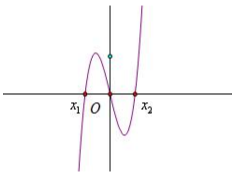


图 2

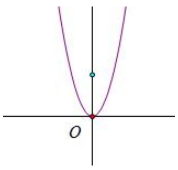


图 3

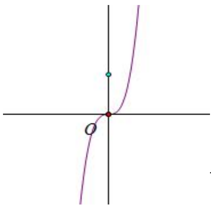


图 4

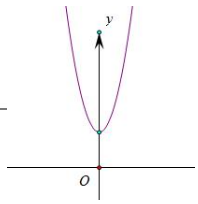


图 5

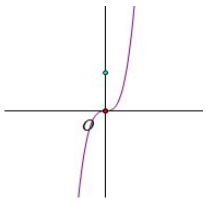


图 6

当 $a<0$ 时，同理先看二次函数 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$， $.\Delta=4b^2-12ac=4(b^2-3ac)$

①当 $\Delta=4b^2-12ac=4(b^2-3ac)>0$，即 $b^2-3ac>0$ 时， $f'(x)$ 与 x 轴有两个交点 x_1， x_2， $f(x)$ 形成三个单点区间和两个极值点 x_1， x_2.

②当 $\Delta=4b^2-12ac=4(b^2-3ac)=0$，即 $b^2-3ac=0$ 时， $f'(x)$ 与 x 轴有两个等根 x_1， x_2， $f(x)$ 没有极值点.

③当 $\Delta=4b^2-12ac=4(b^2-3ac)<0$，即 $b^2-3ac<0$ 时， $f'(x)$ 与 x 轴没有交点， $f(x)$ 没有极值点.

性质四：三次方程 $f(x)=0$ 的实根个数

对于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ （a、b、c、$d\in R$ 且 $a\neq0$），其导数为 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

当 $b^2-3ac>0$，其导数 $f'(x)=0$ 有两个解 x_1， x_2，原方程有两个极值 $x_1、x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$.

①当 $f(x_1)\cdot f(x_2)>0$，原方程有且只有一个实根，图像如图 13，14.

②当 $f(x_1)\cdot f(x_2)=0$，则方程有 2 个实根，图像如图 15，16.

③当 $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$，则方程有三个实根，图像如图 17.

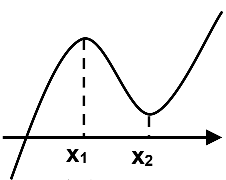


图 13

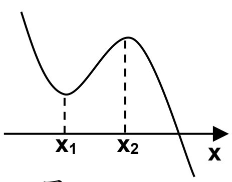


图 14

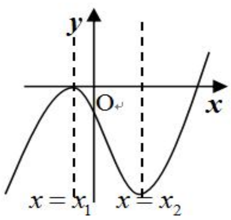


图 15

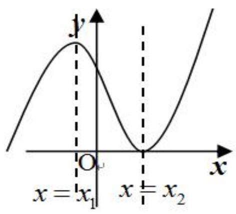


图 16

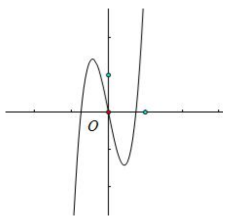


图 17

第五章 导数

性质五：奇偶性

对于三次函数 $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ （a、b、c、$d\in R$ 且 $a\neq 0$）.

① $f(x)$ 不可能为偶函数；②当且仅当 $b=d=0$ 时是奇函数.

性质六：对称性

（1）结论一：三次函数是中心对称曲线，且对称中心是 $(-\frac{b}{3a},f(-\frac{b}{3a}))$；

（2）结论二：其导函数为 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ 对称轴为 $x=-\frac{b}{3a}$，所以对称中心的横坐标也就是导函数的对称轴，可见，$y=f(x)$ 图象的对称中心在导函数 $y=f'\left(x\right)$ 的对称轴上，且又是两个极值点的中点，同时也是二阶导为零的点；

（3）结论三：$y=f(x)$ 是可导函数，若 $y=f(x)$ 的图象关于点 (m,n) 对称，则 $y=f'(x)$ 图象关于直线 $x=m$ 对称.

（4）结论四：若 $y=f(x)$ 图象关于直线 $x=m$ 对称，则 $y=f'(x)$ 图象关于点 $(m,0)$ 对称.

（5）结论五：奇函数的导数是偶函数，偶函数的导数是奇函数，周期函数的导数还是周期函数.

（6）结论六：已知三次函数 $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的对称中心横坐标为 x_0，若 $f\left(x\right)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，则有 $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=-\dfrac{a}{2}\left(x_1-x_2\right)^2=\dfrac{2}{3}f'\left(x_0\right)$.

性质七：切割线性质

（1）设 P 是 $f\left(x\right)$ 上任意一点(非对称中心)，过点 P 作函数 $f\left(x\right)$ 图象的一条割线 AB 与一条切线 PT（P 点不为切点)，A，B，T 均在 $f\left(x\right)$ 的图象上，则 T 点的横坐标平分 A、B 点的横坐标，如图 18.

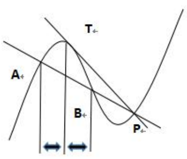


图 18

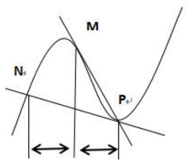


图 19

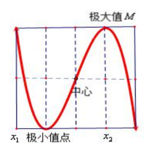


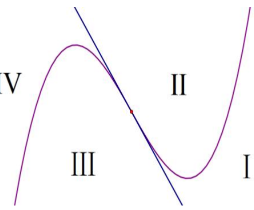
图 20

推论 1：设 P 是 $f\left(x\right)$ 上任意一点（非对称中心），过点 P 作函数 $f\left(x\right)$ 图象的两条切线 PM、PN 切点分别为 M、P，则 M 点的横坐标平分 P、N 的横坐标，如图 19.

推论 2：设 $f(x)$ 的极大值为 M，当成 $f(x)=M$ 的两根为 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$，则区间 $[x_1,x_2]$ 被中心 $(-\frac{b}{3a},f(-\frac{b}{3a}))$ 和极小值点三等分，类似的，对极小值点 N 也有此结论，如图 20.

第二讲 三次函数切线问题

一般地，如图，过三次函数 $f(x)$ 图象的对称中心作切线 L,则坐标平面被切线 L 和函数 $f(x)$ 的图象分割为四个区域，有以下结论：



（1）过区域I、IV 内的点作 $f(x)$ 的切线，有且仅有 3 条；

（2）过区域 II、III内的点以及对称中心作 $f(x)$ 的切线，有且仅有 1 条；

（3）过切线 L 或函数 $f(x)$ 图象（除去对称中心）上的点作 $f(x)$ 的切线，有且仅有 2 条.

【例 1】过点 $(1,-1)$ 与曲线 $f(x)=x^3-2x$ 相切的直线方程是__________.

【解析】由题意可得：$f'(x)=3x^2-2$，设曲线上点的坐标为 $\left(x_0,x_0^3-2x_0\right)$，切线的斜率为 $k=3x_0^2-2$，切线方程为：$y-\left(x_0^3-2x_0\right)=\left(3x_0^2-2\right)(x-x_0)$，由于切线过点 $(1,-1)$，则：$-1-\left(x_0^3-2x_0\right)=\left(3x_0^2-2\right)(1-x_0)$，解得：$x_0=1$ 或 $x_0=-\frac{1}{2}$ 将其代入切线方程式整理可得，切线方程为：$x-y-2=0$ 或 $5x+4y-1=0$.

【例 2】若 $2f(x)+f(-x)=x^3+x+3$ 对 $x\in R$ 恒成立，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为____.

【解析】$\because 2f(x)+f(-x)=x^3+x+3$，$\therefore 2f(-x)+f(x)=(-x)^3+(-x)+3$

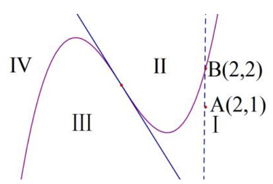
$\therefore 3f(x)=2\left(x^3+x+3\right)-\left[(-x)^3+(-x)+3\right]$ $\therefore f(x)=x^3+x+1, f'(x)=3x^2+1, f'(2)=13$

又 $f(2)=11$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y-11=13(x-2)$，即 $y=13x-15$.

【例 3】过点 $A(2，1)$ 作曲线 $f(x)=x^3-3x$ 的切线最多有（　　）

A．3 条　　B．2 条　　C．1 条　　D．0 条

【解析】法一：设切点为 $\left(x_0,x_0^3-3x\right)$，则切线方程为 $y-\left(x_0^3-3x_0\right)=\left(3x_0^2-3\right)(x-x_0)$，因为过 $A(2，1)$，所以 $1-\left(x_0^3-3x_0\right)=\left(3x_0^2-3\right)(2-x_0)$ $\therefore 2x_0^3-6x_0^2+7=0$ 令 $g(x)=2x^3-6x^2+7$，$g'(x)=6x^2-12x=0$



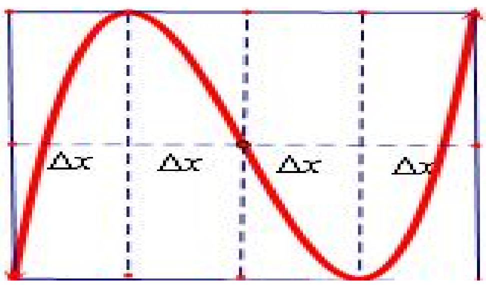
$\therefore x=0,x=2$，而 $g(0)=7>0,g(2)=-1<0$，所以 $g(x)=0$ 有三个零点，即切线最多有 3 条，选 A.

法二：根据题意，$f(x)=x^3-3x$ 关于点 $(0,0)$ 中心对称，$f'(x)=3x^2-3\Rightarrow f'(0)=-3$，在原点的切线方程为 $y=-3x$，$f(2)=2>1$ 故点 $A(2,1)$ 位于区域I，有三条切线（如图），选 A.

第三讲 四段论法则—“房间里装大象”

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a>0)$ 且导函数 $\Delta>0$

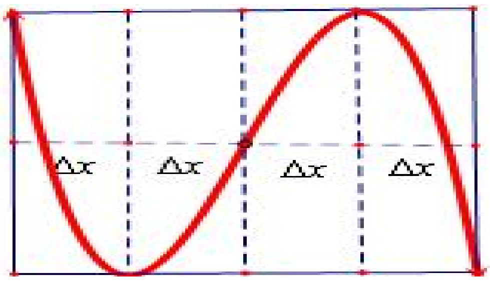
极大值



极小值等值点　　中心　　极小值

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a<0)$ 且导函数 $\Delta>0$

极大值



极小值　　中心　　极小值等值点

1．对称中心：$\left(-\dfrac{b}{3a},\ f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$；

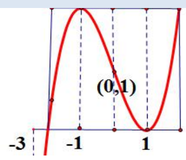
2．极大值到对称中心距离为 Δx，极小值到对称中心距离为 Δx，极小值等值点到极大值距离为 Δx，极大值等值点到极小值距离为 Δx；

3．对称中心为极值与极值等值点的三等分点（三次函数性质七）．

【例 4】函数 $f(x)=x^3-3x+1$ 在闭区间 $[-3,\ 0]$ 上的最大值、最小值分别是（　　）

A．1，-1　　B．3，-17　　C．1，-17　　D．9，-19

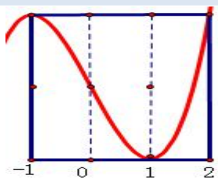
【解析】依题意得对称中心为 $(0,\ 1)$，由 $f'(x)=3x^2-3$，得 $x=\pm1$，如图，画出四段论图像，得 $f(x)_{\max}=f(-1)=3$，$f(x)_{\min}=f(-3)=-17$．



【例 5】已知函数 $f(x)=x^3+ax+b$ 的定义域为 $[-1,2]$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 M，则 M 的最小值为（　　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．$\sqrt{3}$

【解析 】依题意得对称中心为 $(0,\ b)$，定义域内画出四段论图像，得 $f(-1)=-f(1)=f(2)$，解得 $a=-3$，$b=0$，即 $f(-1)=-f(1)=f(2)=2$，故选 C．

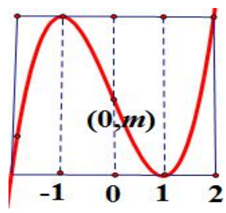


【例 6】已知 $f(x)=x^3-3x+m$，在区间 $[0,\ 2]$ 上任取三个数 a，b，c，均存在以 $f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 为边长的三角形，则 m 的取值范围是（　　）

A．$m>2$　　B．$m>4$　　C．$m>6$　　D．$m>8$

【解析】由 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，得 $x=\pm1$，画出函数四段论图像

$\because$ 函数的定义域为 $[0,\ 2]$，所以 $f(x)_{\min}=f(1)=m-2$，$f(x)_{\max}=f(2)=m+2$，$f(0)=m$ 由题意知 $f(1)+f(1)>f(2)$，即 $-4+2m>2+m$ 得到 $m>6$，故选 C．



【例 7】已知 $f(x)=ax^3-2ax^2+b$ 在区间 $[-2,1]$ 上的最大值是 5，最小值为 -11，求 $f(x)$ 解析式.

【解析】由 $f(x)=ax^3-2ax^2+b$，得 $f'(x)=3ax^2-4ax=ax(3x-4)$，令 $f'(x)=0$，则 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{4}{3}$（舍去），

如图分类画出四段论图像；

当 $a>0$ 时，如图 1 所示，$f(x)_{\max}=f(0)=b=5$，$f(x)_{\min}=f(-2)=5-16a=-11$，得 $a=1$，

所以 $f(x)=x^3-2x^2+5$；

当 $a<0$ 时，如图 2 所示，$f(x)_{\max}=f(-2)=-16a-11=5$，得 $a=-1$，$f(x)_{\min}=f(0)=b=-11$，所以

$f(x)=-x^3+2x^2-11$；综上 $f(x)=\begin{cases}x^3-2x^2+5, a>0\\ -x^3+2x^2-11, a<0\end{cases}$.

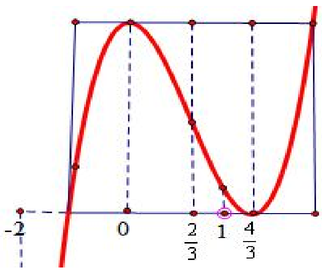


图 1$(a>0)$

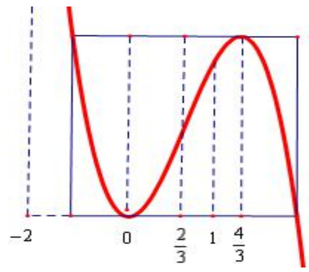
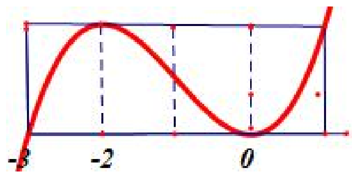


图 2$(a<0)$

【例 8】若函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-\dfrac{2}{3}$ 在区间 $(a,a+5)$ 内存在最小值，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$[-5,0)$　　B．$(-5,0)$　　C．$[-3,0)$　　D．$(-3,0)$

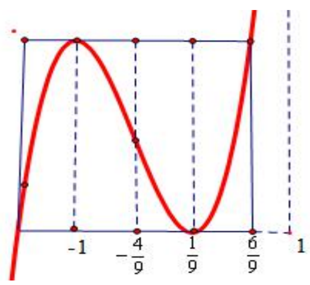
【解析】由题意，$f'(x)=x^2+2x$，另 $f'(x)=0\Rightarrow x_1=-2,x_2=0$，又 $f(-3)=f(0)$ 画出四段论图像，依题意结合图象可知，$\begin{cases}-3\le a<0\\ a+5>0\end{cases}$，得 $a\in[-3,0)$，故选 C.



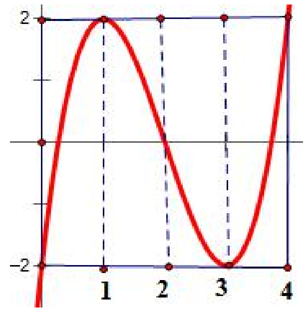
【例 9】若函数 $ax^3-x^2+4x+3\ge 0$ 对任意的 $x\in[-2,1]$ 恒成立，求 a 的取值范围（　　）

A．$[-2,2]$　　B．$[-2,4]$　　C．$[-2,6]$　　D．$[-2,8]$

【解析】两边同时除以 x^3，当 $x=0$ 时恒成立；当 $x\in(0,1]$ 时，即 $\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x}+a\ge 0$ 恒成立，令 $t=\dfrac{1}{x}\left(t\in[1,+\infty)\right)$，构造 $g(t)=3t^3+4t^2-t+a\Rightarrow g(t)_{\min}\ge 0$，$g'(t)=9t^2+8t-1=(9t-1)(t+1)$，对称中心为 $\left(-\dfrac{4}{9},f\left(-\dfrac{4}{9}\right)\right)$，画出函数四段论图像得 $g(t)_{\min}=g(1)=6+a\ge 0$，即 $a\ge -6$；同理当 $x\in[-2,0)$ 时，$g(t)_{\max}=g(-1)\le 0$，得 $a\ge -2$，故选 C.



【例 10】设函数 $f(x)=\left|x^3+ax+bx+c\right|$，$a$，$b$，$c\in R$，总存在 $x_0\in[0,4]$，使得不 $f(x_0)\geq m$ 等式成立，则实数 m 的取值范围是________.



【解析】根据四段轮法则（最佳位置选取）得对称中心为 $(2,0)$，画出四段论图像知 $\begin{cases}f(2)=0\\f(1)=-f(0)\end{cases}\Rightarrow b=0,c=-2$

即 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$，$f'(x)=3x^2-12x+9$，易得 $Maxf(x)_{\min}=f(1)=2$，所以 $m\leq 2$.

达标训练

一．选择题

1．函数 $f(x)=3x^3-9x^2+5$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值是（　　）

A．5　　B．2　　C．-7　　D．14

2．已知 $f(x)=2x^3-6x^2+a$ （a 是常数）在 $[-2,2]$ 上有最大值 3，那么在 $[-2,2]$ 上的最小值是（　　）

A．-5　　B．-11　　C．-29　　D．-37

3．函数 $f(x)=3x-4x^3(x\in[0,1])$ 的最大值是（　　）

A．1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．0　　D．-1

4．若函数 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+a$ 在 $[-1,1]$ 上有最大值 3，则该函数在 $[-1,1]$ 上的最小值是（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．0　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

5．若函数 $f(x)=3x-x^3$ 在区间 (a^2-12,a) 上有最小值，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-1,\sqrt{11})$　　B．$(-1,4)$　　C．$(-1,2]$　　D．$(-1,2)$

6．若函数 $f(x)=x^3-3x$ 在 $(a,8-a^2)$ 上有最小值，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\sqrt{7},1)$　　B．$[-\sqrt{7},1)$　　C．$[-2,1)$　　D．$(-2,1)$

7．函数 $f(x)=x^3-3ax-a$ 在 $(0,1)$ 内有最小值，则 a 的取值范围是（　　）

A．$0\leq a<1$　　B．$0<a<1$　　C．$-1<a<1$　　D．$0<a<\frac{1}{2}$

8．当 $x\in[-2,1]$ 时，不等式 $mx^3\geq x^2-4x-3$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$\left[-6,-\frac{8}{9}\right]$　　B．$[-6,-2]$　　C．$[-5,-3]$　　D．$[-4,-3]$

9．若关于 x 的不等式 $x^3-3x^2-9x+2\geq m$ 对任意 $x\in[-2,2]$ 恒成立，则 m 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,7]$　　B．$(-\infty,-20]$　　C．$(-\infty,0]$　　D．$[-12,7]$

10．函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+a$，函数 $g(x)=x^2-3x$，它们的定义域均为 $[1,+\infty)$，并且函数 $f(x)$ 的图象始终在函数 $g(x)$ 的上方，那么 a 的取值范围是（　　）

A．$(0,+\infty)$　　B．$(-\infty,0)$　　C．$(-\frac{4}{3},+\infty)$　　D．$(-\infty,\frac{4}{3}]$

11. 设函数 $f\left(x\right)=x^{3}-\dfrac{1}{2}x^{2}-2x+5$，若对于任意 $x\in\left[1,\ 2\right]$，$f\left(x\right)<m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为（　　）

A. $(7,+\infty)$　　B. $(8,+\infty)$　　C. $[7,+\infty)$　　D. $[8,+\infty)$

12. 已知函数 $f\left(x\right)=ax^{3}-3x^{2}+1$，若 $f\left(x\right)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,-2)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)$

13. 已知 $a\geq-\dfrac{3}{4}$，$b\geq0$，函数 $f\left(x\right)=x^{3}+ax+b\left(-1\leq x\leq1\right)$，设 $\left|f\left(x\right)\right|$ 的最大值为 M，对任意的 a、$b\in R$ 恒有 $M\geq k$，则实数 k 的最大值为（　　）

A. 4　　B. 2　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

14. 曲线 $y=x^{3}-x$ 的所有切线中，经过点 $(1,0)$ 的切线的条数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

15. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^{3}-x^{2}+ax+3(a\in R)$ 有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，则（　　）

A. $f(x_1)\leqslant3$，$f(x_2)<\dfrac{10}{3}$　　B. $f(x_1)\leqslant3$，$f(x_2)>\dfrac{10}{3}$

C. $f(x_1)\geqslant3$，$f(x_2)<\dfrac{10}{3}$　　D. $f(x_1)\geqslant3$，$f(x_2)>\dfrac{10}{3}$

16. 已知函数 $f(x)=-x^{3}+6x^{2}-9x+8$，则过点 $(0,0)$ 可以作几条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切（　　）

A. 3条　　B. 1条　　C. 0条　　D. 2条

17. 已知函数 $f(x)=x^{3}+ax^{2}+bx+c$，$x\in[-3,\ 3]$ 的图象过原点，且在点 $(1,\ f$（1））和点 $(-1,\ f(-1))$ 处的切线斜率为 -2，则 $f(x)=$（　　）

A. 是奇函数　　B. 是偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数　　D. 是非奇非偶函数

18. 已知函数 $f(x)=x^{3}-ax^{2}-bx+c$ 有两个极值点 x_1，x_2，若 $x_1<x_2=f(x_2)$，则 $f(x)=x_1$ 的解的个数为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

19. 已知函数 $f(x)=x^{3}-mx^{2}+2nx+1$，$f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导数，且 $f'(2+x)=f'(-\dfrac{2}{3}-x)$，若在 $[1,\ \pi]$ 上 $f(x)\geqslant1$ 恒成立，则实数 n 的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,\dfrac{1}{2}]$　　B. $(-\infty,-\dfrac{1}{2}]$　　C. $[\dfrac{1}{2},+\infty)$　　D. $[\pi,+\infty)$

20. （2019•汕头月考）函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^{3}-x^{2}+ax$ 在 $[-1,\ 2]$ 上单调递增，则 a 的取值范围是（　　）

A. $a>0$　　B. $a\geqslant0$　　C. $a\geqslant1$　　D. $a>1$

21. （2019•浙江期中）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^{3}+ax^{2}-2x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有极小值无极大值，则实数 a 的取值范围（　　）

A. $a<\dfrac{1}{2}$　　B. $a>\dfrac{1}{2}$　　C. $a\leqslant\dfrac{1}{2}$　　D. $a\geqslant\dfrac{1}{2}$

22. （2019•长沙期中）已知函数 $f(x)=4x^{2}-3x+1$，$g(x)=3x^{3}-x-1$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系是（　　）

A. $f(x)=g(x)$　　B. $f(x)>g(x)$　　C. $f(x)<g(x)$　　D. 随 x 的变化而变化

23. （2019•临川月考）正项等差数列 $\{a_n\}$ 中的 a_{11}，a_{4027} 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^{3}-4x^{2}+4x-3$ 的极值点，则 $\log_{\sqrt{2}}a_{2019}=$（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

24. 若函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2+x+1$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$[2,\frac{5}{2}]$　　B．$[\frac{5}{2},+\infty)$　　C．$(\frac{5}{2},+\infty)$　　D．$(2,+\infty)$

25. （2019•醴陵期中）函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$，若函数 $g(x)=f(x)-m$ 在 $x\in[-2,\ 5]$ 上有 3 个零点，则 m 的取值范围为（　　）

A．$(-23,9)$　　B．$(-23,2]$　　C．$[2,9]$　　D．$[2,9)$

26.（2019•湛江一模）已知函数 $f(x)=x^3-x^2+ax-a$ 存在极值点 x_0，且 $f(x_1)=f(x_0)$，其中 $x_1\neq x_0$，$x_1+2x_0=$（　　）

A．3　　B．2　　C．1　　D．0

27. （2019•邯郸一模）过点 $M(-1,0)$ 引曲线 $C: y=2x^3+ax+a$ 的两条切线，这两条切线与 y 轴分别交于 A，B 两点，若 $|MA|=|MB|$，则 $a=$（　　）

A．$-\frac{25}{4}$　　B．$-\frac{27}{4}$　　C．$-\frac{25}{12}$　　D．$-\frac{49}{12}$

28. （2019•黔东南州一模）已知函数 $f(x)=2x^3-(6a+3)x^2+12ax+16a^2(a<0)$ 只有一个零点 x_0，且 $x_0<0$，则 a 的取值范围为（　　）

A．$(-\infty,-\frac{1}{2})$　　B．$(-\frac{1}{2},0)$　　C．$(-\infty,-\frac{3}{2})$　　D．$(-\frac{3}{2},0)$

29. （2019•莆田一模）若函数 $f(x)=\frac{a}{3}x^3-x^2+2x$ 没有极小值点，则 a 的取值范围是（　　）

A．$[0,\frac{1}{2}]$　　B．$[\frac{1}{2},+\infty)$　　C．$\{0\}\cup[\frac{1}{2},+\infty)$　　D．$\{0\}\cup(\frac{1}{2},+\infty)$

30.（2018 秋•晋中期末）已知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}ax^2+6ax+b$ 的两个极值点分别为 x_1，$x_2(x_1\neq x_2)$，且 $x_2=\frac{3}{2}x_1$，则函数 $f(x_1)-f(x_2)=$（　　）

A．-1　　B．$\frac{1}{6}$　　C．1　　D．与 b 有关

31. （2019•陕西一模）已知函数 $f(x)=x^3+3x$，则不等式 $\frac{8}{(1+x)^3}+\frac{6}{1+x}>x^3+3x$ 的解集为（　　）

A．$(-\infty,-2)\cup(-1,1)$　　B．$[-2,-1)\cup[1,+\infty)$

C．$(-\infty,-2]\cup(1,+\infty)$　　D．$(-2,1)$

32. （2018•宜春期末）等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，a_5，a_6 是函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+1$ 的极值点，则 $\log_2 a_1+\log_2 a_2+\ldots+\log_2 a_{10}=($（　　）

A．$3+\log_2 5$　　B．8　　C．10　　D．15

33. （2018•湖北期末）已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx-17(a,\ b,\ c\in R)$ 的导函数为 $f'(x)$，$f'(x)\leqslant 0$ 的解集为 $\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$，若 $f(x)$ 的极小值等于 -98，则 a 的值是（　　）

A．$-\frac{81}{22}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．2　　D．5

34. （2019•朝阳二模）已知 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x$ 在区间 $(a,10-a^2)$ 上有最大值，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$a<-1$　　B．$-2\leqslant a<3$　　C．$-2\leqslant a<1$　　D．$-3<a<1$

35. （2018•海淀期末）函数 $f(x)=x^3+kx^2-7x$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-2]$　　B．$[-2,2]$　　C．$[-2,+\infty)$　　D．$[2,+\infty)$

36. （2019•汉阳模拟）函数 $f(x)=ax^3+3x^2-1$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0<0$，则实数 a 的范围为（　　）

A．$(-\infty,-2)$　　B．$(-\infty,2)$　　C．$(2,+\infty)$　　D．$(-2,+\infty)$

37. （2019•漯河月考）设函数 $f(x)=ax^3-bx+2$ 的极大值和极小值分别为 M，m，则 $M+m=($（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

38. （2018•南阳期末）函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ 在 $[0,4]$ 上的最大值和最小值分别是（　　）

A. 2，-18　　B. -18，-25　　C. 2，-25　　D. 2，-20

39. （2018•合肥期末）已知函数 $f(x)=-x^5-3x^3-5x+3$，若 f（a）$+f(a-2)>6$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,3)$　　B. $(3,+\infty)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1)$

二 填空题

1.（2019•东城一模）已知函数 $f(x)=4x-x^3$，若 $\forall x_1$，$x_2\in[a，b]$，$x_1\neq x_2$ 都有 $2f(x_1+x_2)>f(2x_1)+f(2x_2)$ 成立，则满足条件的一个区间是_________.

2. （2019•陕西二模）设函数 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$ 的导函数为 $f'(x)$，若函数 $y=f'(x)$ 的图象的顶点横坐标为 $-\dfrac{1}{2}$，且 f'（1）$=0$．则 $a+b$ 的值为_________.

3. （2019•新疆二模）已知函数 $f(x)=x^3-ax^2$ 在 $(-1,1)$ 上没有最小值，则 a 的取值范围是_________.

4.（2019•十堰模拟）对于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a，b，c，d\in R，a\neq 0)$，有如下定义：设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，$f''(x)$ 是函数 $f'(x)$ 的导函数，若方程 $f''(x)=0$ 有实数解 m，则称点 $(m，f(m))$ 为函数 $y=f(x)$ 的“拐点”．若点 $(1,-3)$ 是函数 $g(x)=x^3-ax^2+bx-5$，$(a,b\in R)$ 的“拐点”也是函数 $g(x)$ 图象上的点，则当 $x=4$ 时，函数 $h(x)=\log_4(ax+b)$ 的函数值为_________.

5. （2018•揭阳期末）已知函数 $f(x)=x^3+2x$，若 $f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$，则实数 a 的取值范围是_________.

6. （2018•长治期末）已知函数 $f(x)=2x^3-3x$，若过点 $P(1,t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，则 t 的取值范围是_________.

7.（2019•自贡模拟）已知 $f(x)=ax^3+3x^2-1$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0<0$，则实数 a 的取值范围是________.

8. （2019•天山月考）设 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+5$，当 $x\in[-1，2]$时，$f(x)<m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为__________.

9. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+\dfrac{4}{3}$，直线 l：$9x+2y+c=0$．若当 $x\in\left[-2，2\right]$时，函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象恒在直线 l 的下方，则 c 的取值范围是__________.

三 解答题

1. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3+2x^2$，其中 $a>0$．若 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最小值为 -2，求 a 的值.

2. 知函数 $f(x)=ax^3-6ax^2+b(x\in[-1,2])$ 的最大值为 3，最小值为 -29，求 a、b 的值.

3. 已知函数 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{2}x^2+bx+c$；

（1）若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数，求 b 的取值范围；

（2）若 $f(x)$ 在 $x=1$ 时取得极值，且 $x\in[-1,2]$ 时，$f(x)<c^2$ 恒成立，求 c 的取值范围.

4. （2019•海淀期中）已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+x+c$，其导函数 $y=f'(x)$ 的图象过点 $(\frac{1}{3},0)$ 和 $(1,0)$．

（1）函数 $f(x)$ 的单调递减区间为_______，极大值点为_______；

（2）求实数 a，b 的值；

（3）若 $f(x)$ 恰有两个零点，请直接写出 c 的值．

5. （2019•莱西月考）设函数 $g(x)=x^3-3x^2+2$．

（1）若函数 $g(x)$ 在区间 $(0,m)$ 上递减，求 m 的取值范围；

（2）若函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty$，$n]$ 上的最大值为 2，求 n 的取值范围．

6. （2019•海淀一模）已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+a|x|-1$．

（1）当 $a=6$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调区间；

（2）求证：当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 既有极大值又有极小值．

7. （2019•怀柔一模）已知函数 $f(x)=2x^3+3ax^2+1(a\in R)$．

（1）当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 在点 $(1$，f （1））处的切线方程；

（2）求 $f(x)$ 的单调区间；

（3）求 $f(x)$ 在区间 $[0$，$2]$ 上的最小值

8. （2019•天津一模）已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1(a\in R)$．

（1）$a=6$ 时，直线 $y=-6x+m$ 与 $f(x)$ 相切，求 m 的值；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，求此时函数 (x) 的单调区间；

（3）当 $a>0$ 时，若函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值和最小值的和为 1，求实数 a 的值．

9. （2018•镇海期末）已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}$．

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(1,\frac{5}{6})$ 处的切线与 x 轴和 y 轴围成的三角形面积；

（2）若过点 $(2,a)$ 可作三条不同直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，求实数 a 的取值范围．

10. （2018•太原期末）若 $x=2$ 是函数 $f(x)=ax^3-3x^2$ 的极值点．

（1）求 a 的值；

（2）若 $x\in[n$，$m]$ 时，$-4\leqslant f(x)\leqslant 0$ 成立，求 $m-n$ 的最大值．

11. （2018•佛山期末）已知函数 $f(x)=x^3+3ax^2+3(a^2-l)x$．

（1）若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，求 a 的值；

（2）设 x_1，x_2 是 $g(x)=f(x)-6ax^2-3a^2x+5a(a>0)$ 的两个极值点，若 $g(x_1)+g(x_2)\leqslant 0$，求 a 的最小值．