专题 6 同构式下的函数体系

第一讲同构式的三问三答

又到最后一个章节，自从在 2018 年跟大家交流同构开始，全国各地的老师和学生似乎都很迷这个神招，同构式并不神秘，和很多之前的专题一样，我们需要细化它，透彻理解他，所以我们需要同构式的说明书.

问题一：同构式到底是什么？

同构式源于指对跨阶的问题，e^x+x 属于跨阶函数，而 $x+\ln x$ 属于跳阶函数，所以指对跳阶的函数问题，在中学阶段没有解决它的巧妙方法，只能构造隐零点代换来简化，但通过指对跨阶函数进行同构，即 $h(x)=\begin{cases}xe^x\\x+e^x\\e^x-x-1\end{cases}\Rightarrow h(\ln x)=\begin{cases}x\ln x\\x+\ln x\\x-\ln x-1\end{cases}$ 我们发现将一个指数、直线、对数三阶的问题通过跨阶函数的同构，变成两阶问题，类似于二阶递推数列通过一次递推后变成一阶数列，所以，通过构造跨阶函数的同构式，大大简化了分析和计算.

问题二:同构式能解决什么问题？

同构式是属于跨阶的复合函数，所以复合函数能解决的一切问题，同构式均能解决.在一些求参数的取值范围、零点个数、证明不等式中，利用复合函数单调性，复合函数零点个数以及复合函数的最值保值性来快速解题.

问题三：同构式怎么构造？如何选取参数？

同构式需要构造一个母函数，即外函数，用 $h(x)$ 表示，这个母函数需要满足：①指对跨阶；②单调性和最值易求；通常，$h(x)=\begin{cases}xe^x\\x+e^x\\e^x-x-1\end{cases}$，基本上搞定这三个母函数，就看内函数，即子函数的构造了.

下面我们分别利用同构式的单调性、保值性和零点个数问题来对同构式进行系统的分析.

策略一利用同构式单调性

【例 1】(2018•武邑期中）设实数 $\lambda>0$，若对任意的 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $e^{\lambda x}-\frac{\ln x}{\lambda}\geq 0$ 恒成立，则 λ 的取值范围是_.

【解析】由 $e^{\lambda x}-\frac{\ln x}{\lambda}\geq 0\Rightarrow \lambda e^{\lambda x}\geq \ln x$，由于指数和对数的：“跳阶”问题，故需要构造连续的“跨阶”函数来化简，故不等式的两边同乘以 x，构成 $\lambda xe^{\lambda x}\geq x\ln x$，乘法的式子构造 $h(x)=xe^x$，故不等式满足 $h(\lambda x)\geq h(\ln x)$，易知 $h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 为增函数，即 $\lambda x\geq \ln x$ 恒成立，$\lambda\geq\left(\frac{\ln x}{x}\right)_{\max}=\frac{1}{e}$，故答案为 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

注意：$h(x)=\begin{cases}xe^x\\x+e^x\\e^x-x-1\end{cases}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 为增函数，当构造 $h(p(x))\geq h(q(x))$ 恒成立的时候只需要 $p(x)\geq q(x)$ 恒成立即可. 由于 $h(x)=xe^x$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递增，这个在秒 1 中已经详细介绍，这里不再详述，$p(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,e)$ 区间单调递增，在 $(e,+\infty)$ 单调递减，易知 $p(x)_{\max}=p(e)=\frac{1}{e}$.

【例 2】设 $k>0$，若存在正实数 x，使得不等式 $\log_2 x-k\cdot 2^{kx}\geq 0$ 成立，则 k 的最大值为（）

A. $\frac{1}{e}\log_2 e$ B. $\frac{1}{e}\ln x$ C. $e\log_2 x$ D. $\frac{1}{2}\ln 2$

【解析】关于"指对跳阶"中出现的原函数和反函数问题，一定可以使用同构式的构造，由于同构式必须要构造连续的"跨阶"函数，故构造 $h(x)=xe^x$，此题中，

$\log_2 x\geq k\cdot 2^{kx}\Rightarrow \frac{\ln x}{\ln 2}\geq k\cdot\left(e^{\ln 2}\right)^{kx}\Rightarrow \ln x\geq k\ln 2\cdot e^{kx\cdot\ln 2}$，显然两边需要乘以 x 即可，即

$x\ln x\geq kx\cdot\ln 2\cdot e^{kx\cdot\ln 2}\Rightarrow h(\ln 2)\geq h(kx\cdot\ln 2)$，由于 $h(x)=xe^x$ 为单增函数，故只需存在正实数 x，使得 $\ln x\geq kx\cdot\ln 2$，即 $\frac{\ln x}{x}\geq k\cdot\ln 2$，易知 $\frac{1}{e}\geq\frac{\ln x}{x}$，故 $\frac{1}{e\ln 2}\geq k$，即 $k\leq\frac{1}{e}\log_2 e$，故选 A.

注意：我们会介绍几个重要的"亲戚函数"，xe^x、$x\ln x$、$\frac{x}{e^x}$、$\frac{\ln x}{x}$ 利用它们之间的同构式原理来快速求出最值.

【例 3】（2019•长郡中学月考）已知函数 $f(x)=m\cdot\ln(x+1)-3x-3$，若不等式 $f(x)>mx-3e^x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数的取值范围是_

【解析】解法一 $f(x)=m\cdot\ln(x+1)-3x-3>mx-3e^x\Rightarrow m\cdot\ln(x+1)-3(x+1)>mx-3e^x$，令 $h(x)=mx-3e^x$ 即 $h(\ln(x+1))>h(x)$ 恒成立，由于 $x\geq\ln(x+1)$，故 $h(x)\downarrow$ 函数对 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $h'(x)=m-3e^x\leq 0$，解得 $m\leq 3{e^x}_{\min}=3$，故答案为 $m\leq 3$.

解法二 $f(x)=m\cdot\ln(x+1)-3x-3>mx-3e^x\Rightarrow 3e^x-3(x+1)>mx-m\cdot\ln(x+1)$，构造函数 $h(x)=e^x-x-1$，则 $3h(x)>mh(\ln(x+1))$，这里要用到我们接下来讲到的同构式"保值性"，由于 $x\geq\ln(x+1)$ 恒成立，取等 $x=0$ 条件为，不再定义域内，故 $x>\ln(x+1)$ 恒成立，所以当 $m\leq 3$ 时，$3h(x)>mh(\ln(x+1))$ 恒成立，故答案为 $m\leq 3$.

【例 3】（2019•长郡中学月考）已知 $a<0$，不等式 $x^{a+1}\cdot e^x+a\ln x\geq 0$ 对任意的实数 $x>1$ 恒成立，则实数 a 的最小值时是（）

A. $-\frac{1}{2e}$ B. $-2e$ C. $-\frac{1}{e}$ D. $-e$

【解析】由题意得 $a<0$；不等式 $x^{a+1}\cdot e^x+a\ln x\geq 0\Rightarrow\frac{-a\ln x}{x^a}=\frac{1}{x^a}\ln\frac{1}{x^a}=e^{\ln\frac{1}{x^a}}\ln\frac{1}{x^a}\Rightarrow x\geq\ln\frac{1}{x^a}$ 对 $x>1$ 恒成立，此时 $x\geq\left(-\frac{x}{\ln x}\right)_{\max}$，即 $a\geq -e$，故选 D.

【例 4】（2019 •衡水金卷）已知 $a<0$，不等式 $x^{a+1}\cdot e^x+a\ln x\geq 0$ 对任意的实数 $x>1$ 恒成立，则实数 a 的最小值是（　）

A. $-\frac{1}{2e}$ B. $-2e$ C. $-\frac{1}{e}$ D. $-e$

【解析】由题意得：$x^{a+1}\cdot e^x+a\ln x\geq 0\Rightarrow xe^x\geq\frac{-a\ln x}{x^a}=\frac{1}{x^a}\ln\frac{1}{x^a}\geq e^{\ln\frac{1}{x^a}}\ln\frac{1}{x^a}\Rightarrow x\geq\ln\frac{1}{x^a}$ 对 $x>1$ 恒成立，此时 $a\geq-\frac{x}{\ln x}$，即 $a\geq -e$，故选 D.

注意：这一类均是属于外函数 $h(x)=xe^x$ 的同构式模型，那么在 $h(x)=x+e^x$ 或者 $h(x)=e^x-x-1$ 的模型会是什么情况呢？

策略二利用同构式单调性

构造函数 $h(x)=x+e^x$，易知 $h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)\uparrow$，根据 $p(x)=e^x-x-1\geq 0$ 恒成立，则 $p(\ln x)=x-\ln x-1\geq 0$ 恒成立，当仅当 $\ln x=0$，即 $x=1$ 时等号成立. 由此能得到恒等 $:x\geq \ln x+1=\ln ex$, 所以再利用同构式 $h(x)\geq h(\ln ex)$，即 $x+e^x\geq ex+\ln ex$ 恒成立，当仅当 $x=1$ 时等号成立.

【例 5】(2019 ·椅林一模）已知不等式 $e^x-1\geq kx+\ln x$，对于任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则 k 的最大值

【解析】此题构造乘法的同构显然不可能，因为不等式两边同时乘以 x,kx 将变成平方，无处遁形，并且出现 e^x 和 $\ln x$, 常数项为1构造函数 $h(x)=x+e^x$，根据题意

$e^x\geq kx+\ln ex\Rightarrow e^x+x\geq kx+\ln ex+x$, 在此基础上进行同构式转换，即

$kx+\ln ex+x=kx+x-ex+\ln ex+ex=h(\ln ex)+(k+1-e)x$, 原不等式可以转化为同构式

$h(x)\geq h(\ln ex)+(k+1-e)x$，由于 $h(x)\geq h(\ln ex)$ 恒成立，且当仅当 $x=1$ 时等号成立. 故 $k+1-e\leq 0$，即 $k\leq e-1$.

注意：若 $h(p(x))\geq h(q(x))$ 恒成立，且 $h(p(x))\geq h(q(x))+\varphi(x)$,则一定要满足 $\varphi(x)\leq 0$,此方法属于同构式的单调性和同构式的“保值性”综合题，有一定难度，原理其实很简单，同构式一旦搞定，剩下的就是基本的函数方程不等式的简单思想. 以此题为背景的考题非常多，从选填题压轴到解答题压轴，无处不在，常规方法我们不在这里讲述了，大家可以去看一下常规的解答方案。

【例 6】(2019 ·武汉调研）已知函数 $f(x)=e^x-a\ln(ax-a)+a(a>0)$，若关于 x 的不等式 $f(x)>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为（）

A. $(0,e]$ B. $\left(0,e^2\right)$ C. $\left[1,e^2\right]$ D. $\left(1,e^2\right)$

【解析】由题意可知: $f(x)=e^x>a\ln(ax-a)-a=a\ln a+a\ln(x-1)-a$，由于 e^x 和 $\ln(x-1)$ 明显存在“差一”的错位，无法构造出乘法同构式，思考加法的同构，由于不等式的右边可以提出公因式 a，故将其除去，得到式子 $\dfrac{e^x}{a}>\ln a+\ln(x-1)-1\Rightarrow e^{x-\ln a}>\ln a+\ln(x-1)-1$，式子右边没有参数 a，但左边存在，根据同构式的形式相似原理，我们需要将 $\ln a$ 移至不等式左边，即

$e^{x-\ln a}-\ln a>\ln(x-1)-1$ 显然不等式的两边都加上 x 即可同构成

功, $e^{x-\ln a}+x-\ln a>e^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)$, 构造函数 $h(x)=x+e^x, h(x-\ln a)>h(\ln(x-1))$，易知 $h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)\uparrow$，只需 $x-\ln a>\ln(x-1)\Rightarrow x-\ln(x-1)>\ln a$ 两边取指数得: $\dfrac{e^x}{x-1}>a$，这里求最值也可以利用同构式来解决, 令 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$，易知 $g(x)\geq e, \dfrac{e^x}{x-1}=\dfrac{e^{x-1}}{x-1}\cdot e=eg(x-1)\geq e^2>a, \therefore a<e^2$，故选 B.

注意：指数和对数的变化中出现e^x 和$\ln x+1$ ，或者e^{x-1} 和$\ln x$，或者e^x 和$\ln(x+1)$，这些有着明显的指对不式恒成立的式子，通常是加法同构式$h(x)$ $=x+e^x$ 的常见函数的解不等式中，经常需要几个“亲戚函数”来帮忙，所以我们接下来介绍一下同构式的保值性.

策略三利用同构式的倍值性秒

同构式保值性：若 $h(x),h(p(x)),h(q(x))$ 中，$x\in D,p(x)\in D,q(x)\in D$，故 $h(x),h(p(x)),h(q(x))$ 的最值相等. 概括起来就是构造了同构式，可以根据外函数的性质直接求出函数的最值.

同构式倍值性：在 $h(x)$ 和 $g(x)=m\cdot h(p(x))$ 满足 $x\in D,p(x)\in D$，则 $g(x)=m\cdot h(p(x))$ 的最值是 $h(x)$ 的 m 倍我们将这个性质概括为同构式的倍值性.

下面我们仅以“亲戚函数”的图像和性质来验证这个理论.

考点 1 平移和拉伸得到的同构函数

关于 $f(x)=x\cdot e^x$ 的亲戚函数

如图 1：根据求导后可知：$f(x)=x\cdot e^x$ 在区间 $(-\infty,-1)\downarrow$，在区间 $(-1,+\infty)\uparrow$，$f(x)_{\min}=f(-1)=-\frac{1}{e}$.

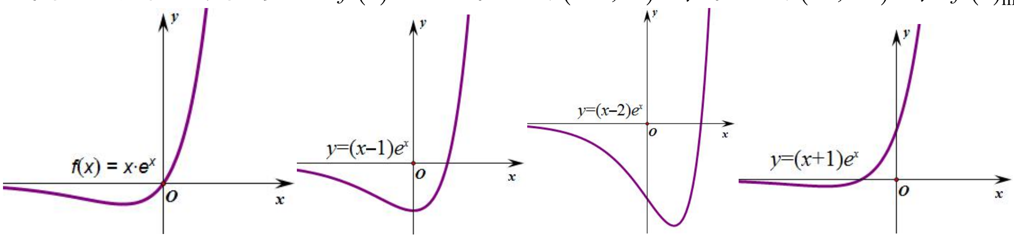

图 1 图 2 图 3 图 4

如图 2：$(x-1)\cdot e^x=e\cdot(x-1)\cdot e^{x-1}=ef(x-1)$，即将 $f(x)$ 向右平移 1 个单位，再将纵坐标扩大为原来的 e 倍，故可得 $y=(x-1)\cdot e^x$ 在区间 $(-\infty,0)\downarrow$，在区间 $(0,+\infty)\uparrow$，当 $x=0$ 时，$y_{\min}=-1$.

如图 3：$(x-2)\cdot e^x=e^2\cdot(x-2)\cdot e^{x-2}=e^2f(x-2)$，即将 $f(x)$ 向右平移 2 个单位，再将纵坐标扩大为原来的 e^2 倍，故可得 $y=(x-2)\cdot e^x$ 在区间 $(-\infty,1)\downarrow$，在区间 $(1,+\infty)\uparrow$，当 $x=1$ 时，$y_{\min}=-e$.

如图 4：$(x+1)\cdot e^x=e^{-1}\cdot(x+1)\cdot e^{x+1}=e^{-1}f(x+1)$，即将 $f(x)$ 向左平移 1 个单位，再将纵坐标缩小为原来的 $\frac{1}{e}$ 倍，故可得 $y=(x+1)\cdot e^x$ 在区间 $(-\infty,-2)\downarrow$，在区间 $(-2,+\infty)\uparrow$，当 $x=-2$ 时，$y_{\min}=-\frac{1}{e^2}$.

考点 2 乘除导致凹凸反转同构函数

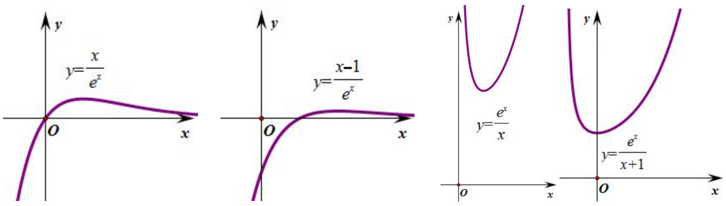

图 5 图 6 图 7 图 8

如图 5：$y=\frac{x}{e^x}=x\cdot e^{-x}=-f(-x)$，即将 $f(x)$ 关于原点对称后得到 $y=\frac{x}{e^x}$，故可得 $y=\frac{x}{e^x}$ 在区间 $(-\infty,1)\uparrow$，在区间 $(1,+\infty)\downarrow$，当 $x=1$ 时，$y_{\max}=\frac{1}{e}$.

如图 6：$y=\frac{x-1}{e^x}=\frac{1}{e}(x-1)\cdot e^{-(x-1)}=-\frac{1}{e}f(-(x-1))$，即将 $f(x)$ 关于原点对称后，向右移一个单位，再将纵坐标缩小 $\frac{1}{e}$ 倍，得到 $y=\frac{x-1}{e^x}$，故可得 $y=\frac{x-1}{e^x}$ 在区间 $(-\infty,2)\uparrow$，在区间 $(2,+\infty)\downarrow$，当 $x=2$ 时，$y_{\max}=\frac{1}{e^2}$.

如图 7：$y=\frac{e^x}{x}=-\frac{1}{-x\cdot e^{-x}}=-\frac{1}{f(-x)}(x>0)$，属于分式函数，将 $\frac{1}{f(x)}$ 关于原点对称后得到，故可得 $y=\frac{e^x}{x}$ 在区间 $(0,1)\downarrow$，在区间 $(1,+\infty)\uparrow$，当 $x=1$ 时，$y_{\min}=e$.

如图 8：$y=\frac{e^x}{x+1}=-\frac{1}{e}\frac{1}{(-x-1)\cdot e^{-x-1}}=-\frac{1}{e}\frac{1}{f(-(x+1))}(x>0)$，属于分式函数，将 $\frac{1}{f(x)}$ 关于原点对称后，左移一个单位，再将纵坐标缩小 $\frac{1}{e}$ 倍，故可得 $y=\frac{e^x}{x+1}$ 在区间 $(-1,0)\downarrow$，在区间 $(0,+\infty)\uparrow$，当 $x=0$ 时，$y_{\min}=1$.

考点3 顺反同构函数

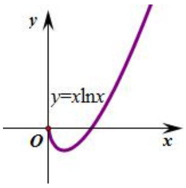

图 9

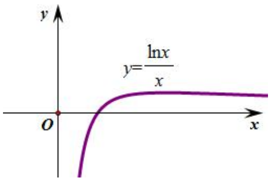

图 10

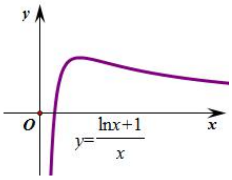

图 11

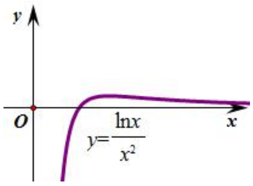

图 12

如图 9：$x\ln x=e^{\ln x}\cdot\ln x=f(\ln x)$，当 $\ln x\in(-\infty,-1)$，即 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\downarrow$，当 $\ln x\in(-1,+\infty)$，即 $x\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)\uparrow$，$y_{\min}=-\dfrac{1}{e}$．

如图 10：$\dfrac{\ln x}{x}=-\ln x^{-1}\cdot x^{-1}=-f(-\ln x)$，实现了凹凸反转，原来最小值反转后变成了最大值，当 $-\ln x\in(-\infty,-1)$，即 $x\in(e,+\infty)\downarrow$，当 $-\ln x\in(-1,+\infty)$，即 $x\in(0,e)\uparrow$，$y_{\max}=\dfrac{1}{e}$．

如图 11：$\dfrac{\ln x+1}{x}=e\dfrac{\ln ex}{ex}=-ef(-\ln ex)$，当 $-\ln ex\in(-\infty,-1)$，即 $x\in(1,+\infty)\downarrow$，当 $-\ln ex\in(-1,+\infty)$，即 $x\in(0,1)\uparrow$，$y_{\max}=1$．

如图 12：$\dfrac{\ln x}{x^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}f(-\ln x^2)$，当 $-\ln x^2\in(-\infty,-1)$，即 $x\in(\sqrt{e},+\infty)\downarrow$，当 $-\ln x^2\in(-1,+\infty)$，即 $x\in(0,\sqrt{e})\uparrow$，$y_{\max}=\dfrac{1}{2e}$．

【例 1】（2019•凌源市一模）若函数 $f(x)=e^x-ax^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有两个极值点 x_1，$x_2(0<x_1<x_2)$，则实数 a 的取值范围是（）

A．$a\leqslant\dfrac{e}{2}$　　B．$a>e$　　C．$a\leqslant e$　　D．$a>\dfrac{e}{2}$

【解析】由题意得：$f'(x)=e^x-2ax=0$ 有两个实根，即 $y=2a=g(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 有两个交点，如图 7 所示，$y=\dfrac{e^x}{x}$ 在区间 $(0,1)\downarrow$，在区间 $(1,+\infty)\uparrow$，当 $x=1$ 时，$y_{\min}=e$；$\therefore 2a\in(e,+\infty)$，选 D.

【例 2】（2019•广州一模）已知函数 $f(x)=e^{|x|}-ax^2$，对任意 $x_1<0$，$x_2<0$，都有 $(x_2-x_1)(f(x_2)-f(x_1))<0$，则实数 a 的取值范围是（）

A．$(-\infty,\dfrac{e}{2}]$　　B．$(-\infty,-\dfrac{e}{2}]$　　C．$[0,\dfrac{e}{2}]$　　D．$[-\dfrac{e}{2},0]$

【解析】由题意可知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,0)$ 上的单调递减函数，且 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增，当 $x>0$ 时，$f(x)=e^x-ax^2$，$f'(x)=e^x-2ax\geq 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 $2a\leq(\dfrac{e^x}{x})_{\min}=e$，$\therefore a\leq\dfrac{e}{2}$，选 A.

【例 3】（2019•荆州期末）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{lnx}{x}$ 的单调增区间为（）

A．$(-\infty,1)$　　B．$(0,1)$　　C．$(0,e)$　　D．$(1,+\infty)$

【解析】$f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}=e\cdot\dfrac{\ln ex}{ex}$，由于函数 $\dfrac{\ln x}{x}$ 在区间 $(0,e)\uparrow$，$(e,+\infty)\downarrow$，则 $f(x)=e\cdot\dfrac{\ln ex}{ex}$，当 $ex\in(0,e)$，即 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\uparrow$，故选 B.

【例 4】（2019•广州期末）函数 $f(x)=xlnx-mx^2$ 有两个极值点，则实数 m 的取值范围是（）

A．$(0,\dfrac{1}{2})$　　B．$(-\infty,0)$　　C．$(0,1)$　　D．$(0,+\infty)$

【解析】$f'(x)=\ln x+1-2mx=0$ 有两个根，则 $2m=e\dfrac{\ln ex}{ex}$，由于函数 $\dfrac{\ln x}{x}$ 在区间 $(0,e)\uparrow$，$(e,+\infty)\downarrow$，最大值为 $\dfrac{1}{e}$，参考图 10，故 $2m=e\dfrac{\ln ex}{ex}\Rightarrow\dfrac{2m}{e}=\dfrac{\ln ex}{ex}$ 有两根时满足 $0<\dfrac{2m}{e}<\dfrac{1}{e}$，即 $0<m<\dfrac{1}{2}$，选 A.

【例 5】（2019•深圳月考）已知函数 $f(x)=\frac{lnx}{x}-kx$ 在区间 $[e^{\frac{1}{4}}$， $e]$ 上有两个不同的零点，则实数 k 的取值范围为（）

A. $[\frac{1}{4\sqrt{e}}$， $\frac{1}{2e})$ B. $(\frac{1}{4\sqrt{e}}$， $\frac{1}{2e})$ C. $[\frac{1}{e^2}$， $\frac{1}{4\sqrt{e}}]$ D. $[\frac{1}{e^2}$， $\frac{1}{e}]$

【解析】$f(x)=\frac{\ln x}{x}-kx=0\Rightarrow k=\frac{\ln x}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{\ln x^2}{x^2}$，当 $x\in[e^{\frac{1}{4}},e]$ 时，$x^2\in[e^{\frac{1}{2}},e^2]$，由于函数 $\frac{\ln x}{x}$ 在区间 $(0,e)\uparrow$，$(e,+\infty)\downarrow$，则当 $x^2\in[e^{\frac{1}{2}},e]$ 时，$\frac{\ln x^2}{x^2}\in[\frac{1}{2\sqrt{e}},\frac{1}{e}]$，当 $x^2\in[e,e^2]$ 时，$\frac{\ln x^2}{x^2}\in[\frac{2}{e^2},\frac{1}{e}]$，由于 $\frac{1}{2\sqrt{e}}>\frac{2}{e^2}$，故当 $k=\frac{1}{2}\frac{\ln x^2}{x^2}\in[\frac{1}{4\sqrt{e}},\frac{1}{2e})$ 时，$f(x)=\frac{lnx}{x}-kx$ 有两个不同零点，故选 A.

【注意】关于 $y=x\ln x$ 与 $y=\frac{\ln x}{x}$ 均可以成为模型函数，也可以作为模板来进行同构，本专题之所以这样设计是让读者思考这一系列函数的同构效用，达到举一反三的目的。例题中我们会以 $y=\frac{\ln x}{x}$ 为模板进行求最值讨论.

第二讲同构式保值性定理

保值性定理 1: 若 $h(p(x))\ge h(q(x))$ 恒成立，且满足 $h(p(x))\ge h(q(x))+\varphi(x)$，则一定要满足 $\varphi(x)\le 0$;

保值性定理 2: 若 $h(p(x))\ge h(q(x))$ 恒成立，且满足 $h(p(x))\ge m\cdot h(q(x))\quad (h(x)\ge 0)$，则一定要满足 $m\le 1$; 若要满足 $h(p(x))=mh(q(x))$ 有实根，则一定要满足 $m\ge 1$；

保值性定理 3: 若 $h(p(x))\ge 0,\quad h(q(x))\ge 0$，且满足当 $x=m$ 时，$h(p(x))=h(q(x))=0$，则一定满足不等式 $h(p(x))+h(q(x))\ge 0$; 若 $h(p(x))=0$ 时和 $h(q(x))=0$ 时的 x 取的值不相等则 $h(p(x))+h(q(x))>0$.

【例 12】（2019 • 保山一模）若函数 $f(x)=e^x+ax\ln x$ 有两个极值点，则 a 的取值范围是（ ）

A. $(-\infty,-e)$ B. $(-\infty,-2e)$ C. $(e,+\infty)$ D. $(2e,+\infty)$

【解析】由于 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)\uparrow$，且 $x\ge\ln ex$，故 $h(x)\ge h(\ln ex)$ 恒成立，若 $h(x)=-\frac{a}{e}h(\ln ex)$ 有两不等实根，则一定需要 $-\frac{a}{e}>1$，解得 $a<-e$，故选 A.

注意：相比此题的传统方法，同构式确实可以一步秒杀，还有什么理由不学习研究同构式呢?下面我们来讲解一下高考题中的同构式保值定理的应用.

【例 13】（2018 • 新课标Ⅰ）已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$.

(1) 设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a，并求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 证明：当 $a\ge\frac{1}{e}$ 时， $f(x)\ge 0$.

【解析】（1）略；

(2) 当 $a\ge\frac{1}{e}$ 时，$ae^x-\ln x-1\ge\frac{1}{e}\cdot e^x-\ln ex$，故只需证 $\frac{1}{e}e^x\ge\ln ex$，故只需证 $\frac{1}{e}\cdot \mathrm{e}x e^x\ge ex\ln ex$，即证明 $xe^x\ge ex\ln ex$ 恒成立，由于 $g(x)=x-\ln ex$ 中，$g'(x)=1-\frac{1}{x}$，易知 $g(x)_{\min}=g(1)=0$，故 $x\ge\ln ex$ 恒成立，构造函数 $h(x)=xe^x$，易知 $h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 为增函数，故不等式满足 $h(x)\ge h(\ln ex)$，即 $f(x)\ge 0$ 恒成立.

注意：此题也可以来用反证法，当 $f(x)\ge 0$，只需 $ae^x\ge\ln ex$，只需 $ae\cdot xe^x\ge ex\ln ex$ 恒，只需 $ae\cdot h(x)\ge h(\ln ex)$ 恒成立，故只需 $ae\ge 1$，即 $a\ge\frac{1}{\mathrm{e}}$.

【例 14】(2014·全国卷 I)设函数 $f(x)=ae^{x}\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=e(x-1)+2$.

(1)求 a,b;

(2)证明: $f(x)>1$.

【解析】(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=ae^{x}\ln x+\frac{a}{x}\cdot e^{x}-\frac{b}{x^{2}}\cdot e^{x-1}+\frac{b}{x}\cdot e^{x-1}$, 由题意可得 $f(1)=2$, $f'(1)=e$, 故 $a=1$, $b=2$;

(2)由(1)知, $f(x)=e^{x}\ln x+\frac{2}{x}\cdot e^{x-1}$, 要证 $f(x)>1$, 只需 $x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}\Rightarrow x\ln x+(-x)e^{-x}>-\frac{2}{e}$, 构造函数 $h(x)=xe^{x}$, 显然 $h(x)\geq-\frac{1}{e}$, 当仅当 $x=-1$ 时等号成立, $x\ln x+(-x)e^{-x}=h(\ln x)+h(-x)$, 根据同构式的保值性可得 $h(\ln x)\geq-\frac{1}{e}$, 当 $\ln x=-1\Rightarrow x=\frac{1}{e}$ 时等号成立, 同理 $h(-x)\geq-\frac{1}{e}$ 当 $-x=-1\Rightarrow x=1$ 时等号成立, 由于 $h(\ln x),h(-x)$ 取得最小值的条件不同, 故 $x\ln x+(-x)e^{-x}=h(\ln x)+h(-x)>-\frac{2}{e}$, 即 $f(x)>1$.

注意：保值性不仅仅是保大于零或者恒成立，也可以保最大值或者最小值，知道指对跨阶的同构式，基本就是一步到位，怎么样?有点感觉了吧，再看看下一道高考题

【例 13】(2015·新课标 I)设函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 零点的个数;

(2)证明:当 $a>0$ 时, $f(x)\geq 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

【解析】(1) $f(x)=e^{2x}-a\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $\therefore f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}$. 当 $a\leq 0$ 时, $f'(x)>0$ 恒成立, 故 $f'(x)$ 没有零点, 当 $a>0$ 时, $\because y=e^{2x}$ 为单调递增, $y=-\frac{a}{x}$ 单调递增, $\therefore f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增, 又 $f'(a)>0$, 假设存在 b 满足 $0<b<\ln\frac{a}{2}$ 时, 且 $b<\frac{1}{4}$, $f'(b)<0$, 故当 $a>0$ 时, 导函数 $f'(x)$ 存在唯一的零点,

(2)要证 $e^{2x}\geq a\ln x+2a+a\ln\frac{2}{a}$, 只需 $\frac{e^{2x}}{a}\geq\ln x+2+\ln\frac{2}{a}$, 即证 $e^{2x-\ln a}-\ln 2x-2+\ln a\geq 0$, 构造函数 $h(x)=e^{x}-x-1$, 显然 $h(x)\geq 0$, 由于 $h(2x-\ln a)=e^{2x-\ln a}-2x+\ln a-1$, $h(\ln 2x)=2x-\ln 2x-1$

故 $h(2x-\ln a)+h(\ln 2x)=e^{2x-\ln a}-2x+\ln a-1+2x-\ln 2x-1=e^{2x-\ln a}-\ln 2x+\ln a-2\geq 0$, 当仅当 $2x=\ln a$ 且 $\ln 2x=0$, 即 $x=\frac{1}{2}$, $a=e$ 时等号成立, 所以当 $a>0$ 时, $f(x)\geq 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

注意：看不到乘法同构就用加法, $h(x)=x+e^{x}$ 的同构式通常用于单调性，因为无最值，所以无法采用保值性来使用，而 $h(x)=e^{x}-x-1$ 既能实现单调性, 又能实现保值性，堪称同构式的桥头堡，丁面关于同构式 $h(x)=e^{x}-x-1$, 在涉及保值性问题上，有一个特殊的名词，叫做改头换面.

第三讲 改头换面类型一

构造 $h(x)=e^x-x-1$，则 $h(\ln(x+m))=(x+m)-\ln(x+m)-1$，故 $e^x-\ln(x+m)=e^x-x-1+(x+m)-\ln(x+m)-1+2-m=h(x)+h(\ln(x+m))+2-m$，由于 $h(x)+h(\ln(x+m))\geq 0$，故 $e^x-\ln(x+m)\geq 2-m$，当仅当 $x=0$，且 $\ln(x+m)=0$ 时等号成立，这里就提出了一个问题就是，当仅当 $m=1$ 时可以取等，其余均是大于. 此题也可以表示为 $f(x)=e^{x-m}-\ln(x+m)\geq 2-2m$，当仅当 $m=\dfrac{1}{2}$ 时 $f(x)_{\min}=1$

【例 16】(2013·新课标 II) 已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$.

(1) 设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $m\leq 2$ 时，证明 $f(x)>0$.

【解析】

(1) $\because f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+m}$，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值，$\therefore f'(0)=1-\dfrac{1}{m}=0$，解得 $m=1$. 所以函数 $f(x)=e^x-\ln(x+1)$，其定义域为 $(-1,+\infty)$. $\because$ $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{e^x(x+1)-1}{x+1}$. 设 $g(x)=e^x(x+1)-1$ 则 $g'(x)=e^x(x+1)+e^x>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数，又 $\because g(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$；当 $-1<x<0$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$. 所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上为减函数；在 $(0,+\infty)$ 上为增函数；

(2)（常规方法）证明：当 $m\leq 2, x\in(-m,+\infty)$ 时，$\ln(x+m)\leq\ln(x+2)$，故只需证明当 $m=2$ 时 $f(x)>0$.

当 $m=2$ 时，函数 $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+2}$ 在 $(-2,+\infty)$ 上为增函数，且 $f'(-1)<0$，$f'(0)>0$. 故 $f'(x)=0$ 在 $(-2,+\infty)$ 上有唯一实数根 x_0，且 $x_0\in(-1,0)$. 当 $x\in(-2,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，从而当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得最小值. 由 $f'(x_0)=0$，得 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0+2}$，$\ln(x_0+2)=-x_0$. 故

$f(x)\geq f(x_0)=\dfrac{1}{x_0+2}+x_0=\dfrac{(x_0+1)^2}{x_0+2}>0$ 综上，当 $m\leq 2$ 时，$f(x)>0$.

解法二 构造 $h(x)=e^x-x-1$，则 $h'(x)=e^x-1=0$ 时，故当 $x=0$，$h(x)_{\min}=0$ $e^x-\ln(x+m)=e^x-x-1+(x+m)-\ln(x+m)-1+2-m=h(x)+h(\ln(x+m))+2-m\geq 2-m$，$\because m\leq 2$ $\therefore f(x)\geq 0$，由于取等号时，$m=0$，而此时 $h(x)=0\Rightarrow x=0$，$h(\ln(x+m))=h(\ln x)=0\Rightarrow x=1$，天式取得等号的条件不一致，故 $f(x)>0$.

注意：e^{x-m} 和 $\ln(x+n)$ 在同构式里面仅仅在 $n-m=1$ 的时候获得取等条件，最常见就是构造 $h(x)\geq h(\ln(x+1))$ 或者构造 $h(x-1)\geq h(\ln x)$，诸如此类的改头换面，我们也可以称为差一同构式.

针对 xe^x 和 $\ln x$，没有了差一同构式，却多了个不对称构造，一个有 xe^x，一个却不是 $x\ln x$，此类也是可以改头换面的，就是将指数部分进行改头换面，构成 $h(x)=e^x-x-1$ 的同构式应用.

第四讲 改头换面类型二

利用 $h(x)=e^x-x-1\geq 0$，则有①$xe^x=e^{x+\ln x}\geq x+\ln x+1$； $x^2e^x=e^{x+2\ln x}\geq x+2\ln x+1$.

这一系列放缩的取等条件就是 $x+\ln x=0(x\approx 0.6)$，或者 $x+2\ln x=0(x\approx 0.7)$；

利用 $h(x)=e^x-ex\geq 0$（取等条件 $x=1$），则有②$xe^x=e^{x+\ln x}\geq e(x+\ln x)$；$\dfrac{e^x}{x}=e^{x-\ln x}\geq e(x-\ln x)$；$x^2e^x=e^{x+2\ln x}\geq e(x+2\ln x)$；这一系列放缩的取等条件就是 $x+\ln x=1(x=1)$， $x-\ln x=1(x=1)$ 或者 $x+2\ln x=1(x=1)$

【例 17】（2018 ·江苏期末）函数 $f(x)=xe^x-x-\ln x$ 的最小值为____

【解析】构造 $h(x)=e^x-x-1$， $f(x)=xe^x-x-\ln x=e^{x+\ln x}-x-\ln x-1+1=h(x+\ln x)+1$，当仅当 $x_0+\ln x_0=0$ 时，$h\left(x_0+\ln x_0\right)=0$，此时 $f(x)_{\min}=f\left(x_0\right)=1$. 故答案为 1.

【例 18】（2018 ·长沙模拟）已知 $f(x)=xe^x-ax-\ln x\geq 1$ 对于任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则 a 的取值范围是

【解析】构造 $h(x)=e^x-x-1$，根据题意 $f(x)-1=xe^x-ax-\ln x-1=e^{x+\ln x}-ax-\ln x-1\geq 0$ 恒成立，同构得：$e^{x+\ln x}-x-\ln x-1-ax+x=h(x+\ln x)+(1-a)x\geq 0$，根据保值性 $h(x+\ln x)\geq 0$，即 $(1-a)x\geq 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，显然 $a\leq 1$，根据例 17 的相同取等条件可知，故 $a\in(-\infty,1]$.

【例 19】（2019 ·深圳月考）已知 $x(e^{2x}-a)\geq \ln x+1$ 对于任意 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 的恒成立，则 a 的最大值为

A. 1　　B. 2　　C. $e-1$　　D. e

【解析】

构造 $h(x)=e^x-x-1$，$xe^{2x}-ax-\ln x-1=e^{2x+\ln x}-2x-\ln x-1+2x-ax\geq h(2x+\ln x)+(2-a)x\geq 0$ 恒成立，可知 $a\leq 2$，取等条件为 $2x+\ln x=0$，此时 a 取得最大值 2.

第五讲 利用同构式处理零点与极值点问题

极值存在问题：若函数 $f(x)=h(g(x))$，则令 $t=g(x)$，根据复合函数求导 $h'(g(x))=h'(t)\cdot t'$ 原理，若存在一个极值，则 $\begin{cases}g'(x)=0\\h'(t)\neq 0\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}g'(x)\neq 0\\h'(t)=0\end{cases}$，若不存在极值，则 $\begin{cases}g(x)\neq 0\\h(t)\neq 0\end{cases}$，若存在多个极值，则 $\begin{cases}g'(x)=0\\h'(t)=0\end{cases}$，此方法叫做同构式内外函数分离法，通常可以简化求导计算，达到事半功倍效果.

零点个数问题：若函数 $f(x)=h(g(x))$，则令 $t=g(x)$，先确定内值外定，即内函数的值域是外函数的定义域，再确定内外函数在相应区间的单调性，利用乘法原理来确定相应区间根的个数.

【例 20】（2019. 陕西一模）已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}+k(\ln x-x)$，若 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的唯一极值点，则实数 k 的取值范围是（　）

A. $(-\infty,e]$　　B. $(-\infty,e)$　　C. $(-e,+\infty)$　　D. $[-e,+\infty)$

【解析】函数 $f(x)=e^{x-\ln x}-k(x-\ln x)=h(x-\ln x)$，令 $t=x-\ln x\ge 1, h(t)=e^t-kt$ 的定义域是 $[1,+\infty)$，

易知 $t'=1-\dfrac{1}{x}$，当 $x=1$ 时 $t'=0$，$\because x=1$ 是函数 $f(x)$ 的唯一一个极值，点 $\therefore h'(t)=e^t-k=0$ 在 $t\in[1,+\infty)$

无变号零点， $\therefore k\le e^1=e$，故选 A.

注意：复合函数求导分离，此题就是 $f'(x)=\left(e^{x-\ln x}-k\right)\cdot(x-\ln x)'=\left(e^t-k\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$，直明白函数的复合性质，$h(t)=e^t-kt$ 为外函数，求导为 $h'(t)=e^t-k=0$， $t=x-\ln x$， $t\in[1,+\infty)$ 为内函数，求导为 $t'=1-\dfrac{1}{x}$，复合函数求导是将内外函数相乘，故内函数取得零点时外函数一定无零点或者和内函数在同一位置取得非变号零点.采用分别求零点策略，能大大简化求导过程，所以关于极值点存在的问题，此招无处不在，很多学生会因为求导出错而丢分，此来源于复合函数本质，高观点低运算.

【例 21】（2019 ·襄阳模拟）已知 $f(x)=x^2e^x-a(x+2\ln x)$ 有两个零点，则 a 的取值范围是

【解析】由于 $x^2e^x=e^{x+2\ln x}$，故可以换元，令 $x+2\ln x=t$，易知 t 是关于 x 的单调增函数，且 $t\in R$，令 $h(x)=e^x-ax$ 故根据复合函数零点原理可得：$f(x)=x^2e^x-a(x+2\ln x)=e^t-at=h(t)$ 在 $t\in R$ 上有两个零点，参变分离加指数找基友得：$\dfrac{1}{a}=\dfrac{t}{e^t}=g(t), g'(t)=\dfrac{1-t}{e^t}$，如图，易知当 $t<1$ 时，$g(t)\uparrow$，当 $t>1$ 时，$g(t)\downarrow$，$g(t)_{\max}=g(1)=\dfrac{1}{e}$， 当 $t<0$ 时，显然 $g(t)<0$， $t>0$ 时，由于 $t\to 0$ 和 $t\to+\infty$ 时 $g(t)\to 0$，

故当 $\dfrac{1}{a}\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$，即 $a\in(e,+\infty)$ 时， $f(x)=x^2e^x-a(x+2\ln x)$ 有两个零点.

注意：求出内函数的值域后，内函数由于单调递增，所有一切交给了外函数，此法又能大大简化求导和分析计算，一个导数题，确实分析主要矛盾是最重要的，同构式将内外函数分别分析，达到事半功倍效果.

【例 22】（2019•保山一模）若函数 $f(x)=e^x+ax\ln x$ 有两个极值点，则 a 的取值范围是

A. $(-\infty,-e)$　　B. $(-\infty,-2e)$　　C. $(e,+\infty)$　　D. $(2e,+\infty)$

【解析】此题由于原函数看不出同构式子，故需要看求导后的情况，由 $f'(x)=e^x+a\ln x+a=0$，得 $e^x=-a(\ln x+1)$. 即 $e^x=-a\ln ex$ 有两交点，典型的乘法同构题型，加上保值性知识，令 $h(x)=xe^x$，根据题 $h(x)=-\dfrac{a}{e}h(\ln ex)$ 有两交点，故只需 $-\dfrac{a}{e}>1$，解得 $a<-e$，故选 A.

【例 23】（2019 ·广东四校）已知函数 $f(x)=xe^x-a(x+\ln x)(x>0)$.

(1) 当 $a=e$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

【解析】(1) 可以根据复合函数求导来快速求导，由于 $f(x)=xe^x-e(x+\ln x)=e^{x+\ln x}-e(x+\ln x)$，

故 $f'(x)=\left(e^{x+\ln x}-e\right)(x+\ln x)'=\left(e^{x+\ln x}-e\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$， 即 $x+\ln x=1\Rightarrow x=1$， 故当 $x<1$ 时， $x+\ln x<1$， $e^{x+\ln x}-e<0$， $1+\dfrac{1}{x}>0$， $f'(x)=\left(e^{x+\ln x}-e\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>0$， 同理可得当 $x>1$ 时，$e^{x+\ln x}-e>0$， $1+\dfrac{1}{x}>0$，$f'(x)=\left(e^{x+\ln x}-e\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>0$，故 $f(x)$ 在 (0, 1) 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增.

(2) 易知当 $a=0$ 时, $f(x)=xe^x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上无零点; 当 $a\neq 0$ 时, $x+\ln x=\ln\left(xe^x\right)$, 令 $t=xe^x(t>0)$,

$f(x)$ 的零点个数等价于 $t-a\ln t=0$ 根的个数, 即 $\frac{1}{a}=\frac{\ln t}{t}$ 的根的个数, 即直线 $y=\frac{1}{a}$ 与曲线 $g(t)=\frac{\ln t}{t}$ 的图像交点个数, 由同构函数体系易知 $g(t)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$, 所以当 $\frac{1}{a}>\frac{1}{e}$ 时, 即 $0<a<e$ 时, 无交点; 当 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{e}$ 时, 即 $a>e$ 时, 两个交点; 当 $\frac{1}{a}=\frac{1}{e}$ 或 $\frac{1}{a}<0$ 时, 即 $a=e$ 或 $a<0$ 时, 一个交点.

综上所述: 当 $0\le a<e$ 时, $f(x)$ 无零点; 当 $a>e$ 时, $f(x)$ 有两个零点; 当 $a=e$ 或 $a<0$ 时, $f(x)$ 有一个零点.

注意: 这里给到了一个思维过程, 具体写解答题需要证明 $t=xe^x$ 单调, 且在区间 $(0,\infty+)$ 的一一对应性, 故只考虑外函数 $t-a\ln t=0$ 的零点个数

【例 24】(2019 · 全国模拟) 已知函数 $f(x)=x^2e^{ax}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 已知函数 $g(x)=f(x)-2\ln x-ax$, 且函数 $g(x)$ 的最小值恰好为 1, 求 a 的最小值.

【解析】(1) $f^{'}(x)=e^{ax+2\ln x}\cdot(ax+2\ln x)^{'}=e^{ax+2\ln x}\cdot\left(a+\frac{2}{x}\right)$, 止于 $e^{ax+2\ln x}\ge 0$, 故只要讨论 $a+\frac{2}{x}$ 的零点问题, 当 $a\ge 0$ 时, $a+\frac{2}{x}>0$ 恒成立, 此时 $f^{'}(x)>0$, $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 为增函数; 当 $a<0$ 时, $f^{'}(x)=0$ 则 $x=-\frac{2}{a}$, 且当 $0<x<-\frac{2}{a}$ 时, $f^{'}(x)>0$, 当 $x>-\frac{2}{a}$ 时, $f^{'}(x)<0$, 故 $f(x)$ 在区间 $\left(0,-\frac{2}{a}\right)$ 为增函数, 在区间 $\left(-\frac{2}{a},+\infty\right)$ 为减函数.

(2) $g(x)=f(x)-2\ln x-ax=x^2e^{ax}-2\ln x-ax=e^{2\ln x+ax}-(2\ln x+ax)=h(2\ln x+ax)$, 令 $t=2\ln x+ax(t\in R)$, $h(t)=e^t-t$, 根据复合函数求导原理可

$g^{'}(x)=h^{'}(2\ln x+ax)=\left(e^{2\ln x+ax}-1\right)\cdot(2\ln x+ax)^{'}=\left(e^{2\ln x+ax}-1\right)\cdot\left(a+\frac{2}{x}\right)$ 易得 $h(t)_{\min}=h(0)=1$, 即

$t=0\Leftrightarrow 2\ln x_0+ax_0=0\Leftrightarrow\frac{\ln x_0}{x_0}=-\frac{a}{2}$ 方程有解, 即 $y=-\frac{a}{2}$ 与 $y=\frac{\ln x}{x}$ 图像有交点, 即 $a\ge-\frac{2}{e}$.

注意: 此题只需要外函数求导有解, 对于内函数求导后的式子并无太大要求, 内函数求导后可以有零点. 也可以无零点, 如果内函数求导后出现零点了, 那么就是多了几个极值点, 在这些极值点当中, 只要有个极小值点是恰好是 1 即可满足题意. 同构式一般都在同一位置取到极值, 如果同构以后发现不是极值点, 会怎样呢?同构式也会出现一种极值偏移的情况, 下面我们来什么状况

第六讲同构式的极值偏移

同构式最常见模型 $h(x)=e^x-x-1$, 以 $h(x)+h(\ln(x+1))$ 或者 $h(x)-h(\ln(x+1))$ 均在 $x=0$ 时取得最小值, 我们称之为同构式的单调性和保值性. 在这类型同构式当中, 一定满足外函数单调性和内函数单调性统一, 且取得极值的位置也统一.

例 (1) $e^x-\ln(x+1)+mx-1\ge 0$ 恒成立, (2) $e^x+\ln(x+1)+mx-1\ge 0$ 对 $[0,+\infty)$ 恒成立,

则 (1) $e^x-\ln(x+1)+mx-1=e^x-x-1+x-\ln(x+1)+mx=h(x)+h(\ln(x+1))+mx\ge 0\Rightarrow m\ge 0$.

(2) $e^x+\ln(x+1)+mx-1=e^x-x-1-[x-\ln(x+1)]+(m+2)x=h(x)-h(\ln(x+1))+(m+2)x\ge 0\Rightarrow$ $m\ge -2$.

原理就来自于 $x=0$ 时, $h(x)_{\min}=0$, $h(\ln(x+1))_{\min}=0$, $h(x)-h(\ln(x+1))$ 在区间 $[0,+\infty)$ 单调递增,

(1)式是同时取最小，(2)式是单调性问题，在同构式的题目设计中，加法同构和减法同构都共同指向它们的共同最值部分.

当同构式取得的极值不是整个函数的极值时，那就是同构式的“极值偏移”，我们只需要分析同构式的极值和整个函数的极值大小关系，即可得出结论，题根和本质还是同构式极值问题.

【例 25】(2019·衡水金卷)已知 $f(x)=\ln x+ax-a$.

(1)若 $F(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2$, 求 $F(x)$ 的单调区间;

(2)若 $g(x)=e^{x-1}-f(x)$ 的最小值为 M, 求证 $M\le 1$.

【解析】(1) $f'(x)=\frac{1}{x}+a+x\ge 2+a$, 当 $a\ge -2$ 时, $f'(x)\ge 0$, 此时 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)\uparrow$, 当 $a<-2$ 时,

$f'(x)=\frac{x^2+ax+1}{x}=0, x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$, 故 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\cup\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)\uparrow$,

在区间 $\left(\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\downarrow$.

(2)构造 $h(x)=e^x-(x+1)$, 则 $h(x)\ge 0$, 则 $h(x-1)+h(\ln x)=e^{x-1}-x+x-\ln x-1$, $g(x)=e^{x-1}-\ln x-a(x-1)=h(x-1)+h(\ln x)-a(x-1)+1$, $\because h(x-1)_{\min}+h(\ln x)_{\min}=0$, 当仅当 $x=1$ 时同时取到最小值, $g'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}-a$, $g'(1)=-a$, $g(1)=1$, 且 $g'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}-a$ 在 $(0,+\infty)\uparrow$.

接下来分类讨论:

①当 $a=0$, 则 $g(x)_{\min}=1$, 成立;

②当 $a>0$, 则 $g'(1)=-a<0$, $g'(x)<0$ 对 $x\in(0,1)$ 恒成立, 且 $\exists x_0\in(1,+\infty)$ 使得 $g'(x_0)=0$,

$g(x)_{\min}=g(x_0)\le g(1)=1$, 成立;

③当 $a<0$, 则 $g'(1)=-a>0, \exists x_0\in(0,1)$ 使得 $g'(x_0)=0, g(x)_{\min}=g(x_0)\le g(1)=1$, 成立; 得 $g(x)_{\min}\le g(1)=1$; 综上得证.

注意: 虽然 $h(x-1)_{\min}+h(\ln x)_{\min}=0$，且 $x=1$ 时同时取到最小值，但函数的最小值不一定是同构的最小值，但可以根据单调性来综合分析讨论，此举达到享半功倍。

【例 25】(2019·佛山二模)已知函数 $f(x)=e^x+\ln(x+1)-ax-\cos x$, 其中 $a\in R$.

(1)若 $a\le 1$, 证明: $f(x)$ 是定义域上的增函数;

(2)是否存在 a, 使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值?说明理由.

【解析】(1)由 $f'(x)=e^x+\frac{1}{x+1}-a+\sin x,(x>-1)$. 先证: $e^x\ge x+1$, 令 $g(x)=e^x-x-1$, 则 $g'(x)=e^x-1$, 令 $g'(x)=0$ 得 $x=0$, 当 $x<0$, $g'(x)<0$, $g(x)$ 递减, 当 $x>0$, $g'(x)>0$, $g(x)$ 递增, 故 $g(x)$ 的极小值为 $g(0)=0$, 即 $g(x)\ge g(0)=0$, 所以 $e^x\ge x+1$, 所以 $e^x+\frac{1}{x+1}\ge x+1+\frac{1}{x+1}\ge 2$, 又 $\sin x\ge -1$, 但等号不同时成立, 所以 $e^x+\frac{1}{x+1}+\sin x>1\geqslant a$, 故 $f'(x)=e^x+\frac{1}{x+1}-a+\sin x>0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-1\infty+,)$ 上的黑调递增;

(2) 构 造

$g(x)=e^x-x-1$, $f(x)=e^x+\ln(x+1)-ax-\cos x=\left(e^x-x-1\right)-[x-\ln(x+1)]+2x+1-\cos x-ax$ 即

$f(x)=g(x)-g(\ln(x+1))+(2-a)x+1-\cos x$, 因为 $g(x)-g[\ln(x+1)]+1-\cos x$ 在 $x=0$ 处取得最小值,

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值, 则必须有 $(2-a)x=0$, 所以 $a=2$, 这里需说明 $a>2$ 以及 $a<2$ 矛盾（方法同上题衡水金卷）.

达标训练

1.（2019•武汉期末）已知函数 $f(x)=x\cdot\ln x-a\cdot e^x$（$e$ 为自然对数的底数）有两个极值点，则实数 a 的取值范围是（）

A. $(0,\frac{1}{e})$　　B. $(\frac{1}{e},e)$　　C. $(-\infty,\frac{1}{e})$　　D. $(-\infty,e)$

2.（2018•荆州期末）函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{lnx}{x}$ 的单调增区间为（）

A. $(-\infty,1)$　　B. $(0,1)$　　C. $(0,e)$　　D. $(1,+\infty)$

3.（2018•沈阳期末）函数 $f(x)=\frac{e^{2x}}{x}$ 在 $(-\infty,m)$ 上单调递减，则实数 m 的最大值为（）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

4. 已知 x_0 是方程 $2x^2e^{2x}+\ln x=0$ 的实根，则关于实数 x_0 的判断正确的是（）

A. $x_0\geq\ln 2$　　B. $x_0\leq\frac{1}{e}$　　C. $2x_0+\ln x_0=0$　　D. $2e^{x_0}+\ln x_0=0$

5. 已知 $\ln a=me^{mb}\,(m>0)$，且 $a\geq b>0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为（）

A. $\left[e^{-1}, +\infty\right)$　　B. $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$　　C. $(1, e]$　　D. $\left[e^{-1}, e\right]$

6. 设 $k>0$，若存在正实数 x，使得不等式 $\log_2 x-k\cdot 2^{kx}\geqslant 0$ 成立，则 k 的最大值为.

7. 设实数 $\lambda>0$，若对任意的 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $e^{2\lambda x}-\frac{lnx}{2\lambda}\geqslant 0$ 恒成立，则 λ 的最小值为.

8. 已知函数 $f(x)=m\cdot\ln(x+1)-3x-3$，若不等式 $f(x)>mx-3e^x$ 在 $x\in(0, +\infty)$ 上恒成立，则实数 m 的取值范围是.

9.（2019•眉山模拟）已知函数 $f(x)=ae^x-2x-1$ 有两个零点，则 a 的取值范围是____.

10.（2019•南充模拟）已知函数 $f(x)=ax-ln(-x)$，$x\in[-e, 0)$，其中 e 为自然对数的底数.

（1）当 $a=-1$ 时，证明：$f(x)+\frac{ln(-x)}{x}>\frac{1}{2}$.

（2）是否存在实数 a，使 $f(x)$ 的最小值为 3，如果存在，求出 a 的值；如果不存在，请说明理由.

11.（2019•厦门一模）已知函数 $f(x)=(x+a)ln(x+1)-ax$.

（1）若 $a=2$，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $a\leqslant -2$，$-1<x<0$，求证：$f(x)>2x(1-e^{-x})$.

12.（2019•长春二模）已知函数 $f(x)=e^x+bx-1(b\in R)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若方程 $f(x)=lnx$ 有两个实数根，求实数 b 的取值范围.

13.（2019•唐山一模）已知函数 $f(x)=ax-\frac{lnx}{x}$，$a\in R$.

（1）若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围；

（2）若 $y=f(x)$ 的图象与 $y=a$ 相切，求 a 的值.

14.（2019•辽阳一模）已知函数 $f(x)=xlnx$.

（1）若函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}-\frac{1}{x}$，求 $g(x)$ 的极值；

（2）证明：$f(x)+1<e^x-x^2$.（参考数据：$ln2\approx 0.69$，$ln3\approx 1.10$，$e^{\frac{3}{2}}\approx 4.48$，$e^2\approx 7.39$)

15.（2018•房山期末）已知函数 $f(x)=\frac{lnx}{x}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）设实数 k 使得 $kf(x)<\frac{1}{2}x$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求 k 的取值范围.

16.（2018•德州期末）已知函数 $f(x)=xe^x-a(x+lnx)$.

（1）当 $a=2$ 时，求函数 $f(x)$ 的极小值；

（2）若 $f(x)>0$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

17.（2019•东莞一模）已知函数 $f(x)=xe^x+a(lnx+x)$.

（1）若 $a=-e$，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $a<0$ 时，记 $f(x)$ 的最小值为 m，求证：$m\leqslant 1$.

18.（2019•济南期末）设 $f(x)=xe^x-ax^2$，$g(x)=\ln x+x-x^2+1-\frac{e}{a}$.

（1）讨论函数 g(x) 的单调性；

（2）当 $a>0$ 时，设 $h(x)=f(x)-ag(x)\geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

19.（2019•新疆模拟）已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}+a(lnx-x)$.

（1）当 $a=0$ 时，求 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线方程；

（2）当 $a>0$ 时，求 $f(x)$ 的最小值.

20.（2019•肇庆三模）已知函数 $f(x)=\frac{lnx+a}{x},(a\in R)$，$g(x)=e^{2x}-2$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x)\leqslant g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上成立，求 a 的取值范围.

21.（2019•龙岩期中）已知函数 $f(x)=ax+lnx(a\in R)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a=1$ 时，不等式 $xe^x+1>f(x)+m$ 对于任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

22.（2019•拉萨二模）已知函数 $f(x)=xe^x-ax-alnx$.

（1）若 $a=e$，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x)\geqslant 1$，求 a 的取值范围.

23.（2019•辽宁一模）已知函数 $f(x)=lnx-ax+\frac{1}{x}$.

（1）若 1 是函数 $f(x)$ 的一个极值点，求实数 a 的值；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（3）在（1）的条件下证明：$f(x)\leqslant xe^x-x+\frac{1}{x}-1$.