专题 5　关于平口单峰函数（绝对值）的一些秒杀方案

第一讲 平口二次函数问题

去掉二次函数的的坐标系，二次函数的一切只跟一个系数有关，就是 a，一切 b，c 这些系数与二次函数的形状没有任何影响．在初中的课本中提到的 $y=ax^2 \xrightarrow{\text{平移变换}} y=a(x-h)^2+k$，我们将坐标轴去掉，单纯研究二次函数，解决当 $f(x)=x^2+bx+c$，$x\in[p,q]$时，$|f(x)|\le c$，求 c 最小值问题．由于有了绝对值，函数成为了平口型，即解决抛物线在水平跨度范围内的竖直范围．

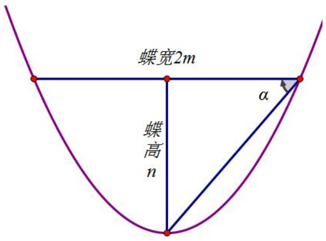


图 1

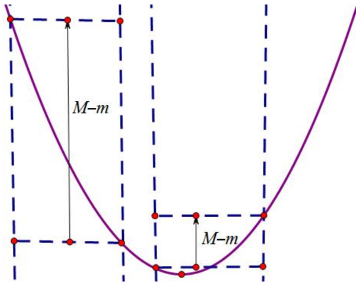


图 2

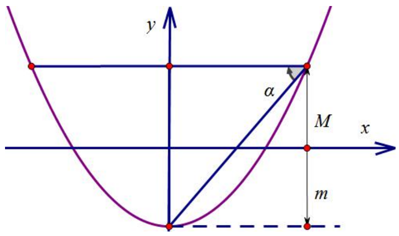


图 3

如图 1，我们将二次函数在一个固定的纵坐标时，两个交点之间的距离叫蝶宽 $2m$，此时函数定顶点到蝶宽弦的距离称为蝶高 n，相对应的角叫蝶角，定义 $\tan\alpha=\frac{n}{m}$，可以得出以下定理：

① $\tan\alpha=m$，即蝶宽与蝶角正切值相等，蝶宽越大，蝶角越大；

② 以对称轴为中心，每增加 Δm 的蝶宽，相对应的蝶高比为 $1:4:9:\cdots:n^2$，增加的蝶高 Δn 比为 $1:3:5:\cdots:2n-1$；

③如图 2，处于同一单调区间时，最大值 M 和最小值 m 的差值 $g(x)=M-m$ 在区间距离对称轴越近时越小，离对称轴越远时越大；处于两个不同单调区间时，$g(x)=M-m$ 在区间中点距离对称轴越近时越小，离对称轴越远时越大，故当仅当对称轴为中点 $-\frac{b}{2}=\frac{p+q}{2}$ 时，$g(x)_{\min}=M-m=f(q)-f\ \ -\frac{b}{2}\ =f(p)-f\ \ -\frac{b}{2}$ ；

综上，如图 3，当 $M+m=0$，$|f(x)|\le c$ 时，c 取得最小值，此时 $m=f\ \ \frac{p+q}{2}$ ，$M=f(p)=f(q)$．

【例 1】在 $f(x)=x^2+px+q$ 中，找出使得 $\max|x^2+px+q|$，$-1\quad x\quad 1$ 取得最小值时的函数表达式为_______．

【解析】根据平口二次函数定理可知当仅当 $M+m=0$ 时，$\max|x^2+px+q|,-1\quad x\quad 1$ 能取得最小值，此时 $M=f(1)=f(-1)$ $\therefore 1+p+q=1-p+q\Rightarrow p=0$；又 $m=f(0)=q$，$M+m=1+q+q=0\Rightarrow q=-\frac{1}{2}$；

$\therefore f(x)=x^2-\frac{1}{2},x\in[-1,1]$．

【例 2】设函数 $f(x)=|x^2+ax+b|$，对于任意的实数 a,b，总存在 $x_0\in[0,4]$，使得 $f(x_0)\ge t$ 成立，则实数 t 的取值范围是_____．

【解析】根据题意，需要找到 $f(x)_{\max},0\quad x\quad 4$，不妨设 $g(x)=x^2+ax+b,x\in[0,4]$，$g(x)_{\max}=M$，$g(x)_{\min}=m$，根据平口二次函数定理：当 $M=g(0)=g(4)\Rightarrow -\frac{a}{2}=2\Rightarrow a=-4$；且 $m=g(2)=4+2a+b=b-4$，又由于 $M+m=0$，故 $b+b-4=0\Rightarrow b=2$，$f(x)_{\max}=2$，综上，当 $t\le 2$ 时，总存在 $x_0\in[0,4]$，使得 $f(x_0)\ge t$ 成立．总结：平口函数就是在区间的左右端点同时取最大值（最小值）的一类函数总称．平口二次函数由于其特殊的对称性，能在区间的算数平均数中点取到另一个最值．

第二讲 平口对勾函数问题

对勾函数涉及极值偏移，算数平均数的中点的值不代表最值，$f(x)=x+\frac{a}{x}+b,x\in[p,q]$时，$|f(x)|\le c$，求$c$最小值问题，根据平口二次函数的推论，可以知道是$f(p)=f(q)$，如图4，求出参数$a$以后再根据$f(p)+f(\sqrt{a})=0$确定参数$b$.

定理：当仅当$a=pq$时，对勾函数在区间$[p,q]$才能构成平口对勾函数，$f(x)$去最小值时取到了$[p,q]$的几何平均数中点.

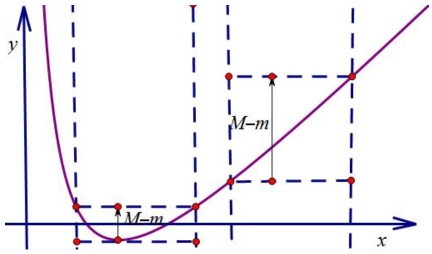


图 4

【例3】(2018•台州期末)已知$f(x)=\left|x+\frac{1}{x}-ax-b\right|$，当$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$时，设$f(x)$的最大值为$M(a,b)$，则$M(a,b)$最小值为__________.

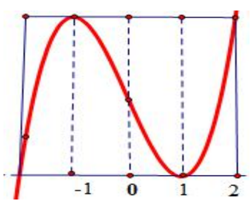
【解析】$M(a,b)$为最小时，函数一定为平口函数，构造$g(x)=x+\frac{1}{x}-ax-b,x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，根据平口函数性质可得：$g\left(\frac{1}{2}\right)=g(2)\Rightarrow a=0$，又因为$g(1)+g(2)=0\Rightarrow b=\frac{9}{4}$，$\therefore M(a,b)$最小值为$|g(1)|=\frac{1}{4}$.

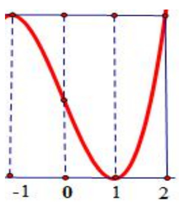
【例4】(2018•青浦二模)设函数$f(x)=\left|\frac{2}{x}-ax-b\right|$，对于任意的实数$a,b$，总存在$x_0\in[1,2]$，使得$f(x_0)\ge m$成立，则实数$m$的取值范围是___________.

【解析】由$f(x_0)\ge m$，可知$f(x)$为平口函数，构造$g(x)=\frac{2}{x}-ax-b$，一定有$g(1)=g(2)$，则$a=-1$，又因为当$x=\sqrt{2}$时，$g(x)$取得最小值，$g(1)+g(\sqrt{2})=0\Rightarrow b=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$，$\therefore g(x)_{\max}=g(1)=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\ge m$.

平口三次函数问题

三次函数涉及到双峰问题，我们需要在给定的定义域内构造出单峰三次函数（即部分图像，通常是极大值到极大值等值点这一段），如下图，若x–[∈1，2]，我们可在此区间构造单峰函数.





【例5】(2019•武汉调研)已知函数$f(x)=x^3+ax+b$的定义域为$[-1,2]$，记$|f(x)|$的最大值为M，则M的最小值为（　　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．$\sqrt{3}$

【解析】构造平口单峰$f(x)=\left|x^3-3x+(a+3)x+b\right|$，不难发现$y=x^3-3x$在$x\in[-1,2]$为平口单峰，且极值点$x_0=1$，根据秒杀秘籍得$M$的最小值为$\left|\frac{f(p)-f(x_0)}{2}\right|=\left|\frac{2-(-2)}{2}\right|=2$，故选$C$.

第三讲 关于平口函数的万能招数

所有的平口函数 $y=|f(x)|$ 一定满足一个共性：出现求 $\min|f(x)|_{\max}$，$x\in[p,q]$时，一定为平口函数，若 $y=|f(x)|$ 有一个极值点，也叫平口单峰函数，若 $f(x)_{\max}=M$，$f(x)_{\min}=m$，$\begin{cases}f(p)=f(q)\\M+m=0\end{cases}$

此为平口单峰函数的万能招数．既然如此，再来几道题，都可以直接秒杀了．建议大家边写题边拍一下参考答案给的解法，对比一下，这种类型题能减少讨论是最好的．

【例 6】（2018•呼和浩特期中）设函数 $f(x)=|\sqrt{x}-ax-b|,a,b\in R$，若对于任意的实数 a,b 总存在实数 $x_0\in[0,4]$，使得 $f(x_0)\geq m$ 成立，则实数 m 的取值范围为__________．

【解析】令 $\sqrt{x}=t,t\in[0,2]$，$f(t)=|t-at^2-b|,a,b\in R$，，令 $g(t)=t-at^2-b,a,b\in R$，一看是平口二次函数模型，直接上秒杀 $\begin{cases}g(0)=g(2)\\g(0)+g(1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=\dfrac{1}{4}\end{cases}$，故 $f(t)_{\max}=\left|t-\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{4}\right|_{\max}=\dfrac{1}{4}\geq m$．

【例 7】（2018•秋杭州期中）已知 $f(x)=\ln x-ax-b$，对于任意的 $a<0$，$b\in R$，都存在 $x_0\in[1,m]$ 使得 $|f(x_0)|\geq 1$ 成立，则实数 m 的取值范围为__________．

【解析】 $\max|\ln x-ax-b|_{\min}\geq 1$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a>0$，故 $f(x)$ 为单调增函数，无峰最值只能在两端，根据平口函数理论 $f(m)-f(1)\quad 2\quad \ln m-a(m-1)\quad 2\quad \ln m\quad 2\quad m\quad e^2$，

注意，没有峰的函数，一定用 $|f(q)-f(p)|\geq 2c$，这个方法百试不爽．

【例 8】求 $\max|\ln(x+1)+ax+b|_{\min}$，$x\quad [0,1]$ a、$b\quad R$．

【解析】令 $f(x)=\ln(x+1)+ax+b$，无峰不最值，当 $f(0)=f(1)\Rightarrow a=-\ln 2$，此时 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\ln 2$，当 $x=\dfrac{1}{\ln 2}-1$ 时 $f'(x)=0$，$f\quad\dfrac{1}{\ln 2}-1\quad+f(0)=0\Rightarrow b=\dfrac{\ln(\ln 2)-\ln 2+1}{2}$，故 $\max|\ln(x+1)+ax+b|_{\min}=\dfrac{\ln(\ln 2)-\ln 2+1}{2}$．

下面给出一个平口单峰函数的解答题证明过程：

若函数 $f(x)$ 在区间 $[p,q]$ 为连续的单峰函数，且 $f(p)=f(q)$，此函数为平口单峰函数，x_0 为其极值点．秒杀秘籍: $g(x)=\max|f(x)+ax+b|$ 的最小值为 $\left|\dfrac{f(p)-f(x_0)}{2}\right|$，当仅当 $a=0$，$b=-\dfrac{f(p)+f(x_0)}{2}$ 时取得．

证明：若 $a\neq 0$ 时，如图 5，图 6，则端点值的增量为 $|a(p-q)|$，而极值点的增量为 $|a(x_0-p)|$ 或者 $|a(x_0-q)|$，由于 $|p-q|>\max\{|x_0-p|,|x_0-q|\}$ 故 $g(x)=\max|f(x)+ax+b|_{\min}>\max|f(x)+b|_{\min}$，故不符合题意，即 $a=0$

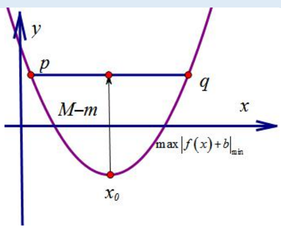


图 5

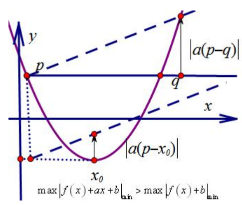


图 6

【例 9】（2018•台州月考）已知函数 $f(x)=\left|x+\dfrac{1}{x}-ax-b\right|$，当 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 时，设 $f(x)$ 的最大值为 $M(a,b)$，则 $M(a,b)$ 的最小值是（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 4　　D. $\frac{1}{4}$

【解析】因为 $x+\frac{1}{x}$ 在 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 为“平口单峰函数”，且极值点 $x_0=1$，根据秒杀秘籍得 $M(a,b)$ 的最小值为 $\left|\frac{f(p)-f(x_0)}{2}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}+2-2}{2}\right|=\frac{1}{4}$.

第四讲 构造平口函数

若题目给的基本函数为非“平口单峰”，则我们需要构造“平口单峰”，

此处注意：构造平口单峰函数的后边应为一次函数.

下面以几道最近模拟考非常火又颇有难度的题作为例题，秒杀之.

【例 10】（2019•济南二模）已知函数 $f(x)=\left|\frac{x-2}{x+2}-ax-b\right|$，若对任意的实数 a,b，总存在 $x_0\in[-1,2]$，使得 $f(x_0)\geq m$ 成立，则实数 m 的取值范围是________.

A. $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$　　B. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$　　C. $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]$　　D. $(-\infty,1]$

【解析】构造平口单峰 $f(x)=\left|\frac{x-2}{x+2}-x-(a-1)x-b\right|$，不难发现 $\frac{x-2}{x+2}-x=-\left(\frac{4}{x+2}+x+2\right)+3$ 在 $x\in[-1,2]$ 为“平口对勾”，且极值点 $x_0=0$，根据秒杀秘籍得 m 的最大值为 $\left|\frac{f(p)-f(x_0)}{2}\right|=\left|\frac{-2-(-1)}{2}\right|=\frac{1}{2}$，所以选 B.

另解平移法：$f(x-2)=\left|\frac{x-4}{x}-ax+2a-b\right|=\left|-\left(\frac{4}{x}+ax\right)+1+2a-b\right|$，即求 $g(x)=\left|\frac{4}{x}+ax+m\right|$ 在 $x\in[1,4]$ 最小值的最大值，由秘籍得 $g(1)=g(4)=-g\left(\sqrt{1\times4}\right)=-g(2)$，得 $a=1$，$m=-\frac{9}{2}$.

【例 11】（2019•武汉调研）已知函数 $f(x)=x^3+ax+b$ 的定义域为 $[-1,2]$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 M，则 M 的最小值为（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. $\sqrt{3}$

【解析】构造平口单峰 $f(x)=\left|x^3-3x+(a+3)x+b\right|$，不难发现 $y=x^3-3x$ 在 $x\in[-1,2]$ 为平口单峰，且极值点 $x_0=1$，根据秒杀秘籍得 M 的最小值为 $\left|\frac{f(p)-f(x_0)}{2}\right|=\left|\frac{2-(-2)}{2}\right|=2$，故答案选 C.

【例 12】（2019•青浦二模）设函数 $f(x)=\left|\frac{2}{x}-ax+b\right|(a\in R)$，若对任意的正实数 a，总存在 $x_0\in[1,2]$，使得 $f(x_0)\geq m$，求实数 m 的最小值为_________.

【解析】构造平口单峰 $f(x)=\left|\frac{2}{x}+x-(a+1)x+b\right|$，不难发现 $y=\frac{2}{x}+x$ 在 $x\in[1,2]$ 为平口对勾，且极值点 $x_0=\sqrt{2}$，根据秒杀秘籍得 m 的最小值为 $\left|\frac{f(p)-f(x_0)}{2}\right|=\left|\frac{3-(2\sqrt{2})}{2}\right|=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$.

【例 13】(2016•天津理)设函数 $f(x)=(x-1)^3-ax-b$，$x\in R$，其中 a，$b\in R$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若 $f(x)$ 存在极值点 x_0，且 $f(x_1)=f(x_0)$，其中 $x_1\neq x_0$，求证：$x_1+2x_0=3$；

(3)设 $a>0$，函数 $g(x)=|f(x)|$，求证：$g(x)$ 在区间 $[0，2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

【解析】(1)函数 $f(x)=(x-1)^3-ax-b$ 的导数为 $f'(x)=3(x-1)^2-a$，当 $a\leq 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 R 上递增；当 $a>0$ 时，当 $x>1+\sqrt{\frac{a}{3}}$ 或 $x<1-\sqrt{\frac{a}{3}}$ 时，$f'(x)>0$，当 $1-\sqrt{\frac{a}{3}}<x<1+\sqrt{\frac{a}{3}}$，$f'(x)<0$，可得 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,1-\sqrt{\frac{a}{3}})$，$(1+\sqrt{\frac{a}{3}}，+\infty)$，减区间为 $(1-\sqrt{\frac{a}{3}}，1+\sqrt{\frac{a}{3}})$；

老唐说题提示：第(1)问发现 $f(x)=(x-1)^3-ax-b$ 的对称中心为 $\left(1,f\left(1\right)\right)$，第二问即证明如图 7 所示的三次函数的四段等分理论：设 $f\left(x\right)$ 的极大值为 M，当成 $f\left(x\right)=M$ 的两根为 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$，则区间 $\left[x_1,x_2\right]$ 被 $-\frac{b}{3a}$ 和极小值点三等分，类似的，对极小值点 m 也有此结论.

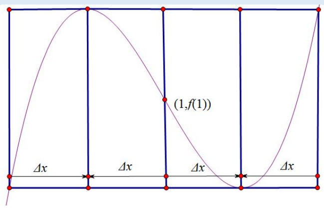


图 7

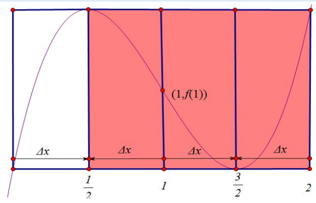


图 8

(2)证明：$f'(x_0)=0$，可得 $3(x_0-1)^2=a$，由 $f(x_0)=(x_0-1)^3-3x_0(x_0-1)^2-b=(x_0-1)^2(-2x_0-1)-b$，

$f(3-2x_0)=(2-2x_0)^3-3(3-2x_0)(x_0-1)^2-b=(x_0-1)^2(8-8x_0-9+6x_0)-b=(x_0-1)^2(-2x_0-1)-b$，即为

$f(3-2x_0)=f(x_0)=f(x_1)$，即有 $3-2x_0=x_1$，即为 $x_1+2x_0=3$；

(3)证明：要证 $g(x)$ 在区间 $[0，2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$，只需证在 $[0，2]$ 上存在 x_1，x_2，使得 $f(x_1)-f(x_2)\geqslant\frac{1}{2}$. 当 $a\geq 3$ 时，$f(x)$ 在 $[0，2]$ 递减，$f\left(2\right)=1-2a-b$，$f(0)=-1-b$，

$f(0)-f\left(2\right)=2a-2\geqslant 4>\frac{1}{2}$，递减，成立；当 $0<a<3$ 时，

$f(1-\sqrt{\frac{a}{3}})=(-\sqrt{\frac{a}{3}})^3-a(1-\sqrt{\frac{a}{3}})-b=-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a+a\sqrt{\frac{a}{3}}-b=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a-b$，

$f(1+\sqrt{\frac{a}{3}})=(\sqrt{\frac{a}{3}})^3-a(1+\sqrt{\frac{a}{3}})-b=\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a-a\sqrt{\frac{a}{3}}-b=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a-b$，

$f\left(2\right)=1-2a-b$，$f(0)=-1-b$，$f\left(2\right)-f(0)=2-2a$，

若 $0<a\leq\frac{3}{4}$ 时，$f\left(2\right)-f(0)=2-2a\geq\frac{1}{2}$ 成立；

若 $a>\frac{3}{4}$ 时，$f(1-\sqrt{\frac{a}{3}})-f(1+\sqrt{\frac{a}{3}})=\frac{4a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}>\frac{1}{2}$ 成立.

综上可得，$g(x)$ 在区间 $[0，2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

秒杀证法：根据第二问的结论，先构造 $f\left(1-x\right)+f\left(1+x\right)=2f\left(1\right)$ 证明三次函数的对称中心为 $\left(1,f\left(1\right)\right)$，再构造平口双峰函数，满足当 $\begin{cases}f\left(1\right)=0\\M+m=0\end{cases}\Rightarrow a+b=0$ 时，才存在 $\max|f(x)|_{\min}$，当右端点 $f\left(2\right)$ 出现和极大值相等的值时候，最小值在两个最大值之间(如图 8 阴影区域)，这样符合平口单峰函数，故 $f\left(2\right)=f\ \frac{1}{2}\ =-f\ \frac{3}{2}$，解得 $a=\frac{3}{4}$，$b=-\frac{3}{4}$；故 $\max|f(x)|_{\min}=\frac{1}{4}$.

第五讲 常见方法之三点控制（多点控制）

在这类求最大值的最小值问题中，多点控制也是一个非常好用的处理手段，这里给到大家一些总结，怎么取点控制：

①对于二次函数一般用三点控制，这三点分别是区间的两个端点和区间中点；

②对于平口打勾函数一般用三点控制，这三点分别是区间的两个端点和极值点，对于一般的打勾函数，这三点分别是区间的两个端点和打勾函数两区间端点连线平行且与打勾函数相切的直线与打勾函数的切点；

③对于一般的三次函数，一般需要四点控制，这四点分别是区间的两个端点和分别靠近两端点的两个四等分点.

注意：对于缺少常数项的二次函数和缺项的三次函数，选取点的原则可能会发生改变，视情况而定.

（注：此公式参考微信公众号《万卷归宗文献》）

【例 14】已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$，$x\in[0,1]$，若 $|f(x)|$ 的最大值是 M，则 M 的最小值是________.

【解析】取三点控制得 $\begin{cases}|f(0)|\le M\\|f(1)|\le M\\\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\le M\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|b|\le M\\|1+a+b|\le M\\\left|\frac{1}{2}+a+2b\right|\le 2M\end{cases}\Rightarrow 4M\ge|b|+|1+a+b|+\left|\frac{1}{2}+a+2b\right|$ ①

①$\ge\left|b+1+a+b-\frac{1}{2}-a-2b\right|=\frac{1}{2}\Rightarrow M\ge\frac{1}{8}$.

此题平口秒解法：$f(x)=x^2+ax+b=x^2-x+(a+1)x+b$，不难发现 $y=x^2-x$ 在 $x\in[0,1]$ 为平口二次，极值点为 $x_0=\frac{1}{2}$ 根据秒杀秘籍得 M 的最小值为 $\left|\frac{f(p)-f(x_0)}{2}\right|=\left|\frac{0- -\frac{1}{4}}{2}\right|=\frac{1}{8}$.

【例 15】已知函数 $f(x)=8x^3-ax^2-bx$，是否存在任意实数 a、b，使得 $|f(x)|\le 2$ 对任意的 $x\in[-1,1]$ 恒成立，若存在，求出 a、b，若不存在，说明理由.

【解析】取四点控制 $\begin{cases}|f(-1)|\le 2\\|f(1)|\le 2\\\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\le 2\\\left|f\left(-\frac{1}{2}\right)\right|\le 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\le -8-a+b\le 2\\-2\le -8-a-b\le 2\\-2\le 1-\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b\le 2\\-2\le 1-\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b\le 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6\le b\le 10\\-2\le b\le 6\end{cases}\Rightarrow b=6$，$a=0$，即存在.

另解：此题可按照例题 5 结合四段论秒杀.

【例 16】已知函数 $f(x)=\left|\sqrt{x}-ax-b\right|$，$a$、$b\in R$，若对任意的 $x_0\in[0,4]$，使得 $f(x_0)\ge M$，求实数 M 的取值范围是_________.

【解析】令 $\sqrt{x}=t$，$x=t^2$，则 $f(x)=g(t)=\left|-at^2+t-b\right|$，$(t\in[0,2])$，取三点控制得

$\begin{cases}g(0)\ge M\\g(1)\ge M\\g(2)\ge M\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|b|\ge M\\|-a+1-b|\ge M\\|-4a+2-b|\ge M\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|3b|\ge 3M\\|-4a+4-4b|\ge 4M\\|-4a+2-b|\ge M\end{cases}\Rightarrow 8M\le|3b|+|-4a+4-4b|+|-4a+2-b|$

即 $8\le|3b+(-4a+4-4b)-(-4a+2-b)|=2$，得 $M\le\frac{1}{4}$.

另解：此题换元为平口二次函数秒解.

达标训练

1．（2018•永康模拟）记 $f(x)=|\ln x+ax+b|(a>0)$ 在区间 $[t,\ t+2]$（t 为正数）上的最大值为 $M_t(a,\ b)$，若 $\{b|M_t(a,\ b)\geq \ln 2+a\}=R$，则实数 t 的最大值是（　　）

A．2　　B．1　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{2}{3}$

2．已知 $a\geq -\frac{3}{4}$，$b\geq 0$，函数 $f(x)=x^3+ax+b$，$-1\leq x\leq 1$，设 $|f(x)|$ 的最大值为 M，对任意的 $a,b\in R$ 恒有 $M\geq k$，则实数 k 的最大值为（　　）

A．4　　B．2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{4}$

3．（2016•沙坪坝月考）已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+(3-3a^2)x+b\ (a\geq 1,\ b\in R)$，当 $x\in[0,\ 2]$ 时，记 $|f(x)|$ 的最大值为 M，有 $M\geq k$，则实数 k 的最大值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

4．（2018•诸暨二模）已知函数 $f(x)=|x^2+ax+b|$ 在区间 $[0,\ c]$ 内的最大值为 $M(a,\ b\in R,\ c>0$ 位常数）且存在实数 a，b，使得 M 取最小值 2，则 $a+b+c=$_________.

5．（2017•温州二模）若存在 $x_0\in[-1,1]$ 使得不等式 $|4^{x_0}-a\cdot 2^{x_0}+1|\leqslant 2^{x_0+1}$ 成立，则实数 a 的取值范围是______.

6．（2016•浙江二模）设 $f(x)=4^{x+1}+a\cdot 2^x+b(a,b\in R)$，若对于 $\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}$ 都成立，则 $b=$_______.

7．函数 $f(x)=|x^2-ax|$ 在 $[0,1]$ 上的最大值的最小值为_________，此时 $a=$_________.

8．函数 $f(x)=|x^2-ax|$ 在 $[3,6]$ 上的最大值的最小值为_________，此时 $a=$_________.

9．函数 $f(x)=|x^2-ax|$ 在 $[1,3]$ 上的最大值的最小值为_________，此时 $a=$_________.

10．若函数 $f(x)=\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+ax+b\right|$ 在 $x\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上最大值为 M，则的 M 最小值为________.

11．已知函数 $f(x)=\left|x+\frac{1}{x}-ax-b\right|$，当 $x\in\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$ 时，设 $f(x)$ 的最大值为 M，则的 M 最小值为________.

12．若存在实数 a、b 使得 $|x^2+ax+b|\leq m(x^2+1)$ 对于任意的 $x\in[-1,\ 1]$ 恒成立，则的 m 最小值为________.

13．设函数 $f(x)=|x^3+ax^2+bx+c|$，a、b、$c\in R$，若对任意的实数 a、b、c，总存在 $x_0\in[0,\ 4]$，使得不等式 $f(x_0)\geq M$ 成立，则实数 M 的取值范围是__________.

14．（2018•温州期末）已知函数 $f(x)=x^2+(a-4)x+3-a$.

（1）若 $f(x)$ 在区间 $[0,\ 1]$ 上不单调，求 a 的取值范围；

（2）若对于任意的 $a\in(0,4)$，存在 $x_0\in[0,\ 2]$，使得 $|f(x_0)|\geqslant t$，求 t 的取值范围 .

15．（2009•湖北）在 R 上定义运算：$p\otimes q=-\frac{1}{3}(p-c)(q-b)+4bc(b$、$c\in R$ 是常数），已知 $f_1(x)=x^2-2c$，$f_2(x)=x-2b$，$f(x)=f_1(x)\otimes f_2(x)$.

（1）如果函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值 $-\frac{4}{3}$，试确定 b、c 的值；

（2）求曲线 $y=f(x)$ 上斜率为 c 的切线与该曲线的公共点；

（3）记 $g(x)=|f'(x)|(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的最大值为 M，若 $M\geqslant k$ 对任意的 b、c 恒成立，试求 k 的取值范围.（参考公式：$x^3-3bx^2+4b^3=(x+b)(x-2b)^2$）

16．（2016•浙江二模）已知函数 $f(x)=x^2-2ax+b(a,b\in R)$，记 M 是 $|f(x)|$ 在区间 $[0,\ 1]$ 上的最大值.

（1）当 $b=0$ 且 $M=2$ 时，求 a 的值；

（2）若 $M\leqslant\frac{1}{2}$，证明 $0\leqslant a\leqslant 1$.

17．（2016•天津）设函数 $f(x)=x^3-ax-b$，$x\in R$，其中 a，$b\in R$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x)$ 存在极值点 x_0，且 $f(x_1)=f(x_0)$，其中 $x_1\neq x_0$，求证：$x_1+2x_0=0$；

（3）设 $a>0$，函数 $g(x)=|f(x)|$，求证：$g(x)$ 在区间 $[-1,\ 1]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.