参考答案及解析

专题1　基本初等函数与图象

达标训练（一）

1．B【解析】要使$a\sqrt{-a}$有意义，则$a<0$，所以$a\sqrt{-a}=-\sqrt{-a\cdot a^2}=-\sqrt{-a^3}$．故选B.

2．C【解析】由$\sqrt[3]{(-\frac{8a^{-3}}{27b^3})^4}=\sqrt[3]{\frac{8^4a^{-12}}{3^{12}b^{12}}}=\frac{2^4a^{-4}}{3^4b^4}=\frac{16}{81a^4b^4}$．故选C.

3．D【解析】因为$x+x^{-1}=3$，所以当$n=1$时，$x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2=3^2-2=7$，当$n=2$时，$x^4+x^{-4}=(x^2+x^{-2})^2-2=7^2-2=47$，当$n=3$时，$x^8+x^{-8}=(x^4+x^{-4})^2-2=47^2-2=2207$，…归纳$x^{2n}+x^{-2n}(n\in N^*)$的个位数字是7．故选D.

4．C【解析】由$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=(a\cdot(a\cdot a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{8}}$．故选C.

5．C【解析】由$(3\sqrt{5})^2\cdot(-\frac{8}{27})^{\frac{2}{3}}+(0.002)^{-\frac{1}{2}}-10(\sqrt{5}-2)^{-1}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^0=3^2\cdot5\cdot(\frac{2}{3})^{3\times\frac{2}{3}}+\sqrt{500}-10(\sqrt{5}+2)+1$
$=20+10\sqrt{5}-10\sqrt{5}-20+1=1$．故选C.

6．A【解析】原式$=[2\times(-6)\div(-3)]a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=4a$．故选A.

7．A【解析】原式$=\lg5\cdot\lg5+\lg2(1+\lg5)=\lg5(\lg5+\lg2)+\lg2=\lg5+\lg2=1$．故选A.

8．D【解析】由$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=\frac{\lg3}{\lg2}\times\frac{\lg4}{\lg3}\times\ldots\times\frac{\lg(n+2)}{\lg(n+1)}=\frac{\lg(n+2)}{\lg2}=\log_2(n+2)=k$，则$2^k=n+2$．$n=2$时，$k=1$；…；$n=1022$时，$k=10$；若$k=11$，则$n=2048-2=2026>2018$，不满足题意．
在$n\in(1,2018)$内的所有"劣数"的和$=2^2-2+2^3-2+\ldots+2^{10}-2=\frac{4\times(2^9-1)}{2-1}-18=2026$．故选D.

9．C【解析】由$a>b>1$，因为$\log_a b+\log_b a=\frac{10}{3}$，所以$\log_a b+\frac{1}{\log_a b}=\frac{10}{3}$，解得$\log_a b=\frac{1}{3}$．所以$a=b^3$．
因为$a^{3b}=b^a$，所以$b^{9b}=b^a$，可得$a=9b$．所以$b^3=9b>0$，化为$b^2=9$，解得$b=3$．故选C.

10．D【解析】因为$\log_4 3=p$，$\log_3 25=q$，$\lg5=\frac{\log_2 5}{\log_2 10}=\frac{\log_4 25}{1+\log_4 25}=\frac{\log_4 3\cdot\log_3 25}{1+\log_4 3\cdot\log_3 25}=\frac{pq}{1+pq}$．故选D.

11．D【解析】在A中，$3^{lnx+lny}=3^{lnx}\cdot3^{lny}$，故A错误；在B中，$3^{\ln(x+y)}\neq3^{\ln x}\cdot3^{\ln y}=3^{\ln(xy)}$，故B错误；在C中，$3^{\ln x\cdot\ln y}=(3^{\ln x})^{\ln y}$，故C错误；在D中，$3^{\ln(xy)}=3^{\ln x+\ln y}=3^{\ln x}\cdot3^{\ln y}$，故D正确．故选D.

12．A【解析】因为$\lg2=a$，$\lg3=b$，所以$\log_{12}10=\frac{\lg10}{\lg12}=\frac{1}{\lg3+2\lg2}=\frac{1}{2a+b}$．故选A.

13．B【解析】因为$2\log_x m=1$，$2\log_y m=3$，$7\log_{xyz} m=2$，所以$\frac{\lg x}{\lg m}=2$，$\frac{\lg y}{\lg m}=\frac{2}{3}$，$\frac{\lg x+\lg y+\lg z}{\lg m}=\frac{7}{2}$，
所以$2+\frac{2}{3}+\frac{\lg z}{\lg m}=\frac{7}{2}$，解得$\frac{\lg z}{\lg m}=\frac{5}{6}$，所以$\log_z m=\frac{6}{5}$．故选B.

14．D【解析】因为$b=\log_3 8\cdot\log_4 4\cdot\log_8 2=\log_3 2$，$a\log_3 2=1$，即$ab=1$．故选D.

15．D【解析】由$10^m=\sqrt{2}$，$10^n=6$，因为$m=\lg\sqrt{2}=\frac{1}{2}\lg2$，$n=\lg6$，则$n-2m=\lg6-2\times\frac{1}{2}\lg2=\lg\frac{6}{2}=\lg3$．
故选D.

16．A【解析】由$\frac{\lg(\lg a^{100})}{2+\lg(\lg a)}=\frac{\lg(100\lg a)}{2+\lg(\lg a)}=\frac{\lg100+\lg(\lg a)}{2+\lg(\lg a)}=\frac{2+\lg(\lg a)}{2+\lg(\lg a)}=1$．故选A.

17. B 【解析】由 x，y 为非零实数，$a>0$，且 $a\neq 1$，给出下列式子或运算：①$x<0$ 时，$\log_a x^2=3\log_a x$ 不成立；②$\log_a|xy|=\log_a|x|+\log_a|y|$，不正确；③若 $e=\ln x$，则 $x=e^e$，不正确；④若 $\lg(\ln y)=0$，则 $\ln y=1$，$y=e$，正确；⑤若 $2^{1+\log_4 x}=16$，则 $1+\log_4 x=4$，$x=4^3=64$，正确. 其中正确的个数为 2. 故选 B.

18. D 【解析】因为 $2^x=18^y=6^{xy}$，①当 $x=y=0$ 时，等式成立，则 $x+y=0$；②当 x、$y\neq 0$ 时，由 $2^x=18^y=6^{xy}$ 得，$x\lg 2=y\lg 18=xy\lg 6$，由 $x\lg 2=xy\lg 6$，得 $y=\dfrac{\lg 2}{\lg 6}$，由 $y\lg 18=xy\lg 6$，得 $x=\dfrac{\lg 18}{\lg 6}$，则 $x+y=\dfrac{\lg 18}{\lg 6}+\dfrac{\lg 2}{\lg 6}=\dfrac{\lg 18+\lg 6}{\lg 6}=\dfrac{\lg 36}{\lg 6}=\dfrac{2\lg 6}{\lg 6}=2$. 综上所述，$x+y=0$，或 $x+y=2$. 故选 D.

19. $\dfrac{143}{80}$ 【解析】原式 $=0.4^{3\times(-\frac{1}{3})}-1+(-2)^{3\times(-\frac{4}{3})}+2^{4\times(-0.75)}+0.1=\dfrac{5}{2}-1+16+\dfrac{1}{8}+0.1=\dfrac{143}{80}$. 故答案为 $\dfrac{143}{80}$.

20. 110 【解析】$1.5^{-\frac{1}{3}}\times(-\dfrac{7}{6})^0+8^{\frac{1}{4}}\times\sqrt[4]{2}+(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^6-\sqrt{(-\dfrac{2}{3})^{\frac{2}{3}}}=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}+2+2^2\cdot 3^3-\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}=110$. 故答案为 110

21. $3-\sqrt{2}$ 【解析】因为 $\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{3^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2}=\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}=3-\sqrt{2}$. 故答案为 $3-\sqrt{2}$

22. $a^{\frac{7}{6}}$（或 $\sqrt[6]{a^7}$ 或 $a\sqrt[6]{a}$） 【解析】$\sqrt[3]{a^{\frac{5}{2}}\sqrt{a^{-2}}}\div\sqrt{\sqrt[3]{a^{-5}}\sqrt[3]{a}}=a^{\frac{5}{6}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}\div\sqrt{a^{-\frac{5}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}\div a^{\frac{-\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\div a^{-\frac{2}{3}}=a^{\frac{7}{6}}$. 故答案为 $a^{\frac{7}{6}}$（或 $\sqrt[6]{a^7}$ 或 $a\sqrt[6]{a}$）.

23. $k=\dfrac{1}{4}(p+1)^2$ 【解析】设 $\sqrt{k^2-pk}=n$，则 $(k-\dfrac{p}{2})^2-n^2=\dfrac{p^2}{4}$，$(2k-p+2n)(2k-p-2n)=p^2$，因为 p 是给定的奇质数，所以 $p^2=1\times p^2=p\cdot p$，又因为 n 是正整数，所以 $\begin{cases}2k-p+2n=p^2\\2k-p-2n=1\end{cases}$，解得 $k=\dfrac{1}{4}(p+1)^2$. 故答案为 $k=\dfrac{1}{4}(p+1)^2$.

24. 2 【解析】根据题意，若 $2^x\cdot 8^y=16$，则 $2^{x+3y}=2^4$，则 $x+3y=4$，则 $2^{-1+\log_2 x}+\log_9 27^y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{3y}{2}=\dfrac{1}{2}(x+3y)=2$. 故答案为 2.

25. 2 【解析】根据题意，$3^x=4^y=6$，则 $x=\log_3 6$，$y=\log_4 6$，则 $\dfrac{1}{x}=\log_6 3$，$\dfrac{1}{y}=\log_6 4$，则 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=2\log_6 3+\log_6 4=\log_6 36=2$，故答案为 2.

26. 1 或 $\sqrt[4]{72}$ 【解析】由 $2^x=6^{2y}=A$，得 $x=\log_2 A$，$y=\dfrac{1}{2}\log_6 A$，由 $x+y=2xy$，得 $\log_2 A+\dfrac{1}{2}\log_6 A=12\log_2 A\cdot\log_6 A$，所以 $\dfrac{2\lg A}{\lg 2}+\dfrac{\lg A}{\lg 6}=\dfrac{4\lg^2 A}{\lg 2\cdot\lg 6}$，所以 $\lg A=0$ 或 $\lg A^4=\lg 72$，即 $A=1$ 或 $A=\sqrt[4]{72}$. 故答案为 1 或 $\sqrt[4]{72}$.

27. 1 【解析】因为 $2^a=3^b=6$，所以 $\dfrac{1}{a}=\log_6 2$，$\dfrac{1}{b}=\log_6 3$，所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\log_6 2+\log_6 3=1$. 故答案为 1.

28. 0 【解析】$4^x=6^y=9^z$，可得 $x\lg 4=y\lg 6=z\lg 9$，因为 $x=\dfrac{z\lg 9}{\lg 4}$，$y=\dfrac{z\lg 9}{\lg 6}$.

所以 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{\lg 4}{z\lg 9}-\dfrac{2\lg 6}{z\lg 9}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{\lg\frac{4}{36}}{z\lg 9}+\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z}=0$. 故答案为 0.

29. $2^{2016}-2$ 【解析】由 $2016=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_m=\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\ldots\cdot\log_m(m+1)\cdot\log_{(m+1)}(m+2)=\frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 3}\cdot\ldots\cdot\frac{\lg(m+1)}{\lg m}\cdot\frac{\lg(m+2)}{\lg(m+1)}=\frac{\lg(m+2)}{\lg 2}=\log_2(m+2)$，可得 $m+2=2^{2016}$，即 $m=2^{2016}-2$，故答案为 $2^{2016}-2$.

30. $7+4\sqrt{3}$ 【解析】因为 $\log_2(3a+4b)=\log_2 a+\log_2 b=\log_2 ab$，所以 $a>0$，$b>0$，$3a+4b=ab$，所以 $\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=1$，所以 $a+b=(a+b)(\frac{4}{a}+\frac{3}{b})=4+3+\frac{3a}{b}+\frac{4b}{a}\geqslant 7+4\sqrt{3}$，当且仅当 $a=4+2\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{3}+3$ 时取等号，故答案为 $7+4\sqrt{3}$.

31. $\frac{1}{16}$，$\frac{1}{16}$ 【解析】因为正数 a，b 满足 $3+\log_2 a=1+\log_4 b=\log_8(a+b)$，所以 $\log_2(8a)=\frac{\log_2(4b)}{2}=\frac{\log_2(a+b)}{3}$，所以 $8a=\sqrt{4b}=\sqrt[3]{a+b}$，解得 $a=\frac{1}{16}=b$．故答案为 $\frac{1}{16}$，$\frac{1}{16}$.

32. $6\sqrt{2}$ 【解析】因为 $\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\sqrt{3}} y=2$，所以 x，$y>0$，$xy=3$．则 $3x+2y\geqslant 2\sqrt{3x\cdot 2y}=2\sqrt{6\times 3}=6\sqrt{2}$，当且仅当 $y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$x=\sqrt{2}$ 时取等号．故答案为 $6\sqrt{2}$.

33. $1+\frac{3}{ab}$ 【解析】因为 $2^a=3$，$3^b=7$，所以 $a=\log_2 3=\frac{\lg 3}{\lg 2}$，$b=\log_3 7=\frac{\lg 7}{\lg 3}$，所以 $ab=\frac{\lg 7}{\lg 2}=\frac{1}{\log_7 2}$．则 $\log_7 56=\log_7(7\times 8)=1+3\log_7 2=1+\frac{3}{ab}$．故答案为 $1+\frac{3}{ab}$.

34. ①④ 【解析】①若 $1>a>0$，$b>0$，$a^b\in(0,1)$，$\ln^+ a=0$，则 $\ln^+(a^b)=b+0=b\ln^+ a$，同理对于 $a\geqslant 1$，$b>0$；$1>b>0$，$a>0$；$b\geqslant 1$，$a>0$，也成立；②若 $1>a>0$，$b>1$，$1>ab>0$，可得：$\ln^+(ab)=0$，$\ln^+ a+\ln^+ b=0+\ln b$，不成立；③若 $a>0$，$b>0$，$b>1>a$，则 $\ln^+(\frac{a}{b})=0$，$\ln^+ a-\ln^+ b=0-\ln b\neq 0$，不成立；④若 $a>0$，$b>0$，$1>a+b>0$，则 $\ln^+(a+b)=0$，$\ln^+ a+\ln^+ b+\ln 2=\ln 2$，此时成立，同理对于其它情况也成立．综上可得：只有①④正确．故答案为①④.

35.（1）$x=1$；（2）$x=\log_3 2-2=\log_3\frac{2}{9}$

【解析】(1) 由 $\log_{(x+2)}(4x+5)-\log_{(4x+5)}(x^2+4x+4)-1=0$，化为 $\log_{(x+2)}(4x+5)-2[\log_{(x+2)}(4x+5)]^{-1}-1=0$，令 $t=\log_{(x+2)}(4x+5)$，上式化为 $t-\frac{2}{t}-1=0$，即 $t^2-t-2=0$，解得 $t=-1$，$t=2$；当 $\log_{(x+2)}(4x+5)=-1$ 时解得 $x=-1$ 或 $x=-\frac{9}{4}$ 都不符合题意，舍去．当 $\log_{(x+2)}(4x+5)=2$ 时有 $x^2=1$，解得 $x=-1$（舍去），$x=1$

（2）由 $3^{2x+5}=5\cdot 3^{x+2}+2$，令 $t=3^{x+2}$，上式化为 $3t^2-5t-2=0$，解得 $t=-\frac{1}{3}$（舍去），$t=2$，即 $3^{x+2}=2$，$x+2=\log_3 2$，所以 $x=\log_3 2-2=\log_3\frac{2}{9}$.

36.【解析】(1) 原式 $=(2^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}}-4\times\frac{7}{4}-2^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{3}{4}}+1=2-7-2+1=-6$.

（2）原式 $=\log_3\frac{3^{\frac{3}{4}}}{3}+lg(25\times 4)+2-0=\log_3 3^{-\frac{1}{4}}+lg10^2+2=-\frac{1}{4}+2+2=\frac{15}{4}$.

37.【解析】(1) 因为 $9^x-4\cdot 3^x+3=0$，所以 $(3^x-1)(3^x-3)=0$，所以 $3^x=1$ 或 $3^x=3$，所以 $x=0$ 或 $x=1$.

（2）因为 $\log_3(x^2-10)=1+\log_3 x=\log_3 3x$，所以$\begin{cases}x^2-10=3x\\x^2-10>0\\x>0\end{cases}$，解得 $x=5$．

38.【解析】(1) 设 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，平方可得 $x+x^{-1}+2=9$，所以 $x+x^{-1}=7$．

（2）由 $x\log_3 4=1$，$x=\log_4 3$，$4^x+4^{-x}=4^{\log_4 3}+4^{\log_4\frac{1}{3}}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$．

（3）由 $[(1-\log_6 3)^2+\log_6 2\cdot\log_6 18]\div\log_6 4=\dfrac{\log_6{}^2 2+\log_6 2\log_6 18}{\log_6 4}=\dfrac{\log_6 2(\log_6 2+\log_6 18)}{\log_6 4}=\dfrac{2\log_6 2}{\log_6 4}=1$．

（4）由 $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-(\dfrac{3}{5})^0+(\dfrac{9}{4})^{-0.5}+\sqrt[4]{(\sqrt{2}-e)^4}=\sqrt{2}+1-1+\dfrac{2}{3}+e-\sqrt{2}=\dfrac{2}{3}+e$．

39.【解析】因为 $x^{\lg x}y^{\lg y}z^{\lg z}=10$，所以 $\lg^2 x+\lg^2 y+\lg^2 z=1$，因为 $xyz=10$，所以 $\lg x+\lg y+\lg z=1$，所以 $\lg x\lg y+\lg y\lg z+\lg z\lg x=0$，因为 x、y、$z\geq 1$，所以 $\lg x$，$\lg y$，$\lg z\geq 0$，所以 $\lg x$，$\lg y$，$\lg z$ 中至少有 2 个为 0，不妨设 $\lg x=\lg y=0$，故 $x=y=1$，所以 $z=10$．所以 $x=y=1$，$z=10$ 或者 $x=z=1$，$y=10$ 或者 $z=y=1$，$x=10$．

达标训练（二）

1．A【解析】根据大指小底原理，$e^\pi>\pi^e$，再根据幂函数原理 $\pi^\pi>e^\pi$，$\pi^e>e^e$，故 $a<d<c<b$．故选 A.

2．D【解析】因为 $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{1}{x}=\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{y}=\log_{\sqrt{6}}\dfrac{1}{z}$，所以 $\log_2 x=\log_3 y=\log_6 z=k$，因为 x，y，z 均大于 1，所以 $k>0$，则 $x=2^k,y=3^k,z=6^k$，即 $a=2^{\frac{k}{2}},b=3^{\frac{k}{3}},c=6^{\frac{k}{6}}$，取对数得 $\ln a=\dfrac{k\ln 2}{2}=\dfrac{k\ln 4}{4}$，$\ln b=\dfrac{k\ln 3}{3}$，$\ln c=\dfrac{k\ln 6}{6}$，所以 $b>a>c$．故选 D.

3．C【解析】根据对数等比定理可得 $b>a>c$．故选 C.

4．C【解析】由 $a=1+\log_3 7>2$，$b=1+\log_5 7>2$，$c=2^{\frac{4}{5}}<2$，又 $\log_3 7=\dfrac{\ln 7}{\ln 3}>\dfrac{\ln 7}{\ln 5}=\log_5 7$，由 $a>b>c$．故选 C.

5．A【解析】等式全部减去 1，得 $\log_2 a=\log_3 3b=\log_6 36(a+b)$，则 $\dfrac{\ln a}{\ln 2}=\dfrac{\ln 3b}{\ln 3}=\dfrac{\ln 36(a+b)}{\ln 6}$，由于 $\ln 2+\ln 3=\ln 6$，根据对数等比定理可得 $\ln a+\ln 3b=\ln 36(a+b)$，即 $3ab=36(a+b)\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{12}$．故选 A.

6．B【解析】由 $a=\dfrac{\ln 3}{3}$，$b=\dfrac{1}{e}$，$c=\dfrac{\sqrt{5}\ln\sqrt{20}}{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}=\dfrac{\ln\sqrt{20}}{\sqrt{20}}$，根据 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 性质可得 $b>a>c$．故选 B.

7．B【解析】由 $c=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{6}=\log_3 6>a=\log_3 4$，$b=4>c$，故 $b>c>a$．故选 B.

8．A【解析】由 $c=\log_{\frac{1}{e}}\dfrac{1}{3}=\ln 3>a=\ln\dfrac{11}{4}>1$，$b=(\dfrac{1}{3})^{\frac{1}{e}}<1$，故 $c>a>b$．故选 A.

9．B【解析】设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$，可得函数 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 内单调递增，所以 $f(2.1)<f(2.2)$，即 $\dfrac{\ln 2.1}{2.1}<\dfrac{\ln 2.2}{2.2}$，化为 $2.1^{2.2}<2.2^{2.1}$，所以 $1<a<b$，$c=\log_{2.2}2.1<1$，所以 $c<a<b$．故选 B.

10．D【解析】因为 $t>1$，所以 $\ln t>0$，即 $2x=2\dfrac{\ln t}{\ln 2}=4\dfrac{\ln t}{\ln 4}>0$，$3y=3\dfrac{\ln t}{\ln 3}>0$，$5z=\dfrac{\ln t}{\ln 5}>0$，根据函数

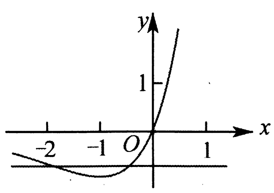
$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$ 可得，函数 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 内单调递减，$\dfrac{\ln 3}{3}>\dfrac{\ln 4}{4}>\dfrac{\ln 5}{5}$，综上可得 $3y<2x<5z$．故选 D.

11．C 【解析】正数 a，b 满足 $3+\log_2 a=2+\log_3 b=\log_6(a+b)$，所以 $\dfrac{\lg(8a)}{\lg 2}=\dfrac{\lg(9b)}{\lg 3}=\dfrac{\lg(72ab)}{\lg 6}=\dfrac{\lg(a+b)}{\lg 6}$，所以 $72ab=a+b$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=72$．故选 C.

12．D 【解析】根据题意可知方程 $f(x)=kx$ 有三个不相等的正实根，a，b，c，作出函数 $g(x)=\dfrac{|f(x)|}{x}$ 的图象，当 $f(x)\ge 0$ 时，$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，此时 $g(x)\in\left[0,\dfrac{1}{e}\right]$，当 $f(x)<0$ 时，$g(x)=-\dfrac{\ln x}{x}$，此时 $g(x)\in(0,+\infty)$，根据图像可得，即 k 的取值范围是 $(0,\dfrac{1}{e})$．故选 D.

13．B 【解析】因为实数 a，b 满足 $\log_{\frac{1}{2}}a=\log_{\frac{1}{3}}b$，即 $\dfrac{\lg a}{\lg\frac{1}{2}}=\dfrac{\lg b}{\lg\frac{1}{3}}$，所以 $\dfrac{\lg a}{-\lg 2}=\dfrac{\lg b}{-\lg 3}$，所以 $\dfrac{\lg a}{\lg 2}=\dfrac{\lg b}{\lg 3}$；对于①，当 $a=3$，$b=2$ 时，$\dfrac{\lg 3}{\lg 2}\ne\dfrac{\lg 2}{\lg 3}$，即 $\log_{\frac{1}{2}}3\ne\log_{\frac{1}{3}}2$，所以①不成立；对于②，当 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{3}$ 时，$\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{3}=1$，所以②成立；对于③，由 $\lg 2<\lg 3$，当 $0<\lg a<\lg b$，即 $1<a<b$ 时，等式成立，所以③成立；对于④，当 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{\lg\frac{1}{3}}{\lg\frac{1}{2}}\ne\dfrac{\lg\frac{1}{2}}{\lg\frac{1}{3}}$，即 $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}\ne\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}$，所以④不成立；对于⑤，当 $a=b=1$ 时，$\log_{\frac{1}{2}}1=\log_{\frac{1}{3}}1=0$，等式成立，所以⑤成立；所以以上等式不可能成立的是①④．故选 B.

14．C 【解析】法一（高三用）$f(x)=xe^x$，则 $f'(x)=(x+1)e^x$，由 $f'(x)>0$ 得 $x>-1$．由 $f'(x)<0$ 得 $x<-1$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 为减函数，$(-1,+\infty)$ 增函数，即当 $x=-1$ 时，函数取得极小值 $f(-1)=-\dfrac{1}{e}<0$，因为 $f(0)=0$，且当 $x<0$ 时，$f(x)<0$．所以由 $f(a)=f(b)$ 知 $a<0$，$b<0$．由 $(-a)e^a=(-b)e^b$ 得 $\ln(-a)-\ln(-b)=b-a$．故选 C.



法二（高一用）由于不知道正负，故令 $e^a=m$，$e^b=n$，则 $a=\ln m$，$b=\ln n$，$\because ae^a=be^b$，$\therefore m\ln m=n\ln n$，即 $-m\ln\dfrac{1}{m}=-n\ln\dfrac{1}{n}\Rightarrow\dfrac{\ln\frac{1}{m}}{\frac{1}{m}}=\dfrac{\ln\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$，根据 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 图像可得 $1<\dfrac{1}{m}<e<\dfrac{1}{n}$，即 $a<0,b<0$，故对 $ae^a=be^b$ 同时取对数得 $\ln(-a)+a=\ln(-b)+b$，即 $\ln(-a)-\ln(-b)=b-a$．故选 C.

15．B 【解析】因为 $a>b>0$，$a+b=1$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{b}>1$，所以 $y=\log_{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}a>z=\log_{\frac{1}{b}}a$，即 $y>z$．因为 $a>b>0$，$a+b=1$，所以 $\dfrac{1}{b}>1$，$\dfrac{1}{a}>1$，$0<b<a<1$，即 $y<0$，$x=(\dfrac{1}{a})^b>(\dfrac{1}{a})^0=1$，所以 $x>z$．即 $y<z<x$．

故选 B.

16. A 【解析】由 $a=\log_2 7=\frac{\ln 7}{\ln 2}>\frac{\ln 7+\ln\frac{3}{2}}{\ln 2+\ln\frac{3}{2}}=\frac{\ln\frac{21}{2}}{\ln 3}>\frac{\ln 8}{\ln 3}=\log_3 8=b>1$，$c=0.3^{0.2}<1$，即 $a>b>c$．故选 A.

17. D 【解析】因为 $a=\log_2 3=\frac{\ln 3}{\ln 2}>\frac{\ln 3+\ln\frac{3}{2}}{\ln 2+\ln\frac{3}{2}}=\frac{\ln\frac{9}{2}}{\ln 3}>\frac{\ln 4}{\ln 3}=\log_3 4=b$，又因为 $a=\frac{\ln 3}{\ln 2}=\frac{\ln 9}{\ln 4}>\frac{\ln 8}{\ln 5}=c$，

$b=\frac{\ln 4}{\ln 3}=\frac{\ln 64}{\ln 27}<\frac{\ln 64}{\ln 25}=\frac{\ln 8}{\ln 5}=c$，所以 $a>c>b$．故选 D.

18.【解析】由换底公式得：$\log_5 65=2+\frac{\ln\frac{13}{5}}{\ln 5}$，$\log_2 7=2+\frac{\ln\frac{7}{4}}{\ln 2}=2+\frac{\ln\frac{343}{64}}{\ln 8}$，再根据糖水不等式得：

$\frac{\ln\frac{13}{5}}{\ln 5}<\frac{\ln\frac{13}{5}+\ln\frac{8}{5}}{\ln 5+\ln\frac{8}{5}}=\frac{\ln\frac{104}{25}}{\ln 8}<\frac{\ln\frac{343}{64}}{\ln 8}$，故 $\log_5 65<\log_2 7$．

19.【解析】换底得 $\log_3 2=\frac{\ln 2}{\ln 3}=\frac{\ln 4}{\ln 9}$，$\log_{11} 5=\frac{\ln 5}{\ln 11}$，根据糖水不等式得：$\frac{\ln 4}{\ln 9}<\frac{\ln 4+\ln\frac{11}{9}}{\ln 9+\ln\frac{11}{9}}=\frac{\ln\frac{44}{9}}{\ln 11}<\frac{\ln 5}{\ln 11}$．

20.【解析】根据题意，函数 $f(x)=\log_{3a}(10x-ax^2)$，设 $t=10x-ax^2$，则 $y=\log_{3a}t$，又由 $a>0$，$a\neq\frac{1}{3}$，若 $t=10x-ax^2=x(10-ax)>0$，解可得 $0<x<\frac{10}{a}$，在区间 $(0,\frac{5}{a})$ 上，$t=10x-ax^2$ 为增函数，在 $(\frac{5}{a},\frac{10}{a})$ 上，$t=10x-ax^2$ 为减函数，当 $0<a<\frac{1}{3}$ 时，$3a<1$，$\frac{5}{a}>15$，则区间 $(1,2)$ 上，$t=10x-ax^2$ 为增函数，$y=\log_{3a}t$ 为减函数，则 $f(x)=\log_{3a}(10x-ax^2)$ 在区间 $(1,2)$ 上是减函数，符合题意；当 $a>\frac{1}{3}$ 时，$3a>1$，$y=\log_{3a}t$ 为减函数，若 $f(x)=\log_{3a}(10x-ax^2)$ 在区间 $(1,2)$ 上是减函数，必有 $\begin{cases}\frac{5}{a}\le 1\\ \frac{10}{a}\ge 2\end{cases}$，解可得 $a=5$，综合可得 a 的取值范围为 $\{a\mid a=5$ 或 $0<a<\frac{1}{3}\}$．故答案为 $\{a\mid a=5$ 或 $0<a<\frac{1}{3}\}$．

专题 2　参变分离与定海神针

1．A 【解析】由于 $f(x)=x^2-2ax+2-a$ 的对称轴为 $x=a$，当 $a\geqslant -1$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,a]$ 递减，在 $(a,+\infty)$ 递增，则 $f(x)_{\min}=f(a)=2-a-a^2\ge 0\Rightarrow -1\le a\le 1$，当 $a<-1$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 递增，则 $f(x)_{\min}=f(-1)=3+a\ge 0\Rightarrow -3\le a<-1$．综上，则 a 的取值范围是 $[-3,1]$．故选 A.

2．B 【解析】因为函数 $f(x)=x^2-(4a-1)x+2$ 在 $[-1,2]$ 上不单调，所以 $-1<\frac{4a-1}{2}<2$，解得 $-\frac{1}{4}<a<\frac{5}{4}$．故选 B.

3．B 【解析】因为方程有两根，所以 $\Delta=16m^2-4(2m+6)\ge 0$，解得 $m\le -1$ 或 $m\ge\frac{3}{2}$，由韦达定理：

$x_1+x_2=4m<0$，$x_1x_2=2m+6>0$，解得，$-3<m<0$，综上，$-3<m\le -1$．故选 B.

4. A 【解析】$y=-x^2+bx+3$，开口向下，对称轴为$x=\frac{b}{2}$，若二次函数在$(-\infty,2]$上是增函数，则$\frac{b}{2}\ge 2$，即$b\ge 4$．故选 A.

5. C 【解析】法一 （1）当$a=0$时，方程变为$2x+1=0$，有一负根$x=-\frac{1}{2}$，满足题意；（2）当$a<0$时，$\Delta=4-4a>0$，方程的两根满足$x_1x_2=\frac{1}{a}<0$，此时有且仅有一个负根，满足题意，（3）当$a>0$时，由方程的根与系数关系可得$\begin{cases}-\frac{2}{a}<0\\ \frac{1}{a}>0\end{cases}$所以方程若有根，则两根都为负根，而方程有根的条件$\Delta=4-4a\ge 0$，所以$0<a\le 1$，综上可得，$a\le 1$．故选 C.

法二 由$-a=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}(x<0)$，令$t=\frac{1}{x}(t<0)$，$-a=t^2+2t\ge -1\Rightarrow a\le 1$．故选 C.

6. A 【解析】$x\in(0,2]$时，不等式可化为$ax+\frac{3a}{x}<2$；当$a=0$时，不等式为$0<2$，满足题意；当$a>0$时，不等式化为$x+\frac{3}{x}<\frac{2}{a}$，则$\frac{2}{a}>2\sqrt{x\cdot\frac{3}{x}}=2\sqrt{3}$，当且仅当$x=\sqrt{3}$时取等号，所以$a<\frac{\sqrt{3}}{3}$，即$0<a<\frac{\sqrt{3}}{3}$；当$a<0$时，$x+\frac{3}{x}>\frac{2}{a}$恒成立；综上知，实数$a$的取值范围是$(-\infty,\frac{\sqrt{3}}{3})$．故选 A.

7. C 【解析】$f(x)=x^2+mx+n^2=(x+\frac{m}{2})^2+n^2-\frac{1}{4}m^2$，$g(x)=x^2+(m+4)x+n^2+2m+4=(x+\frac{m+4}{2})^2+n^2-\frac{1}{4}m^2$，根据二次函数的图象与性质可知，若对任意的$n,t\in R$，$f(t)$和$g(t)$至少有一个为非负值，只需两个函数图象交点处的函数值大于等于 0 即可，由$f(x)=g(x)$，可得$x=-\frac{m+2}{2}$，所以$f(-\frac{m+2}{2})=g(-\frac{m+2}{2})=n^2+\frac{4-m^2}{4}\ge 0$，解得$-2\sqrt{n^2+1}\le m\le 2\sqrt{n^2+1}$，所以$n=0$时$m$取得最大值为$2$．故选 C.

8. D 【解析】当$x=-1$时，由$x^2+Px>4x+P-3$，得$p<4$，故$x=-1$不符合条件，排除 A，B；当$x=3$时，由$x^2+Px>4x+P-3$，得$p>0$，故$x=3$不符合条件，排除 C．故选 D.

9. A 【解析】设$f(x)=x^2-ax+3$，若方程$x^2-ax+3=0$有一根大于1，另一根小于1，则只需要$f(1)<0$，即$f(1)=1-a+3<0$，得$a>4$，即实数a的取值范围是$(4,+\infty)$．故选 A.

10. C【解析】法一 关于x的方程$x^2-(a-1)x+4=0$在区间$[1,3]$内有两个不等实根，令$f(x)=x^2-(a-1)x+4$，则有$\begin{cases}\Delta=(a-1)^2-16>0\\ 1<\frac{a-1}{2}<3\\ f(1)=6-a\ge 0\\ f(3)=16-3a\ge 0\end{cases}$，求得$5<a\le\frac{16}{3}$．故选 C.

法二 参变分离$a-1=x+\frac{4}{x}(1\le x\le 3)$，易知$y=a-1$与$y=x+\frac{4}{x}$有两个交点时，$4<y\le\frac{13}{3}$，求得$5<a\le\frac{16}{3}$．故选 C.

11. A 【解析】当 $x>0$ 时，不等式 $x^2-mx+9>0$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ 当 $x>0$ 时，不等式 $m<x+\frac{9}{x}$ 恒成立

$\Leftrightarrow m<(x+\frac{9}{x})_{\min}$，当 $x>0$ 时，$x+\frac{9}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}=6$（当且仅当 $x=3$ 时取"="），因此 $(x+\frac{9}{x})_{\min}=6$，以 $m<6$．故选 A．

12. D 【解析】因为关于 x 的不等式 $x^2-ax+1\geqslant 0$ 在区间 $[1,2]$ 上有解，所以 $a\leq x+\frac{1}{x}$，在 $x\in[1,2]$ 上有解 $\Leftrightarrow a\leq(x+\frac{1}{x})_{\max}$，$x\in[1,2]$．因为函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$，在 $[1,2]$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\max}=f(2)=\frac{5}{2}$，所以 $a\leq\frac{5}{2}$．故选 D．

13.【解析】(1) $f(x)=mx^2-mx-1<0$ 恒成立，①$m=0$ 时，$-1<0$ 恒成立，②$m\neq 0$ 时，$\begin{cases}m<0\\ \Delta=m^2+4m<0\end{cases}$，解可得，$-4<m<0$，综上可得，$-4<m\leq 0$

(2)因为 $x\in[1,3]$，$f(x)<-m+5$ 恒成立，所以 $mx^2-mx-6+m<0$，$x\in[1,3]$ 时恒成立，所以 $m<\frac{6}{x^2-x+1}$ 在 $x\in[1,3]$ 时恒成立，即 $m<(\frac{6}{x^2-x+1})_{\min}$ 当 $x\in[1,3]$ 时，$\frac{6}{x^2-x+1}\in[\frac{6}{7},6]$ 所以 $m<\frac{6}{7}$

故答案为：(1) $-4<m\leq 0$；(2) $m<\frac{6}{7}$

14.【解析】因为 $f(x)=x^2-tx+9\geq 0$ 对任意 $x\in[1,5]$ 恒成立，所以 $t\leq\frac{x^2+9}{x}$ 对任意 $x\in[1,5]$ 恒成立，令 $g(x)=x+\frac{9}{x}$，$x\in[1,5]$，根据对勾函数的单调性可知，$g(x)=x+\frac{9}{x}$，$x\in[1,3]$ 单调递减，$[3,5]$ 上单调递增，故当 $x=3$ 时，$g(x)_{\min}=6$，所以 $t\leq 6$ 即 t 的最大值为 6．故答案为 6

15．【解析】由题得 $a\geq\frac{x^2+3}{x-1}=(x-1)+\frac{4}{x-1}+2$，因为 $-2\leq x\leq 0$，所以 $-3\leq x-1\leq -1$，所以 $(x-1)+\frac{4}{x-1}+2=-[1-x+\frac{4}{1-x}]+2\leq 2-2\sqrt{4}=-2$，当 $x=-1$ 时得到等号．所以 $a\geq -2$．故答案为 $a\geq -2$

16.【解析】因为 $(m-1)x^2+3(m-1)x-m<0$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，①$m=1$ 时，$-1<0$ 恒成立，②$m\neq 1$ 时，$\begin{cases}m-1<0\\ \Delta=9(m-1)^2+4m(m-1)<0\end{cases}$，解可得，$\frac{9}{13}<m<1$，综上可得，$\frac{9}{13}<m\leq 1$．故答案为 $(\frac{9}{13},1]$．

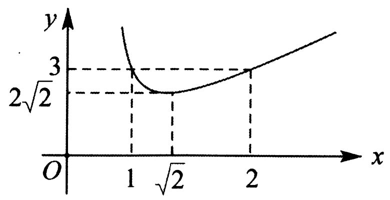
17.【解析】因为 $f(x)\geq 0\Leftrightarrow a(x-1)^2\geq x-1$，所以当 $x=1$ 时，$a\in R$；当 $x\in[-1,1)$ 时，$a\geq\frac{1}{x-1}$ 恒成立，所以 $a\geq(\frac{1}{x-1})_{\max}=-\frac{1}{2}$，综上可得 $a\geq-\frac{1}{2}$，故答案为 $a\geq-\frac{1}{2}$，

18.【解析】当 $x\in[1,2]$ 时，不等式 $x^2+mx+2>0$ 可化为 $m>-x-\frac{2}{x}$，设 $f(x)=-x-\frac{2}{x}$，$x\in[1,2]$，则 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 内的最小值为 $f(1)=f(2)=-3$，所以关于 x 的不等式 $x^2+mx+2>0$ 在区间 $[1,2]$ 上有解，实数 m 的取值范围是 $m>-3$．故答案为 $m>-3$．

19.【解析】法一 因为方程 $x^2+mx+2=0$ 的两根 α，β，故 $\Delta\geq 0$，①$\begin{cases}\Delta>0\\ f(1)\cdot f(2)<0\end{cases}$，无解；②$\begin{cases}\Delta>0\\ f(1)>0\\ f(2)>0\\ 1<\frac{m}{2}<2\end{cases}$，

解得 $m\in[2\sqrt{2},3)$．

法二　参变分离得：$m=x+\dfrac{2}{x}$，由图可知，当 $a\in(1,2)$ 时，$m\in[2\sqrt{2},3)$，故答案为 $[2\sqrt{2},3)$．



20．【解析】因为二次函数 $f(x)=x^2-ax+2a$ 在 $(1,+\infty)$ 内有两个零点，所以 $\begin{cases}f(1)>0\\ \Delta>0\\ \dfrac{a}{2}>1\end{cases}$，即 $\begin{cases}1-a+2a>0\\ a^2-8a>0\\ a>2\end{cases}$，

解得 $a>8$．故答案为 $(8,+\infty)$．

21．【解析】设函数 $f(x)=7x^2-(m+13)x-m-2$，因为方程 $7x^2-(m+13)x-m-2=0$ 的一个根在区间 $(0,1)$ 上，另一根在区间 $(1,2)$，所以 $\begin{cases}f(0)>0\\ f(1)<0\\ f(2)>0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}f(0)=-m-2>0\\ f(1)=-2m-8<0\\ f(2)=-3m>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}m<-2\\ m>-4\\ m<0\end{cases}$，则 $-4<m<-2$，即实数 m 的取值范围是 $(-4,-2)$．故答案为 $(-4,-2)$．

22．【解析】因为 $f(x)=x^2-2ax+2$，当 $x\in[-1,+\infty)$ 时，$f(x)\geq a$ 恒成立，所以 $x^2-2ax+2-a\geq0$ 当 $x\in[-1,+\infty)$ 时恒成立 ①，$\Delta=4a^2-4(2-a)\leq0$ 时，①式成立，解得 $-2\leq a\leq1$，$\Delta=4a^2-4(2-a)>0$ 时，得 $a<-2$ 或 $a>1$，又 $f(x)=x^2-2ax+2-a$ 的对称轴是 $x=a$，当 $a>1$ 时，函数的最小值是 $a^2-2a^2+2-a\geq0$，解得 $-2\leq a\leq1$，此种情况下无解，当 $a<-2$ 时，函数在区间 $[-1,+\infty)$ 上是增函数，最小值在 $x=-1$ 时取到，所以函数的最小值是 $3+a\geq0$，解得 $a\geq-3$，故有 $-3\leq a<-2$，综上，实数 a 的取值范围是 $[-3,1]$．故答案为 $[-3,1]$

23．【解析】（1）要使得 $mx^2-mx-2<0$ 恒成立，①若 $m=0$，显然 $-2<0$ 成立；②若 $m\neq0$，只要 $\begin{cases}m<0\\ \Delta=m^2+8m<0\end{cases}$，解可得 $-8<m<0$，综上可得：m 的范围 $(-8,0]$；

（2）要使 $f(x)>-m+2(x-1)$ 在 $x\in[1,3]$ 恒成立，只要 $mx^2-mx-2>2x$ 恒成立，所以 $m(x^2-x+1)>2x$，因为 $x^2-x+1=(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}>0$，只要 $m>\dfrac{2x}{x^2-x+1}=\dfrac{2}{x+\dfrac{1}{x}-1}$，因为 $x+\dfrac{1}{x}\geq2$，所以 $\dfrac{2}{x+\dfrac{1}{x}-1}\leq2$，当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$ 即 $x=1$ 时取等号，因为 $x\in[1,3]$，所以 $m>2$．

24．【解析】法一　（1）依题意得 $\begin{cases}f(-1)>0\\ f(3)>0\\ f(-m)<0\\ -1<-m<3\end{cases}$，解得 $-\dfrac{13}{9}<m<-1$；（2）由 $\begin{cases}f(-1)>0\\ -m>-1\\ \Delta>0\end{cases}$，解得 $-5<m<-1$．

法二　（1）$-m=\dfrac{x^2+4}{2x+3}$，令 $2x+3=t(1<t<9)$，$-m=\dfrac{t}{4}+\dfrac{25}{4t}-\dfrac{3}{2}$，根据对勾函数性质，当 $1<t<5$，$-m\in(1,5)$，当 $5<t<9$，$-m\in(1,\dfrac{13}{9})$，故当 $-\dfrac{13}{9}<m<-1$ 时，有两个零点；

(2) $2x+3=t(t>1)$，$-m=\frac{t}{4}+\frac{25}{4t}-\frac{3}{2}$，根据对勾函数性质，当 $1<t<5$，$-m\in(1,5)$，当 $t>5$，$-m\in(1,+\infty)$，故当 $-5<m<-1$ 时，有两个零点.

25.【解析】(1) $f(x)'=2x-2a$，令 $f(x)'=0$ 得 $x=a$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增；①当 $a\le 2$ 时，函数在 $[2,3]$ 上的最小值为 $f(2)=5-4a=1$，得 $a=1$；②当 $a\ge 3$ 时，函数在 $[2,3]$ 上的最小值为 $f(3)=10-6a=1$，可得 $a=\frac{3}{2}$（不成立，舍）；③当 $2<a<3$ 时，函数的最小值为 $f(a)=-a^2+1=1$，可得 $a=0$（不成立，舍），故得 $a=1$.

(2)根据题意得 $f(x)=x^2-2x+1$，则 $g(x)=\frac{1}{3^x}-2-k$，所以 $g(x)$ 在 R 上单调递减，若存在 x_0 使得 $g(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 上为负数，只需 $g(1)=\frac{1}{3}-2-k<0$，得 $k>-\frac{5}{3}$，故得 $k>-\frac{5}{3}$.

26.【解析】(1) 因为 $f(x)=mx^2-mx-1$. 由 $f(x)>1-2x$ 可得，$mx^2+(2-m)x-2>0$，①当 $m=0$ 时，$2x-2>0$，可得 $x>1$；当 $m\ne 0$ 时可得，$m(x+\frac{2}{m})(x-1)>0$；② $m>0$ 时，不等式可化为 $(x+\frac{2}{m})(x-1)>0$，可得 $\{x|x>1$ 1 或 $x<-\frac{2}{m}\}$，③ $m<0$ 时，不等式可化为 $(x+\frac{2}{m})(x-1)<0$，(i) 当 $-\frac{2}{m}>1$ 即 $-2<m<0$ 时，不等式的解集为 $\{x|1<x<-\frac{2}{m}\}$；(ii) 当 $-\frac{2}{m}<1$ 即 $m<-2$ 时，不等式的解集为 $\{x|=\frac{2}{m}<x<1\}$；(iii) 当 $m=-2$ 时，不等式的解集 ϕ；

(2) 若对于任意 $x\in[1,3]$，$f(x)<-m+4$ 恒成立，所以 $mx^2-mx-1<-m+4$，对于任意 $x\in[1,3]$，$mx^2-mx-1<-m+4$，所以 $mx^2-mx-5+m<0$ 对于任意 $x\in[1,3]$ 恒成立，所以 $m<\frac{5}{x^2-x+1}$ 对于任意 $x\in[1,3]$ 恒成立，而 $x\in[1,3]$ 时，$\frac{1}{x^2-x+1}\in[\frac{1}{7},1]$，所以 $\frac{5}{x^2-x+1}\in[\frac{5}{7},5]$. 所以 $m<\frac{5}{7}$.

27.【解析】(1) 由题意可得，$a>0$ 且1，b 是方程 $ax^2-3ax+a^2-3=0$ 的根

根据方程的根与系数关系可得，$\begin{cases}1+b=3\\1\times b=\frac{a^2-3}{a}\end{cases}$ 所以 $a=3$，$b=2$；

(2) 因为 $ax^2-3ax+a^2-3=<4$ 对任意 $x\in[-3,3]$ 恒成立，即 $ax^2-3ax+a^2-7<0$ 对任意 $x\in[-3,3]$ 恒成立，令 $g(x)=ax^2-3ax+a^2-7$，$x\in[-3,3]$，则 $g(x)_{\max}<0$，因为 $g(x)=ax^2-3ax+a^2-7$，$x\in[-3,3]$ 先增后减，当 $x=\frac{3}{2}$ 时，函数取得最大值 $g(\frac{3}{2})=a^2-\frac{9a}{4}-7<0$ 因为 $a<0$，解可得，$-\frac{7}{4}<a<0$

28.【解析】(1) 在 $f(x-2)=ax^2-(a-3)x+a-2$ 中令 $x=m$ 得 $f(m-2)=am^2-(a-3)m+a-2=0$，所以 $a=-\frac{3m-2}{m^2-m+1}$，因为 a 为负整数，所以 $\frac{3m-2}{m^2-m+1}$ 为正整数，当 $\frac{3m-2}{m^2-m+1}\ge 2$ 时，$2m^2-5m+4\le 0$，因为 $\Delta=(-5)^2-4\times 2\times 4=-7<0$，所以 $2m^2-5m+4\le 0$ 无解，所以 $\frac{3m-2}{m^2-m+1}=1$，解得 $m=1$. $m=3$，所以 $a=-1$，所以 $f(x-2)=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$，所以 $f(x)=-x^2+1$

(2) $g(x)\ge f(x)$ 在 $x\in[1,3]$ 上解集非空 $\Leftrightarrow b\ge-(x+\frac{1}{x})$ 在 $[1,3]$ 上有解，令 $h(x)=-(x+\frac{1}{x})$，则 $b\ge h(x)_{\min}$，所以 $x=3$ 时，$h(x)_{\min}=h(3)=-\frac{10}{3}$，故 $b\ge-\frac{10}{3}$.

（3）证明：即证 $y=\dfrac{1}{x}$ 与 $y=-x^2+1$ 的图象有且只有一个交点，

当 $x>0$ 时，$\dfrac{1}{x}-(-x^2+1)=\dfrac{1}{x}+x^2-1=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2x}+x^2-1\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{2x}\cdot\dfrac{1}{2x}\cdot x^2}-1=3\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}-1=\sqrt[3]{\dfrac{27}{4}}-1>0$，

即 $x>0$ 时，$y=\dfrac{1}{x}$ 与 $y=-x^2+1$ 的图象无交点，当 $x<0$ 时，令 $y=\dfrac{1}{x}+x^2-1$，$y'=-\dfrac{1}{x^2}+2x<0$ 恒成立，所以 $y=\dfrac{1}{x}+x^2-1$ 在 $(-\infty,0)$ 上为递减函数，又 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，$y=-3+\dfrac{1}{4}<0$，$x=1$ 时，$y=1>0$，

根据零点存在性定理知：$\dfrac{1}{x}+x^2-1=0$ 在 $(-\infty,0)$ 上有且只有一个零点，综上得 $\dfrac{1}{x}-f(x)=0$ 有且只有一个解．

29.【解析】（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=-2x+1$ 在 $[0,2]$ 上单调递减，故最小值 $g(a)=f(2)=-3$；

当 $a\neq 0$ 时，$f(x)=ax^2-2x+1-a$ 是关于 x 的二次函数，对称轴为 $x=\dfrac{1}{a}$，①当 $a<0$ 时，$x=\dfrac{1}{a}<0$，此时 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递减，故最小值 $g(a)=f(2)=3a-3$；②当 $a>0$ 时，对称轴 $x=\dfrac{1}{a}>0$，当 $\dfrac{1}{a}\in(0,2)$，即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 单调递减，在 $(\dfrac{1}{a},2)$ 单调递增，故最小值 $g(a)=f(\dfrac{1}{a})=1-a-\dfrac{1}{a}$；

当 $\dfrac{1}{a}\in[2,+\infty)$ 时，即 $0<a\leq\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递减，故最小值 $g(a)=f(2)=3a-3$；综上所述，

$$g(a)=\begin{cases}3a-3,a\leq\dfrac{1}{2}\\1-\dfrac{1}{a}-a,a>\dfrac{1}{2}\end{cases};$$

（2）由 $f(2^x)=(a+1)4^x-a(2^x+1)-2^{x+1}+3$，化简得 $4^x-a\cdot 2^x+2=0$，令 $t=2^x$，则方程变形为 $t^2-at+2=0$，根据题意，原方程 $4^x-a\cdot 2^x+2=0$ 有正实数根，即关于 t 的一元二次方程 $t^2-at+2=0$ 有大于1的实数根，而方程 $t^2-at+2=0\Leftrightarrow\dfrac{2}{t}+t=a$ 在 $(1,+\infty)$ 有实根，令 $F(t)=\dfrac{2}{t}+t$，在 $(1,+\infty)$ 上的值域为 $[2\sqrt{2},+\infty)$，故 $a\in[2\sqrt{2},+\infty)$．

30.【解析】（1）根据题意，二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2-x)$，则函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=1$，又由 $f(1)=6$，则设 $f(x)=a(x-1)^2+6$，又由 $f(3)=2$，即 $a(3-1)^2+6=2$，解可得 $a=-1$，则

$f(x)=-(x-1)^2+6=-x^2+2x+5$；

（2）根据题意，假设存在存在实数 m，使得在 $[-1,3]$ 上 $f(x)$ 的图象恒在直线 $y=2mx+1$ 的上方，

则有 $f(x)>2mx+1$ 即 $x^2+2(m-1)x-4<0$ 在 $[-1,3]$ 上恒成立，设 $g(x)=x^2+2(m-1)x-4$，

必有 $\begin{cases}g(-1)=-1-2m<0\\g(3)=6m-1<0\end{cases}$，解可得 $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{6}$，即 m 的取值范围为 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{6})$．

30.【解析】（1）$f(a+1)+f(a)=1$，$f(a+1)+f(a)=[(a+1)^2-2a(a+1)+3]+(a^2-2a^2+3)=-2a^2+7=1$，解得 $a=\pm\sqrt{3}$，

（2）$f(x)\geq 4x-2a-1$，$x^2-2ax+3\geq 4x-2a-1$，即 $x^2-4x+4\geq 2a(x-1)$，因为 $x\in[\dfrac{3}{2},3]$，所以 $x-1>0$，即当 $x\in[\dfrac{3}{2},3]$ 时，$2a\leq\dfrac{x^2-4x+4}{x-1}$，令 $t=x-1$，$t\in[\dfrac{1}{2},2]$ 得 $2a\leq\dfrac{(t+1)^2-4(t+1)+4}{t}=\dfrac{t^2-2t+1}{t}$，

令 $g(t)=\dfrac{t^2-2t+1}{t}=t+\dfrac{1}{t}-2$，$t\in[\dfrac{1}{2},2]$，所以当 $t\in[\dfrac{1}{2},1)$ 时 $g(t)$ 递减，当 $t\in(1,2]$ 时，$g(t)$ 递增，所以 $g(t)_{\min}=g(1)=0$，所以 $2a\leq 0$，即 $a\leq 0$．

32.【解析】设 $f(x)=(m+2)x^2-(2m+4)x+(3m+3)$，可得 $m+2>0$，$f(1)<0$；或 $m+2<0$，$f(1)>0$．即 $m>-2$ 且 $2m+1<0$；或 $m<-2$ 且 $2m+1>0$，可得 $-2<m<-\frac{1}{2}$ 或 $m\in\phi$，综上可得 m 的范围是 $(-2,-\frac{1}{2})$．

33.【解析】(1) 因为 $f(x)=x^2+mx+1$，所以 $f(x)-2=x^2+mx-1=0$，问题化为 $x^2+mx-1=0$ 在区间 $(-3,\frac{1}{2})$ 内有两个不同的实根，则 $\begin{cases}f(-3)>0\\ f(\frac{1}{2})>0\\ -3<-\frac{m}{2}<\frac{1}{2}\\ \Delta=m^2+4>0\end{cases}$，解得 $\frac{3}{2}<m<\frac{8}{3}$．又 $m\in Z$，所以 $m=2$；

(2) 由 (1) 得发 $f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$，由 $f(x+t)<f(\frac{x}{2})$，得 $(x+2t)(x+\frac{2t+4}{3})<0$．

当 $-2t<-\frac{2t+4}{3}$，即 $t>1$ 时，$-2t<x<-\frac{2t+4}{3}$，此不等式对一切 $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 都成立的等价条件是 $\begin{cases}-2t<-\frac{1}{2}\\ -\frac{2t+4}{3}>\frac{1}{2}\end{cases}$，此不等式组无解．当 $-2t=-\frac{2t+4}{3}$，即 $t=1$ 时，$(x+2t)^2<0$，矛盾．当 $-2t>-\frac{2t+4}{3}$，即 $t<1$ 时，$-2t>x>-\frac{2t+4}{3}$，此不等式对一切 $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 都成立的等价条件是 $\begin{cases}-2t>\frac{1}{2}\\ -\frac{2t+4}{3}<-\frac{1}{2}\end{cases}$，解得 $-\frac{5}{4}<t<-\frac{1}{4}$．综合可知，实数 t 的取值范围是 $(-\frac{5}{4},-\frac{1}{4})$．

34.【解析】(1) $g(x)=a(x-1)^2+1+b-a$，当 $a>0$ 时，$g(x)$ 在 $[2,3]$ 上为增函数，故 $\begin{cases}g(3)=4\\ g(2)=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$，当 $a<0$ 时，$g(x)$ 在 $[2,3]$ 上为减函数故 $\begin{cases}g(3)=1\\ g(2)=4\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=-1\\ b=3\end{cases}$，因为 $b<1$，所以 $a=1$，$b=0$；

(2) 由 (1) 即 $g(x)=x^2-2x+1$，$f(x)=x+\frac{1}{x}-2$，方程 $f(2x)-k\cdot 2^x\geq 0$ 化为：$2^x+\frac{1}{2^x}-2\geq k\cdot 2^x$，$1+(\frac{1}{2^x})^2-2\cdot\frac{1}{2^x}\geq k$，令 $\frac{1}{2^x}=t$，$k\leq t^2-2t+1$，因为 $x\in[-1,1]$，所以 $t\in[\frac{1}{2},2]$，记 $\varphi(t)=t^2-2t+1$ 所以 $\varphi(t)_{\min}=0$，所以 $k\in(-\infty,0]$．

35.【解析】证明：(1) 因为 $f(0)>0$，$f(1)>0$，所以 $c>0$，$3a+2b+c>0$．由条件 $a+b+c=0$，消去 b，得 $a>c>0$；由条件 $a+b+c=0$，消去 c，得 $a+b<0$，$2a+b>0$．故 $-2<\frac{b}{a}<-1$．

(2) 抛物线 $f(x)=3ax^2+2bx+c$ 的顶点坐标为 $(-\frac{b}{3a},\frac{3ac-b^2}{3a})$，在 $-2<\frac{b}{a}<-1$ 的两边乘以 $-\frac{1}{3}$，得 $\frac{1}{3}<-\frac{b}{3a}<\frac{2}{3}$．又因为 $f(0)>0$，$f(1)>0$，而 $f(-\frac{b}{3a})=-\frac{a^2+c^2-ac}{3a}<0$，所以方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,-\frac{b}{3a})$ 与 $(-\frac{b}{3a},1)$ 内分别有一实根．故方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有两个实根．

专题 3 函数的定义域和值域

同步训练 1

1. A 【解析】由题意可得，$\begin{cases}2x+6\geq 0\\9-3x>0\end{cases}$，解可得，$-3\leq x<3$，即不等式的解集为$[-3，3)$．故选 A.

2. B 【解析】由题意可得，$\begin{cases}5-x>0\\2^x-8\geq 0\end{cases}$，即$\begin{cases}x<5\\x\geq 3\end{cases}$，所以函数的定义域为$[3，5)$，故选 B.

3. B 【解析】因为 $y=f(x)$ 的定义域为$[1，8]$，要使函数有意义，则$\begin{cases}1\leq 2x\leq 8\\x-3\neq 0\end{cases}$，得$\begin{cases}\frac{1}{2}\leq x\leq 4\\x\neq 3\end{cases}$，即

$x\in[\frac{1}{2}，3)\cup(3，4]$，故选 B.

4. D 【解析】因为 $y=f(x)$ 的定义域为$[-1，1]$，所以由$-1\leq|x|-1\leq 1$得$0\leq|x|\leq 2$，得$-2\leq x\leq 2$，即函数 $y=f(|x|-1)$ 的定义域为$[-2，2]$，故选 D.

5. C 【解析】函数 $f(x)=\dfrac{1}{ln(x+2)}-\sqrt{9-x^2}$ 中，令$\begin{cases}x+2>0\\x+2\neq 1\\9-x^2\geq 0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x>-2\\x\neq -1\\-3\leq x\leq 3\end{cases}$，即$-2<x\leq 3$，且$x\neq -1$；所以函数 $f(x)$ 的定义域是$(-2，-1)\cup(-1，3]$．故选 C.

6. D 【解析】由题意得$x\in(\frac{1}{2}，3)\Rightarrow(lgx+1)\in(\frac{1}{2}，3)\Rightarrow lgx\in(-\frac{1}{2}，2)\Rightarrow x\in(10^{-\frac{1}{2}}，10^2)$，故选 D.

7. C 【解析】函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{ax^2+2ax+3}$ 的定义域是 R，即 $ax^2+2ax+3\neq 0$ 恒成立；当 $a=0$ 时，$3\neq 0$，满足题意；当 $a\neq 0$ 时，$\triangle=4a^2-12a<0$，解得 $0<a<3$；综上知，实数 a 的取值范围是$[0，3)$．故选 C.

8. C 【解析】函数 $f(x)=\dfrac{1}{mx^2+mx+4}$ 的定义域是一切实数，所以对任意 $x\in R$，$g(x)=mx^2+mx+4\neq 0$．当 $m=0$ 时，$g(x)=4$，符合题意；当 $m\neq 0$ 时，需$\triangle=m^2-16m<0$，解得 $0<m<16$．综上，m 的取值范围是$[0，16)$．故选 C.

9. B 【解析】函数 $y=f(x)$ 的定义域是$[1，2020]$，要使 $g(x)$ 有意义，则$\begin{cases}1\leq x+1\leq 2020\\lnx\neq 0\\x>0\end{cases}$，得$\begin{cases}0\leq x\leq 2019\\x\neq 1\\x>0\end{cases}$，得 $0<x\leq 2019$ 且 $x\neq 1$，即函数的定义域为$(0，1)\cup(1，2019]$，故选 B.

10. B 【解析】函数 $y=f(3x+1)$ 的定义域为$[-2，4]$，令$-2\leq x\leq 4$，则$-6\leq 3x\leq 12$，所以$-5\leq 3x+1\leq 13$，所以函数 $y=f(x)$ 的定义域是$[-5，13]$．故选 B.

11. A 【解析】在 $f(xy+1)=f(x)\cdot f(y)-2f(y)-2x+3$ 中，令 $x=y=0$，得 $f(1)=f^2(0)-2f(0)+3=3$，
令 $y=1$，得 $f(x+1)=3f(x)-2f(1)-2x+3=3f(x)-2x-3\ldots$①，
令 $x=1$，则 $f(y+1)=3f(y)-2f(y)-2+3=f(y)+1$，即 $f(x+1)=f(x)+1\ldots$②，
解方程组①②得 $f(x)=x+2$，所以 $y=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x+2}$；令 $x+2\geq 0$，解得 $x\geq -2$，所以函数 y 的定义域为$[-2，+\infty)$．故选 A.

12. A 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为$(-1,1)$，令$\begin{cases}-1<\frac{1}{x}<1\\-1<x-1<1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x<-1\text{ or }x>1\\0<x<2\end{cases}$，即 $1<x<2$，

所以函数 $g(x)=f(\frac{1}{x})-f(x-1)$ 的定义域为 $(1,2)$．故选 A.

13．A【解析】设 $t=x-4\sqrt{x-2}$，$s=\sqrt{x-2}$，则 $x=s^2+2$，则 $t=s^2+2-4s$，由 $x\in[3,27]$，得 $s\in[1,5]$，则 $t=(s-2)^2-2\in[-2,7]$．即函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,7]$．故选 A.

14．A【解析】由题意，$\begin{cases}a(a+1)>0① \\ (2log_2\frac{2a}{a+1})^2-4log_2\frac{4(a+1)}{a}\cdot log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}<0②\end{cases}$，解①得：$a<-1$ 或 $a>0$；由②得：$(1+log_2\frac{a}{a+1})^2-2(2+log_2\frac{a+1}{a})(log_2\frac{a+1}{a}-1)<0$，令 $log_2\frac{a+1}{a}=t$，则 $(1-t)^2-2(2+t)(t-1)<0$，得 $t^2+4t-5>0$，解得 $t<-5$ 或 $t>1$，则 $log_2\frac{a+1}{a}<-5$ 或 $log_2\frac{a+1}{a}>1$，则 $0<\frac{a+1}{a}<\frac{1}{32}$ 或 $\frac{a+1}{a}>2$．即 $-\frac{32}{31}<a<0$ 或 $0<a<1$．综上，实数 a 的取值范围为 $(0,1)\cup(-\frac{32}{32},-1)$．故选 A.

15．C【解析】由题意得：$\begin{cases}x-1>0且x-1\neq1 \\ x+2>0\end{cases}$，解得：$x>1$ 且 $x\neq2$，故选 C.

16．【解析】由于 $f(x)$ 的定义域为 R，则 $(m^2-3m+2)x^2+(m-1)x+1>0$ 恒成立，若 $m^2-3m+2=0$，即有 $m=1$ 或 2，当 $m=1$ 时，$1>0$，恒成立，当 $m=2$ 时，$x+1>0$ 不恒成立.

若 $m^2-3m+2>0$，且判别式小于 0，即 $(m-1)^2-4(m^2-3m+2)<0$，即有 $m>2$ 或 $m<1$，且 $m>\frac{7}{3}$ 或 $m<1$，则 $m>\frac{7}{3}$ 或 $m<1$，综上，可得，$m>\frac{7}{3}$ 或 $m\le1$，故答案为：$m>\frac{7}{3}$ 或 $m\le1$.

17．【解析】$f(x)$ 的定义域是 $(\frac{1}{2},8]$，所以 $\frac{1}{2}<2^x\le8$，$-1<x\le3$．所以 $f(2^x)$ 的定义域是 $(-1,3]$.

18．【解析】函数 $y=f(x-1)$ 的定义域为 $[0,2]$，即 $0\le x\le2$，即 $-1\le x-1\le1$，即函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，由 $\begin{cases}-1\le ax\le1 \\ -1\le\frac{x}{a}\le1\end{cases}$，解得 $-\frac{1}{a}\le x\le\frac{1}{a}(a>1)$．所以 $f(ax)+f(\frac{x}{a})$，$(a\ge1)$ 的定义域是：$[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}]$.

19．【解析】(1) 由题意得：$\begin{cases}1-a^2<0 \\ 4(1-a^2)-6(1-a)+6=0 \\ 1-a^2+3(1-a)+6=0\end{cases}$，解得：$a=2$ 或 $a=-5$；

(2) 由题意得：①当 $a=1$ 时，$f(x)=\sqrt{6}$，符合题意，②$1-a^2>0$ 时，$\triangle=9(1-a)^2-24(1-a^2)\le0$，解得：$-\frac{5}{11}\le a\le1$，③$a=-1$ 时，$f(x)=\sqrt{6x+6}$，定义域不是 R，不合题意，综上：$a\in[-\frac{5}{11},1]$.

20．【解析】由 $x^2-1>0$，得 $x>1$，或 $x<-1$，即 $A=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，又 $\frac{x-m-1}{2m-x}\ge0$，$(m<1)$，即 $2m<x\le m+1$，所以 $B=(2m,m+1]$，若 $B\subseteq A$，得 $\begin{cases}2m>1 \\ m<1\end{cases}$，或 $\begin{cases}m+1<-1 \\ m<1\end{cases}$，即 $\frac{1}{2}<m<1$，或 $m<-2$，所以 m 的范围是 $\{m|\frac{1}{2}<m<1$，或 $m<-2\}$.

21．【解析】(1) 由题意知 $f(x)=log_{\frac{1}{2}}x$，所以 $f(2x-x^2)=log_{\frac{1}{2}}(2x-x^2)$，要使该函数有意义，需满足 $2x-x^2>0$，解得：$x\in(0,2)$，所以函数 $f(2x-x^2)$ 的函数解析式为 $f(2x-x^2)=log_{\frac{1}{2}}(2x-x^2)$，定义域为 $(0,2)$；

（2）令 $t=2x-x^2$，此二次函数在 $[1,\ 2)$ 上单调递减，而且 $y=log_{\frac{1}{2}}t$ 在 $[1,\ 2)$ 上也是单调递减的，所以函数 $f(2x-x^2)$ 在 $[1,\ 2)$ 上单调递增，所以函数 $f(2x-x^2)$ 无最大值，最小值为 $f(1)=0$，故该函数的值域为 $[0,\ +\infty)$．

22.【解析】(1) 由函数 $f(x)=\sqrt{(a^2-1)x^2+(a-1)x+\dfrac{2}{a+1}}$ 的定义域为 R，得 $(a^2-1)x^2+(a-1)x+\dfrac{2}{a+1}\geq 0$ 恒成立所以 $a\neq -1$；当 $a=1$ 时，不等式化为 $1\geq 0$，满足条件；当 $a\neq\pm1$ 时，有 $\begin{cases}a^2-1>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$，$\begin{cases}a>1\ or\ a<-1\\ (a-1)^2-4(a^2-1)\cdot\dfrac{2}{a+1}\leq 0\end{cases}$，解得 $1<a\leq 9$；综上，实数 a 的取值范围是 $1\leq a\leq 9$；(2) 当函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1)$ 时，令 $0<x+1<1$，解得 $-1<x<0$，所以函数 $f(x+1)$ 的定义域是 $(-1,0)$；(3) 当函数 $f(x+1)$ 的定义域是 $[-2,\ 3]$ 时，$x\in[-2,\ 3)$，所以 $x+1\in[-1,\ 4)$；所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,\ 4)$；令 $-1\leq 2-x<4$，即 $-3\leq -x<2$，解得 $-2<x\leq 3$，所以函数 $f(2-x)$ 的定义域是 $(-2,\ 3]$．

23.【解析】设 $\mu_1=ax$，$\mu_2=\dfrac{x}{a}$，其中 $a>0$，则 $g(x)=f(\mu_1)+f(\mu_2)$ 且 μ_1、$\mu_2\in[-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}]$．

得 $\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\leq ax\leq\dfrac{3}{2}\\ -\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{x}{a}\leq\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2a}\leq x\leq\dfrac{3}{2a}\\ -\dfrac{a}{2}\leq x\leq\dfrac{3}{2}a\end{cases}$，①当 $a\geq 1$ 时，不等式组的解为 $-\dfrac{1}{2a}\leq x\leq\dfrac{3}{2a}$；②当 $0<a<1$ 时，不等式组的解为 $-\dfrac{a}{2}\leq x\leq\dfrac{3a}{2}$．当 $a\geq 1$ 时，$g(x)$ 的定义域为 $[-\dfrac{1}{2a},\ \dfrac{3}{2a}]$；当 $0<a<1$ 时，$g(x)$ 的定义域为 $[-\dfrac{a}{2},\ \dfrac{3a}{2}]$．

24.【解析】(1) 由题意得 $f(x)=lg(ax^2-2x+a)$ 的定义域为 R，对任意 $x\in R$ 都有 $ax^2-2x+a>0$ 恒成立，则 $\begin{cases}a>0\\ (-2)^2-4a^2<0\end{cases}$，解得 $a>1$．所以使 $f(x)$ 的定义域为 R 的实数 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$；

(2) 由题意得 $f(x)=lg(ax^2-2x+a)$ 的值域为 R，所以 ax^2-2x+a 能取到大于 0 的所有实数，则 $\begin{cases}a>0\\ (-2)^2-4a^2\geq 0\end{cases}$，解得 $0<a\leq 1$．所以使 $f(x)$ 的值域为 R 的实数 a 的取值范围是 $(0,\ 1]$．

25.【解析】(1) ①若 $1-a^2=0$，则 $a=\pm1$．

(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=\sqrt{6}$，定义域为 R，符合要求．(2) 当 $a=-1$ 时，$f(x)=\sqrt{6x+6}$，定义域不为 R．②若 $1-a^2\neq 0$，$g(x)=(1-a^2)x^2+3(1-a)x+6$ 为二次函数，因为 $f(x)$ 定义域为 R，$\therefore g(x)\geq 0$ 对任意 $x\in R$ 恒成立．所以 $\begin{cases}1-a^2>0\\ \Delta=9(1-a)^2-24(1-a^2)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<a<1\\ (a-1)(11a+5)\leq 0\end{cases}\Rightarrow -\dfrac{5}{11}\leq a<1$．综合①②得，实数 a 的取值范围是 $[-\dfrac{5}{11},\ 1]$

(2) 因为 $f(x)$ 的值域为 $[0,\ +\infty)$，所以函数 $g(x)=(1-a^2)x^2+3(1-a)x+6$ 取一切非负实数．即 $\begin{cases}1-a^2>0\\ \Delta=9(1-a)^2-24(1-a^2)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<a<1\\ (a-1)(11a+5)\geq 0\end{cases}\Rightarrow -1<a\leq -\dfrac{5}{11}$．当 $a=-1$ 时，$f(x)=\sqrt{6x+6}$ 的值域是 $[0,\ +\infty)$，符合题意．故所求实数 a 的取值范围是 $[-1,\ -\dfrac{5}{11}]$．

同步训练（二）

1．D 【解析】两个函数是相同的函数，则它们的定义域、值域、对应关系一定相同．

函数 $f(x)=\sqrt{x^2}$ 的值域为 $[0，+\infty)$，函数 $g(x)=x$ 的值域为 $(-\infty，+\infty)$，故它们的值域不同，故不是同一个函数．函数 $f(x)=x$ 的定义域为 $(-\infty，+\infty)$，函数 $g(x)=\dfrac{x^2}{x}=x$ 的定义域为 $[0，+\infty)$，故它们的定义域不同，故不是同一个函数．函数 $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ 的对应关系和 $g(x)=\dfrac{x^2}{x}=x$，解析式不同，故它们的对应关系不一样，故不是同一个函数．函数 $f(x)=|x+1|$ 和函数 $g(x)=\begin{cases}x+1,x\geq-1\\-x-1,x<-1\end{cases}$ 具有相同的定义域 R，以及相同的值域 $[0，+\infty)$，相同的对应关系（对 $x+1$ 取绝对值），故它们为同一个函数，故选 D.

2．D 【解析】令 $2x+3=t$，求得 $x=\dfrac{t-3}{2}$，代入已知式子，可得 $f(t)=(\dfrac{t-3}{2})^2=\dfrac{t^2-6t+9}{4}$，故有

$f(x)=\dfrac{1}{4}(x^2-6x+9)$，故选 A.

3．D 【解析】由函数的定义可知：每当给出 x 的一个值，则 $f(x)$ 有唯一确定的实数值与之对应，只有 D 符合．故选 D.

4．C 【解析】$f(n+1)-f(n)=\dfrac{1}{(n+1)+1}+\dfrac{1}{(n+1)+2}+\dfrac{1}{(n+1)+3}+\ldots+\dfrac{1}{3(n+1)}-(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\ldots+\dfrac{1}{3n})$

$=\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}+\dfrac{1}{3n+3}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}-\dfrac{2}{3n+3}$．故选 C.

5．B 【解析】根据题意，函数 $f(x+1)=\log_2\dfrac{2x}{2-x}$，则 $f(x)=\log_2\dfrac{2x-2}{3-x}$，则

$f(4-x)=\log_2\dfrac{2\times(4-x)-2}{3-(4-x)}=\log_2\dfrac{6-2x}{x-1}$，则有 $f(x)+f(4-x)=\log_2\dfrac{2x-2}{3-x}+\log_2\dfrac{6-2x}{x-1}=2$，又由 $f(a)=b$，则 $f(4-a)=2-b$．故选 B.

6．【解析】对于（1），$y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 　的对应关系不同，所以不是同一个函数；对于（2）$y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$ $(x\geqslant0)$，两个函数的定义域不相同．不是同一函数；对于（3）$y=\sqrt[3]{x^3}$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 　的对应关系不同，所以不是同一个函数；对于（4）$y=\sqrt{x}+1$ 与 $y=\sqrt{x+2\sqrt{x}+1}=|\sqrt{x}+1|=\sqrt{x}+1$，所以是同一个函数；对于 $y=\sqrt{x^2-1}$，其定义域 $(-\infty，-1]\cup[1，+\infty)$，而 $y=\sqrt{x-1}\bullet\sqrt{x+1}$ 的定义域为 $[1，+\infty)$，两个函数的定义域不相同．不是同一函数；故答案为（4）

7．【解析】设 $f(x)=kx+b$ 　　所以 $f[f(x)]=k(kx+b)+b=k^2x+kb+b=k^2x+(k+1)b\ldots$①依题意：$f\{f(x)\}=1+2x\ldots$②，比较①和②的系数可得：$k^2=2\ldots$③；$(k+1)b=1\ldots$④由③④得：（1）若 $k=\sqrt{2}$，则 $b=\sqrt{2}-1$；（2）若 $k=-\sqrt{2}$，则 $b=-\sqrt{2}-1$，所以 $f(x)=\sqrt{2}x+\sqrt{2}-1$ 或 $f(x)=-\sqrt{2}x-\sqrt{2}-1$；故答案为 $f(x)=\sqrt{2}x+\sqrt{2}-1$ 或 $f(x)=-\sqrt{2}x-\sqrt{2}-1$

8．【解析】由 $f(x)=2x+a$，$g(x)=\dfrac{1}{4}(x^2+3)$，得 $g[f(x)]=\dfrac{1}{4}[(2x+a)^2+3]=\dfrac{1}{4}(4x^2+4ax+a^2+3)=x^2+ax+\dfrac{1}{4}(a^2+3)$，

又 $g[f(x)]=x^2+x+1$，所以 $\begin{cases}a=1\\\dfrac{1}{4}(a^2+3)=1\end{cases}$，解得 $a=1$．故答案为 1.

9．【解析】令 $\dfrac{2}{x}+1=t(t>1)$，则 $x=\dfrac{2}{t-1}$，所以 $f(t)=lg\dfrac{2}{t-1}$，$f(x)=lg\dfrac{2}{x-1}(x>1)$．

10.【解析】因为 $f(1-\cos x)=\sin^2 x=1-\cos^2 x$，令 $1-\cos x=t$，则 $\cos x=1-t$ 代入得 $f(t)=1-(1-t)^2=2t-t^2$，$t\in[0,\ 2]$，所以 $f(x)=2x-x^2$，$x\in[0,\ 2]$，故答案为 $2x-x^2$，$x\in[0,\ 2]$．

11.【解析】由题意得 $f(\cos x)=\cos 5x$，$f(\sin x)=f(\cos(\frac{\pi}{2}-x))=\cos 5(\frac{\pi}{2}-x)=\sin 5x$，故答案是 $\sin 5x$．

12.【解析】由题意得 $f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}(n\in N)$，即 $f(n+1)=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$，

得 $f(n+1)-f(n)=(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2})-(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n})$

$=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$．故答案为 $\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$．

13.【解析】令 $t=\frac{1-x}{1+x}$，解得 $x=\frac{1-t}{1+t}$，代入 $(\frac{1-x}{1+x})=\frac{1-x^2}{1+x^2}$，得 $f(t)=\frac{1-(\frac{1-t}{1+t})^2}{1+(\frac{1-t}{1+t})^2}=\frac{(1+t)^2-(1-t)^2}{(1+t)^2+(1-t)^2}=\frac{4t}{2+2t^2}=\frac{2t}{1+t^2}$

$(t\neq-1)$，故 $f\ (x)=\frac{2x}{1+x^2}$，$(x\neq-1)$，故答案为 $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}\ (x\neq-1)$．

14.【解析】设 $t=1+\frac{1}{x}$，则 $t\neq1$，$\frac{1}{x}=t-1$，由 $f(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}-1$，得 $f(t)=(t-1)^2-1=t^2-2t$，即 $f(x)=x^2-2x(x\neq1)$．故答案为 $x^2-2x(x\neq1)$．

15.【解析】由题意 $\begin{cases}-(-1)^2-b+c=1\\-(0)^2+c=-2\end{cases}$ 得 $b=-4$，$c=-2$，即 $f(x)=\begin{cases}-x^2+bx+c，x\leq0\\-2，x>0\end{cases}$，所以

$g(x)=\begin{cases}-x^2-3x-2，x\leq0\\x-2，x>0\end{cases}$，当 $x\leq0$ 时，由 $-x^2-3x-2=0$，知 $x=-1$ 或 -2；当 $x>0$ 时，由 $x-2=0$，知 $x=2$．所以函数 $g(x)$ 的零点个数为 3 个．故答案为 3．

16.【解析】已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}1 & (-1\leq x\leq1)\\2x-3 & (x<-1\ or\ x>1)\end{cases}$ 且 $f[f(x)]=1$，设 $f(x)=t\in R$，则对于 $f(t)=1$ 有解 $t=2$ 或者 $-1\leq t\leq1$．那么①当 $t=f(x)=2$ 时候有 $2x-3=2$，$x=\frac{5}{2}>1$．满足条件．②当 $-1\leq x\leq1$ 时，$f(x)=1$．满足条件．当 $x>1$ 或 $x<-1$ 时，代入式子 $f(x)=2x-3$，可得不等式 $\begin{cases}-1\leq2x-3\leq1\\x<-1\,or\ \ x>1\end{cases}$ 解得 $1<x<2$．综上 $-1\leq x\leq2$ 或者 $x=\frac{5}{2}$．故答案为 $-1\leq x\leq2\text{或者}x=\frac{5}{2}$．

17.【解析】(1)(2) 不是，(3) 是．对于 (1)，$f(x)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq-3\}$，$g(x)$ 的定义域为 R；对于 (2)，$f(x)$ 的定义域为 Z，$g(x)$ 的定义域为 R，所以 (1)(2) 中两组函数均不是相等函数；对于 (3)，两函数的定义域、对应关系均相同，故为相等函数．

18.【解析】(1) 令 $t=3^x-2$，则 $x=\log_3(t+2)-1$，因为 $x\in[0,\ 2]$，所以 $t\in[-1,\ 8]$，因为 $f(3^x-2)=x-1(x\in[0,\ 2])$，所以 $f(t)=\log_3(t+2)-1$，$t\in[-1,\ 7]$，即 $f(x)=\log_3(x+2)-1$，$x\in[-1,\ 7]$，即 $f(x)$ 的定义域 $[-1,\ 7]$，有 $g(x)=f(x-2)+3=\log_3 x+2$，得 $x-2\in[-1,\ 7]$，即 $x\in[1,\ 9]$，即 $g(x)$ 的定义域 $[1,\ 9]$．

(2) 由题意得 $h(x)=[g(x)]^2+g(x^2)=(\log_3 x+2)^2+2+log_3x^2=(log_3x)^2+6\log_3 x+6$，得 $\begin{cases}1\leq x\leq9\\1\leq x^2\leq9\end{cases}$，即 $1\leq x\leq3$，即函数 $y=h(x)$ 的定义域 $[1,\ 3]$，因为 $0\leq\log_3 x\leq1$，结合二次函数的性质可知，当 $\log_3 x=0$ 时，函数取得最小值 6，当 $\log_3 x=1$ 时，函数取得最大值 13．

19.【解析】(1) 用代入法，$f(2x+1)=(2x+1)^2+2(2x+1)=4x^2+8x+3$；

(2) 凑配法：由 $f(\sqrt{x}-1)=x+2\sqrt{x}$，得到 $f(\sqrt{x}-1)=(\sqrt{x}-1)^2+4(\sqrt{x}-1)+3$，设 $\sqrt{x}-1=t$，$t\geq -1$，故所求的函数 $f(x)=x^2+4x+3(x\geq -1)$.

(3) 方程组法：$f(x)-2f(\frac{1}{x})=3x+2$，①，$f(\frac{1}{x})-2f(x)=\frac{3}{x}+2$ ②，由①②联立，消去 $f(\frac{1}{x})$，得 $f(x)=-x-\frac{2}{x}-2$，故所求的函数为 $f(x)=-x-\frac{2}{x}-2$.

20.【解析】(1) 函数 $f(x)=x^2-1$，$g(x)=\begin{cases}x-1, & x>0\\ 2-x, & x<0\end{cases}$，$f(g(2))=f(1)=0$，$g(f(2))=g(3)=2$，$g(g(g(-2)))=g(g(4))=g(3)=2$；

(2) $g\left(f(x)\right)=g\left(x^2-1\right)=\begin{cases}x^2-2, & x^2-1>0\\ 3-x^2, & x^2-1<0\end{cases}=\begin{cases}x^2-2, & x<-1\ or\ x>1\\ 3-x^2, & -1<x<1\end{cases}$；

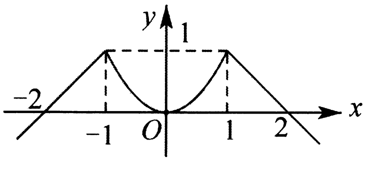
$f(g(x))=\begin{cases}f(x-1), & x>0\\ f(2-x), & x<0\end{cases}=\begin{cases}x^2-2x, & x>0\\ x^2-4x+3, & x<0\end{cases}$

21.【解析】将 $3f(x-1)+2f(1-x)=2x$ 中的 x 换上 $x+1$ 得：$3f(x)+2f(-x)=2x+2$ ①；将①中的 x 换上 $-x$ 得：$3f(-x)+2f(x)=-2x+2$ ②；①②联立解得 $f(x)=2x+\frac{2}{5}$.

22.【解析】(1) 由题意得 $f(x)$ 为定义在 $[-1,\ 1]$ 上的奇函数，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有意义，即 $f(0)=0$，即 $f(0)=1-b$，得 $b=1$，设 $x\in[0,\ 1]$，则 $-x\in[-1,\ 0]$，所以 $f(-x)=\frac{1}{4^{-x}}-\frac{1}{2^{-x}}=4^x-2^x$，$f(x)=2^x-4^x$.
所以 $f(x)=2^x-4^x$ 在 $[0,\ 1]$ 上的解析式为 $f(x)=2^x-4^x$.

(2) 当 $x\in[0,\ 1]$，$f(x)=2^x-4^x=2^x-(2^x)^2$，$\therefore$ 设 $t=2^x(t>0)$，则 $g(t)=-t^2+t$，由 $x\in[0,\ 1]$，$t\in[1,\ 2]$，当 $t=1$ 时，最大值为 $1-1=0$，当 $t=0$ 时，取最小值 -2，所以函数在 $[0,\ 1]$ 上取最小值 -2，最大值为 0. 因为 $f(x)$ 为定义在 $[-1,\ 1]$ 上的奇函数，所以函数在 $[-1,\ 0]$ 上取最小值 0，最大值为 2，所以 $f(x)$ 在 $[-1,\ 1]$ 上的值域 $[-2,\ 2]$.

23.【解析】(1) $f(f(\frac{5}{2}))=f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.（2）由图象可知，函数的值域是 $(-\infty,\ 1]$，单调增区间 $(-\infty,\ -1]$ 和 $[0,\ 1]$，减区间 $[-1,\ 0]$ 和 $[1,\ +\infty)$.（3）因为方程 $f(x)=m$ 有四个根，根据图象可得实数 m 的取值范围是 $0<m<1$，由图象判断 $f(x)$ 是偶函数，所以这四个根的和是 0.



同步训练（三）

1. C 【解析】$F(x)=1-f(x+3)$ 相当于把 $f(x)$ 图象，作关于 x 轴的对称图象，得到 $-f(x)$，再向做平移 3 个单位，再向上平移 1 个单位，故值域为 $[-2,\ 0]$. 故选 C.

2. C 【解析】由题意得 $f(x)=-9^{-x}+(\frac{1}{3})^{x-1}+\frac{3}{4}=-(\frac{1}{3})^{2x}+3\times(\frac{1}{3})^x+\frac{3}{4}$，令 $t=(\frac{1}{3})^x$，因为 $x\in[-1,\ +\infty)$，所以 $t\in(0,\ 3]$，原函数的值域等价于函数 $g(t)=-t^2+3t+\frac{3}{4}=-(t-\frac{3}{2})^2+3(0<t\leqslant 3)$ 的值域，所以

$f(x)\in[\frac{3}{4},3]$．故选 C．

3．D【解析】由 $f(x)=\frac{a^x}{a^x+1}=1-\frac{1}{a^x+1}$，得 $f(-x)=\frac{a^{-x}}{a^{-x}+1}=\frac{1}{1+a^x}$，即 $f(-x)+f(x)=1$；所以 $f(-x)+\frac{1}{2}=1-(f(x)-\frac{1}{2})$，由 $a^x+1>1$，得 $0<\frac{1}{1+a^x}<1$，则 $0<1-\frac{1}{1+a^x}<1$，即 $0<f(x)<1$；即 $f(x)-\frac{1}{2}\in(-\frac{1}{2}，\frac{1}{2})$；当 $f(x)-\frac{1}{2}\in(-\frac{1}{2}，0)$，有 $f(-x)+\frac{1}{2}\in(1,\frac{3}{2})$，$[f(x)-\frac{1}{2}]+[f(-x)+\frac{1}{2}]=-1+1=0$；当 $f(x)-\frac{1}{2}=0$，有 $f(-x)+\frac{1}{2}=1$，$[f(x)-\frac{1}{2}]+[f(-x)+\frac{1}{2}]=0+1=1$；当 $f(x)-\frac{1}{2}\in(0,\frac{1}{2})$，有 $f(-x)+\frac{1}{2}\in(\frac{1}{2}，1)$，$[f(x)-\frac{1}{2}]+[f(-x)+\frac{1}{2}]=0+0=0$，所以 $[f(x)-\frac{1}{2}]+[f(-x)+\frac{1}{2}]$ 的值域为 $\{0，1\}$．故选 D．

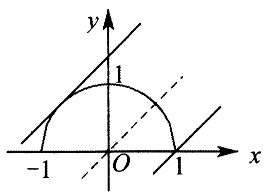
4．A【解析】$f(x)=x^2+|x-2|-1=\begin{cases}x^2+x-3，x\geq 2\\ x^2-x+1，x<2\end{cases}$，当 $x\geq 2$ 时，$f(x)=x^2+x-3$ 单调递增，故 $f(x)\geq 3$；当 $x<2$ 时，$f(x)=x^2-x+1$ 先减后增，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，函数取得最小值 $\frac{3}{4}$，故 $f(x)\geq\frac{3}{4}$，综上可得，函数的值域为 $[\frac{3}{4}，+\infty)$．故选 A．

5．B【解析】由 $f(\sqrt{x-3})=x+\sqrt{x-3}+1=x-3+\sqrt{x-3}+4$，$f(x)=x^2+x+4(x\geq 0)$，$f(x)=x^2+x+4$ 在 $[0，+\infty)$ 上单调递增，故当 $x=0$ 时，函数有最小值 4，即函数 $f(x)$ 的值域为 $[4，+\infty)$．故选 B．

6．D【解析】由题意可得，$M\ M(x)=\begin{cases}x^2，x\geq 1\ or\ x\leq 0\\ x，0<x<1\end{cases}$，当 $x\geq 1$ 或 $x\leq 0$ 时，$M(x)=x^2\geq 0$，当 $0<x<1$ 时，$M(x)=x\in(0，1)$，综上可得，$M(x)$ 的值域 $[0，+\infty)$．故选 D．

7．C【解析】由 $1-2x\geq 0$，得 $x\leq\frac{1}{2}$．函数 $y=x$ 为 R 上的增函数，函数 $y=-\sqrt{1-2x}$ 为 $(-\infty，\frac{1}{2}]$ 上的增函数，即 $f(x)=x-\sqrt{1-2x}$ 是 $(-\infty，\frac{1}{2}]$ 上的增函数，$f(x)\leq f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$．即函数 $f(x)=x-\sqrt{1-2x}$ 的值域为 $(-\infty，\frac{1}{2}]$．故选 C．

8．C【解析】$y=\sqrt{1-x^2}$ 的轨迹为半径为 1 的圆的上半圆部分，设 $x-y=t$，则 $y=x-t$，平移直线 $y=x-t$，由图象知当直线经过 $A(1，0)$ 时，直线的截距最小，此时 t 最大，得 $t=1-0=1$，当直线和圆在第二象限相切时，直线的截距最大，此时 t 最小，$(t<0)$ 圆心到直线 $x-y-t=0$ 的距离 $d=\frac{|-t|}{\sqrt{2}}=1$，得 $|t|=\sqrt{2}$，得 $t=-\sqrt{2}$，即 $-\sqrt{2}\leq t\leq 1$，则 $-\sqrt{2}\leq x+y\leq 1$，即 $x+y$ 的取值范围是 $[-\sqrt{2}，1]$．故选 C．



9．C【解析】由 $\begin{cases}12-x\geq 0\\ x-3\geq 0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x\leq 12\\ x\geq 3\end{cases}$，得 $3\leq x\leq 12$，即函数的定义域为 $[3，12]$，又函数 $y=\sqrt{12-x}$，$y=-\sqrt{x-3}$，在 $[3，12]$ 上递减，即函数 $f(x)$ 在 $[3，12]$ 上递减，所以函数的最大值为 $f(3)=3$，最小值为 $f(12)=-3$，即函数的值域为 $[-3，3]$．故选 C．

10. D【解析】$f(x)=\frac{1}{x}(1\le x\le 2)$，由$\begin{cases}1\le x\le 2\\1\le x^2\le 2\end{cases}$，解得$1\le x\le\sqrt{2}$．所以$g(x)=2f(x)+f(x^2)=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}(1\le x\le\sqrt{2})$．令$t=\frac{1}{x}(\frac{\sqrt{2}}{2}\le t\le 1)$，函数$y=t^2+2t=(t+1)^2-1$．当$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$y_{min}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$；当$t=1$时，$y_{max}=3$．函数$g(x)=2f(x)+f(x^2)$的值域为$[\frac{1}{2}+\sqrt{2}，3]$．故选D．

11. D【解析】法一：函数的定义域为$[-1，1]$，$y=\sqrt{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}=\sqrt{1+x+1-x+2\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{2+2\sqrt{1-x^2}}$，因为$x\in[-1，1]$，所以$x^2\in[0，1]$，$y\in[\sqrt{2}，2]$．故选D．

法二：由$y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})(0\le\alpha\le\frac{\pi}{2})$，$y\in[\sqrt{2}，2]$．故选D．

12. A【解析】$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1}$，因为$e^x>0$，$0<\frac{1}{e^x+1}<1$，$1-\frac{2}{e^x+1}\in(-1，1)$，$f(x)$的值域为$(-1，1)$．故选A．

13. D【解析】$y=\sin^2x-2\sin x+3=(\sin x-1)^2+2$，所以$\sin x=-1$时，$y_{max}=6$；$\sin x=1$时，$y_{min}=2$；原函数的值域为$[2，6]$．故选D．

14. D【解析】$f(x)=\frac{2^{x+1}}{1+2^x}-\frac{1}{3}=2-\frac{2}{1+2^x}-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}-\frac{2}{1+2^x}$，由$2^x>0$，得$1+2^x>1$，$0<\frac{1}{1+2^x}<1$，$-\frac{1}{3}<\frac{5}{3}-\frac{2}{1+2^x}<\frac{5}{3}$；所以$-\frac{1}{3}<f(x)<\frac{5}{3}$，当$-\frac{1}{3}<f(x)<0$时，$[f(x)]=-1$；当$0\le f(x)<1$时，$[f(x)]=0$；当$1\le f(x)<\frac{5}{3}$时，$[f(x)]=1$；所以$y=[f(x)]$的值域为$\{-1，0，1\}$．故选D．

15. C【解析】$x<0$时，$2^x\in(0，1)$；$x\ge 0$时，$2(x-1)^2+m\ge -2$，依题意可得$m=-2$，故选C．

16. D【解析】由题意，$f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{(x-4)^2+9}=\sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{(x-4)^2+3^2}$，设动点$P(x,0)$，定点$A(1,1)$和$B(4,-3)$；那么$f(x)=|PA|+|PB|\geqslant|AB|=\sqrt{3^2+4^2}=5$．故选D．

17. C【解析】①中，令$x=m+a$，$a\in(-\frac{1}{2}，\frac{1}{2}]$，所以$f(x)=|x-[x]|=|a|\in[0，\frac{1}{2}]$故①正确；②中，由$f(k-x)=|(k-x)-[k-x]|=|(-x)-[-x]|=f(x)$，所以关于$x=\frac{k}{2}$对称，故②正确；③中，由$f(-x)=|(-x)-[-x]|=|x-[x]|=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数，故③正确；④中，$x=-\frac{1}{2}$时，$m=-1$，$f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，$x=\frac{1}{2}$时，$m=0$，$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$所以$f(-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$故④错误．故选C．

18. D【解析】函数$y=x+\sqrt{x^2-2x+3}=x+\sqrt{(x-1)^2+2}$，可知函数的定义域为$R$．当$x\ge 1$时，可知函数$y$是递增函数，可得$y\ge 1+\sqrt{2}$，当$x\le 1$时，可得$y-x=\sqrt{x^2-2x+3}\ge 0$，两边平方，因为$y-x\ge 0$，即$y>1$；得$(y-x)^2=\sqrt{x^2-2x+3}$，$x^2-2xy+y^2=x^2-2x+3$，$(y\ne 1)$，由$x=\frac{y^2-3}{2y-2}\le 1$．得$y\in R$．由$y-x=y-\frac{y^2-3}{2(y-1)}=\frac{y^2-2y+3}{2y-2}\ge 0$，由$y>1$，即$y^2-2y+3\ge 0$，可得$y\in R$，综上可得$y>1$．函数$y=x+\sqrt{x^2-2x+3}$的值域为$(1，+\infty)$．故选D．

19. B【解析】当$0\le x\le 4$时，$f(x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$，图象为开口向下的抛物线，对称轴为$x=1$，

故函数在$[0，1]$单调递增，$[1，4]$单调递减，$-(\frac{1}{2})^{a}\ge -8$，$-(\frac{1}{2})^{0}\le 1$当$x=1$时，函数取最大值1，当$x=4$时，函数取最小值-8，又函数$f(x)$的值域为$[-8，1]$，$y=-(\frac{1}{2})^{x}$，$a\le x<0$的值域为$[-8，1]$的子集，因为$y=-(\frac{1}{2})^{x}$，$a\le x<0$单调递增，只需$-(\frac{1}{2})^{a}\ge -8$，$-(\frac{1}{2})^{0}\le 1$，解得$-3\le a<0$，故选B.

20．B【解析】$y=\frac{x^2+2x+2}{x+1}=\frac{(x+1)^2+1}{x+1}=(x+1)+\frac{1}{x+1}$，当$x+1>0$时，$y=(x+1)+\frac{1}{x+1}\ge 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}=2$，当且仅当$x+1=\frac{1}{x+1}$，即$x+1=1$，也就是$x=0$时上式等号成立；当$x+1<0$时，有$y=-[-(x+1)+\frac{1}{-(x+1)}]\le -\sqrt{[-(x+1)\cdot\frac{1}{-(x+1)}}=-2$，当且仅当$-(x+1)=-\frac{1}{x+1}$，即$x+1=-1$，也就是$x=-2$时上式等号成立．即函数$y=\frac{x^2+2x+2}{x+1}$的值域是$\{y\mid y\le -2或y\ge 2\}$．故选B.

21．A【解析】

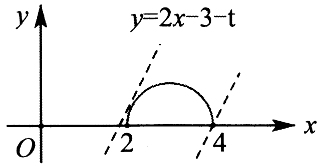
$$f(x)=\frac{\sqrt{x^4-3x^2+9}-\sqrt{x^4-4x^2+9}}{x}=\frac{x^4-3x^2+9-(x^4-4x^2+9)}{x(\sqrt{x^4-3x^2+9}+\sqrt{x^4-4x^2+9})}=\frac{x}{\sqrt{x^4-3x^2+9}+\sqrt{x^4-4x^2+9}}$$

$=\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{9}{x^2}-3}+\sqrt{x^2+\frac{9}{x^2}-4}}$，因为$x^2+\frac{9}{x^2}\ge 2\sqrt{x^2\cdot\frac{9}{x^2}}=6$，当且仅当$x=\sqrt{3}$时等号成立，所以

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{9}{x^2}-3}+\sqrt{x^2+\frac{9}{x^2}-4}}\le\frac{1}{\sqrt{6-3}+\sqrt{6-4}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，又$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{9}{x^2}-3}+\sqrt{x^2+\frac{9}{x^2}-4}}>0$，所以$f(x)\in(0，\sqrt{3}-\sqrt{2}]$，故选A.

22．B【解析】由$r_1=\sqrt{x^2+y^2}$，$r_2=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，那么$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$分别表示原点，和$(2，0)$圆心半径之和，可知最小为$r_1+r_2=2$，故选B.

23．A【解析】$f(x)=2x-3-\sqrt{-x^2+6x-8}=2x-3-\sqrt{1-(x-3)^2}$．由$-x^2+6x-8\ge 0$，解得$2\le x\le 4$．令$t=2x-3-\sqrt{1-(x-3)^2}$，则$\sqrt{1-(x-3)^2}=2x-3-t$，即两函数$y=\sqrt{1-(x-3)^2}$与$y=2x-3-t$的图象有交点，如图：



由图可知，当直线和半圆相切时，t最小，当直线过点$(4，0)$时，t最大．当直线与半圆相切时，由$\frac{|3-t|}{\sqrt{5}}=1$，得$t=3+\sqrt{5}$（舍）或$t=3-\sqrt{5}$；当直线过点$(4，0)$时，$2\times 4-3-t=0$，得$t=5$．函数$f(x)=2x-3-\sqrt{-x^2+6x-8}$的值域是$[3-\sqrt{5}，5]$．故选A.

24.【解析】二次函数的对称轴为$x=2$，①当$m<n<2$时，$f(x)$在$[m，n]$上单调递减，$f(m)=3n$，$f(n)=3m$，则$m^2-4m+10=3n$，$n^2-4n+10=3m$，两式作差得$(m+n)(m-n)-(m-n)=0$，由$m\ne n$，$m+n-1=0$，代入$m^2-4m+10=3n$，得$m^2-m+7=0$，此方程无解；②当$m\le 2\le n$时，$3m=6$，解得$m=2$，由

$n^2-4n+10=3n$，解得 $n=5$；③当 $2<m<n$ 时，$f(x)$ 在 $[m，n]$ 上单调递增，则 $f(m)=3m$，$f(n)=3n$．即 m，n 是方程 $x^2-4x+10=3x$ 的两根，即 m，n 是方程 $x^2-7x+10=0$ 的两根，即 $m=2$，$n=5$，（舍去）．综上，$m=2$，$n=5$，此时 $2m+n=9$．故答案为 9．

25.【解析】$y=\dfrac{ax+1}{x+2}=a+\dfrac{1-2a}{x+2}$，由 $x\neq-2$，则 $y\neq a$，又该函数的值域为 $\{y|y\neq2\}$，即 $a=2$．故答案为 2．

26.【解析】由题意得 $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1}{x^2+1}+\dfrac{4x}{x^2+1}=1+\dfrac{4x}{x^2+1}$．当 $x=0$ 时，$f(x)=1$；当 $x>0$ 时，$\dfrac{4x}{x^2+1}=\dfrac{4}{x+\dfrac{1}{x}}\leq\dfrac{4}{2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}}=2$，当且仅当 $x=1$ 时“$=$”成立；当 $x<0$ 时，$\dfrac{4x}{x^2+1}=\dfrac{4}{x+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{4}{-(-x+\dfrac{1}{-x})}\geq\dfrac{4}{-2\sqrt{(-x)\cdot\dfrac{1}{-x}}}=-2$，当且仅当 $x=-1$ 时取“$=$”．函数 $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+1}$ 的值域为 $[-1，3]$．

27.【解析】$f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)}$，则 $x\neq2$ 且 $x\neq3$，此时 $f(x)=\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{x-3+2}{x-3}=1+\dfrac{2}{x-3}$，因为 $x\neq2$ 且 $x\neq3$，所以 $y\neq1$ 且 $y\neq-1$，即值域为 $\{y|y\neq1$ 且 $y\neq-1\}$，故答案为 $\{y|y\neq1$ 且 $y\neq-1\}$

28.【解析】因为 $f(x)$ 的定义域为 R，则不等式 $ax^2-x+\dfrac{a}{16}\geq0$ 的解集为 R；所以 $\begin{cases}a>0\\ \Delta=1-\dfrac{a^2}{4}\leq0\end{cases}$，解得 $a\geq2$；所以实数 a 的取值范围是 $[2，+\infty)$；因为 $f(x)$ 的值域为 $[0，+\infty)$，所以 $g(x)=ax^2-x+\dfrac{a}{16}$ 的值域包含集合 $[0，+\infty)$，$\begin{cases}a>0\\ \Delta=1-\dfrac{a^2}{4}\geq0\end{cases}$ 或 $a=0$，解得 $0\leq a\leq2$，所以实数 a 的取值范围是 $[0，2]$，故答案为 $[2，+\infty)$，$[0，2]$．

29.【解析】根据定义得，$f_1(x)=\begin{cases}f(x)，f(x)\leq1\\1，f(x)>1\end{cases}$，由 $f(x)=\begin{cases}2-x^2，&-2\leq x\leq0\\2^x-1，&x>0\end{cases}$，$f_1(x)=\begin{cases}2-x^2，-2\leq x\leq-1\\2^x-1，0<x\leq1\\1，-1<x\leq0\ or\ x>1\end{cases}$，所以 $f_1(x)$ 的值域为 $[-2，1]$．

30.【解析】由 $y=f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$，得 $y\sin x=1-\cos x$，得 $\sqrt{y^2+1}\sin(x+\phi)=1$，其中 $\tan\phi=\dfrac{1}{y}(y\neq0)$，则 $\sin(x+\phi)=\dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}}(y\neq0)$，$|\sin(x+\phi)|\leq1$，即 $\dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}}\leq1(y\neq0)$，$y>0$ 或 $y<0$，所以 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$．故答案为 $(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$．

31．【解析】$f(x)=(\log_3x-1)(2+\log_3x)=(log_3x)^2+log_3x-2=(log_3x+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{9}{4}$；因为 $\dfrac{1}{3}\leq x\leq27$；即 $-1\leq\log_3x\leq3$；当 $log_3x=-\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取最小值 $-\dfrac{9}{4}$；$\log_3x=3$ 时，$f(x)$ 取最大值 10；函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\dfrac{9}{4}，10]$，故答案为 $[-\dfrac{9}{4}，10]$．

32.【解析】(1) 函数 $f(x)=2\sqrt{x+2}-x=2\sqrt{x+2}-(x+2)+2=3-(\sqrt{x+2}-1)^2$，当 $x\in[-2，2]$ 时，$2\leq f(x)\leq3$，

所以 $f(x)$ 的值域是 $[2,\ 3]$；

（2）又当 $x\in[-2,\ 2]$ 时，①若 $m<-2$，则 $g(x)=x^2-2mx+5m-2$ 在 $[-2,\ 2]$ 上是增函数，最小值 $g(-2)=9m+2$，最大值 $g(2)=m+2$；$g(x)$ 的值域是 $[9m+2,\ m+2]$，所以 $[2,\ 3]\subseteq[9m+2,\ m+2]$，即 $\begin{cases}9m+2\le 2\\ m+2\ge 3\end{cases}$，解得 $-1\le m\le 0$，此时无解；②若 $m>2$，则 $g(x)=x^2-2mx+5m-2$ 在 $[-2,\ 2]$ 上是减函数，最小值 $g(2)=m+2$，最大值 $g(-2)=9m+2$；$\therefore g(x)$ 的值域是 $[m+2,\ 9m+2]$，则 $[2,\ 3]\subseteq[m+2,\ 9m+2]$，即 $\begin{cases}m+2\le 2\\ 9m+2\ge 3\end{cases}$，解得 $-\dfrac{1}{9}\le m\le 0$，无解；③若 $-2\le m\le 2$，则 $g(x)=x^2-2mx+5m-2$ 在 $[-2,\ 2]$ 上是先减后增的函数，最小值是 $g(m)=-m^2+5m-2$，最大值是 $max\{g(-2),\ g(2)\}=max\{9m+2,\ 3m+2\}$；当 $m\ge 0$ 时，$g(x)$ 的值域是 $[-m^2+5m-2,\ 9m+2]$，所以 $[2,\ 3]\subseteq[-m^2+5m-2,\ 9m+2]$，即 $\begin{cases}-m^2+5m-2\le 2\\ 9m+2\ge 3\end{cases}$，解得 $\dfrac{1}{9}\le m\le 1$，或 $m\ge 4$（不符合条件，舍去）；则取 $\dfrac{1}{9}\le m\le 1$；当 $m<0$ 时，$g(x)$ 的值域是 $[-m^2+5m-2,\ m+2]$，所以 $[2,\ 3]\subseteq[-m^2+5m-2,\ m+2]$，即 $\begin{cases}-m^2+5m-2\le 2\\ m+2\ge 3\end{cases}$ or $\begin{cases}-m^2+5m-2\le 2\\ 3m+2\ge 3\end{cases}$；解得 $m=1$，或 $m\ge 4$ 不符合条件，舍去；综上知，实数 m 的取值范围是：$[\dfrac{1}{9},\ 1]$．故答案为 $[\dfrac{1}{9},\ 1]$．

33．【解析】$f(x)=2-\sqrt{2x+4}$ 是 $[0,\ +\infty)$ 上的递减函数，$f(x)$ 的值域为 $(-\infty,\ 0]$，令 $A=(-\infty,\ 0]$，令 $g(x)=ax+a-1$ 的值域为 B，因为对任意 $x_1\in[0,\ +\infty)$ 都有 $x_2\in(-\infty,\ 1]$ 使得 $f(x_1)=g(x_2)$，则有 $A\subseteq B$，因为 $g(x)=ax+a-1$，当 $a=0$ 时，$g(x)=-1$，不满足 $A\subseteq B$，当 $a>0$ 时，$g(x)$ 在 $(-\infty,\ 1]$ 上单调递增，$B=(-\infty,\ 2a-1]$，故 $2a-1\ge 0$，$a\ge\dfrac{1}{2}$，当 $a<0$ 时，$g(x)$ 在 $(-\infty,\ 1]$ 上单调递减，$B=[2a-1,\ +\infty)$，不满足 $A\subseteq B$，综上所述 $a\ge\dfrac{1}{2}$，故答案为：$a\ge\dfrac{1}{2}$．

34．【解析】（1）$f(x)$ 为偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，即 $\dfrac{(-x+1)(-x+b)}{x^2}=\dfrac{(x+1)(x+b)}{x^2}$，得 $b=-1$；

（2）令 $f(a)=0$，即 $\dfrac{a^2-1}{a^2}=0$，$a=\pm1$，取 $a=-1$；令 $f(a)=\dfrac{3}{4}$，即 $\dfrac{a^2-1}{a^2}=\dfrac{3}{4}$，$a=\pm2$，取 $a=-2$，故 $a=-1$ 或 -2；

（3）$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$ 是偶函数，且 $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}>0$，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 上是减函数，$(0,\ +\infty)$ 上是增函数．又 $x\ne 0$，由题意可知：$\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{n}<0$ 或 $0<\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{n}$．若 $\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{n}<0$，则有 $\begin{cases}f(\dfrac{1}{m})=2-3n\\ f(\dfrac{1}{n})=2-3m\end{cases}$，即 $\begin{cases}1-m^2=2-3n\\ 1-n^2=2-3m\end{cases}$，整理得 $n^4+2n^2-27n+10=0$，此时方程组无负解；若 $0<\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{n}$，则有 $\begin{cases}f(\dfrac{1}{n})=2-3n\\ f(\dfrac{1}{m})=2-3m\end{cases}$，即 $\begin{cases}1-m^2=2-3m\\ 1-n^2=2-3n\end{cases}$，则 m，n 为方程 $x^2-3x+1=0$，的两个根．由 $0<\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{n}$，得 $m>n>0$，即 $m=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，$n=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$．

35．【解析】（1）设 $x<0$，则 $-x>0$，因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)=f(-x)=x^2+2x+2$，得

$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+2，x<0\\x^2-2x+2，x\geq 0\end{cases}$，

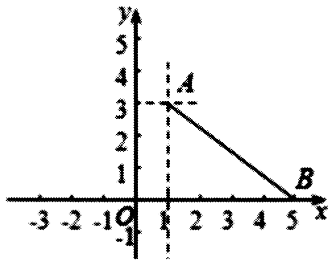
（2）函数 $f(x)$ 的值域为 $[1，+\infty)$，显然有 $2m\geq 1$，即 $m\geq\frac{1}{2}$，①当 $\frac{1}{2}\leq m<n<1$ 时，$f(x)$ 单调递减，此时 $\begin{cases}m^2-2m+2=2n\\n^2-2n+2=2m\end{cases}$，$m^2=n^2$，显然不成立，②当 $\frac{1}{2}\leq m<1<n$ 时，$f(x)$ 在 $(m，1)$ 上单调递减，在 $(1，n)$ 上单调递增，$f(x)_{min}=f(1)=1=2m$，$f(m)=f(\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$，$f(n)=n^2-2n+2$，若 $f(x)_{max}=f(\frac{1}{2})$，即 $2n=\frac{5}{4}$，$n=\frac{5}{8}$（舍），若 $f(x)_{max}=f(n)$，即 $2n=n^2-2n+2$，$n=2+\sqrt{2}$ 或 $n=2-\sqrt{2}$（舍），$\therefore m=\frac{1}{2}$，$n=2+\sqrt{2}$；③当 $1<m<n$ 时，$f(x)$ 单调递增，此时 $\begin{cases}m^2-2m+2=2m\\n^2-2n+2=2n\end{cases}$，即 $\begin{cases}m=2-\sqrt{2}\\n=2+\sqrt{2}\end{cases}$（舍）；综上，$m=\frac{1}{2}$，$n=2+\sqrt{2}$．

36.【解析】(1) 由题意可得，$-x^2+6x-8>0$，解不等式可得，$2<x<4$，$A=\{x|2<x<4\}$；

（2）由题意得 $g(x)=\log_4(2x)\log_{\sqrt{2}}(\frac{4}{x})x\in A$ $=\frac{1}{2}(log_2x+1)\cdot[2(2-log_2x)]$，令 $t=\log_2 x$，则 $t\in(1,2)$，由 $g(t)=-t^2+t+2=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}$ 在 $(1，2)$ 上单调递减，则 $g(2)<g(t)<g(1)$，即 $0<g(t)<2$，即 $g(x)$ 的值域为 $(0，2)$．

37.【解析】函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+10}+|x-5|=\sqrt{(x-1)^2+(0-3)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(0-0)^2}$

则 $f(x)$ 表示 x 轴上的点到 $B(1，3)$，$C(5，0)$ 距离之和，画出图象，如图示：



，

由图象得：最小值为 5，无最大值，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域是 $[5，+\infty)$．

38.【解析】(1)（1）求 $f(x)$ 的值域：①若 $x=0$，$f(x)=0$；

②若 $x\neq 0$，则 $f(x)=\dfrac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{(\frac{1}{x}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}$；$0<x\leq 1$；即 $\frac{1}{x}\geq 1$；得 $(\frac{1}{x}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\geq(1+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=2$；

所以 $0<\dfrac{1}{(\frac{1}{x}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\leq\frac{1}{2}$；即 $f(x)$ 的值域 $M=[0，\frac{1}{2}]$；

(2)求 $g(x)$ 的值域：① $a=0$ 时，$g(x)=5$；$\therefore N=\{5\}$；$\because a>0$，$g(x)$ 在 $[0，1]$ 上单调递增；$g(0)\leq g(x)\leq g(1)$；即 $5-2a\leq g(x)\leq 5-a$；所以 $N=[5-2a，5-a]$；

（2）根据题意知，$M\subseteq N$，$a>0$，$N=[5-2a，5-a]$；所以 $\begin{cases}a>0\\5-2a\leq 0\\5-a\geq\frac{1}{2}\end{cases}$；解得 $\frac{5}{2}\leq a\leq\frac{9}{2}$；即实数 a 的取值范围为 $[\frac{5}{2}，\frac{9}{2}]$．

39.【解析】(1)由已知$|f(x)-g(x)|=|lgx-lg(x+1)|=|lg\dfrac{x}{x+1}|\le 1$，所以$-1\le lg\dfrac{x}{x+1}\le 1$，解得$x\ge\dfrac{1}{9}$，从而$m\ge\dfrac{1}{9}$，

（2）由已知$|f(x)-g(x)|=|4^x-2^x+1|=|t^2-t+1|$，其中$t=2^x\in(0，1]$，由二次函数的图象可知，

当$t\in(0，1]$时，$y=t^2-t+1\in[\dfrac{3}{4}，1]$，所以$|f(x)-g(x)|\le 1$恒成立，所以它们是"伙伴函数"

（3）由已知$|f(x)-g(x)|=|x^2+\dfrac{1}{2}-kx|\le 1$在$x\in[1，2]$时恒成立．即$-1\le x^2+\dfrac{1}{2}-kx\le 1$在$x\in[1，2]$时恒成立，分离参数可得，$\begin{cases}k\ge x-\dfrac{1}{2x}\\ k\le x+\dfrac{3}{2x}\end{cases}$在$x\in[1，2]$时恒成立，所以$\begin{cases}k\ge (x-\dfrac{1}{2x})_{max}\\ k\le (x+\dfrac{3}{2x})_{min}\end{cases}$．

函数$y=x-\dfrac{1}{2x}$在$x\in[1，2]$时单调递增，所以其最大值为$2-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$，函数$y=x+\dfrac{3}{2x}\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{3}{2x}}=\sqrt{6}$，可知其最小值为$\sqrt{6}$，所以$\dfrac{7}{4}\le k\le\sqrt{6}$．

40．解（1）$y=3x^2-x+2$，由二次函数的性质可知，当$x=\dfrac{1}{6}$时，函数有最小值$\dfrac{23}{12}$，故函数的值域为$[\dfrac{23}{12}，+\infty)$．

（2）$y=\sqrt{-x^2-6x-5}=\sqrt{-(x+3)^2+4}$，$0\le\sqrt{-(x+3)^2+4}\le\sqrt{4}$，所以$0\le y\le 2$，故函数的值域$[0，2]$．

（3）$y=\dfrac{3x+1}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+7}{x-2}=3+\dfrac{7}{x-2}\ne 3$，故函数的值域$(-\infty，3)\cup(3，+\infty)$．

（4）令$\sqrt{1-x}=t$则$t\geqslant 0$且$x=1-t^2$，$y=x+4\sqrt{1-x}=1-t^2+4t=-(t-2)^2+5$在$[0，2]$上单调递增，在$[2，+\infty)$单调递减，当$t=2$时，函数有最大值5，$\therefore$函数的值域为$(-\infty，5]$．

（5）令$x=\cos\alpha$，则$y=x+\sqrt{1-x^2}=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})$，所以$-\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}$．

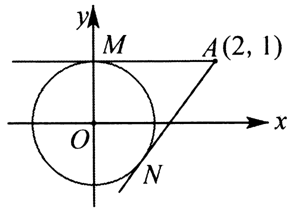
（6）$y=|x-1|+|x+4|=\begin{cases}2x+3，x\ge 1\\ 5，-4<x<1\\ -2x-3，x\le -4\end{cases}$，所以$y\ge 5$，故函数的值域$[5，+\infty)$．

（7）$y=\dfrac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$，得$(y-2)x^2+(y+1)x+y-2=0$，①当$y=2$时，$x=0$满足条件，②当$y\ne 2$时，$\Delta=(y+1)^2-4(y-2)^2\ge 0$即$y^2-6y+5\le 0$，解可得$1\le y\le 5$且$y\ne 2$，综上可得，$1\le y\le 5$，故函数的值域为$\{y|1\le y\le 5\}$．

（8）因为$x>\dfrac{1}{2}$，所$\therefore x-\dfrac{1}{2}>0$，即$x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}\geqslant 2\sqrt{(x-\dfrac{1}{2})\bullet\dfrac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}}=\sqrt{2}$，

得$y=\dfrac{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}=x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}\geqslant\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$，故函数的值域为$[\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}，+\infty)$．

（9）$y=\dfrac{1-\sin x}{2-\cos x}=\dfrac{\sin x-1}{\cos x-2}$可以看着在单位圆上任取一点与定点$A(2，1)$的连线的斜率，当直线与圆相切时，由圆心到直线的距离为半径可得斜率$k=0$或$k=\dfrac{4}{3}$，$\therefore 0\le k\le\dfrac{4}{3}$，故函数的值域为$[0，\dfrac{4}{3}]$．



（10）$y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-6}=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{x-3}{x+3}(x\neq 2)$，所以 $y=\dfrac{x-3}{x+3}=\dfrac{x+3-6}{x+3}=1-\dfrac{6}{x+3}$，所以 $y\neq -\dfrac{1}{5}$ 且 $y\neq 1$，

即函数的值域为 $\{y\,|\,y\neq 1$ 且 $y\neq -\dfrac{1}{5}\}$．

（11）$y=2x+4\sqrt{1-x}$，令 $\sqrt{1-x}=t$，则 $x=1-t^2$ 且 $t\geq 0$，

所以 $y=2x+4\sqrt{1-x}=2(1-t^2)+4t=-2t^2+4t+2=-2(t-1)^2+4$，根据二次函数的 性质可知，当 $t=1$ 时，函数有最大值 4，函数的值域为 $(-\infty,\ 4]$．

（12）$y=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

① 当 $x=0$ 时，$y=0$；② 当 $x>0$，$y=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2+2x+2}{x^2}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}$，

$\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x}+1=2(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{2}>1$，所以 $y>-1$；③ 当 $x<0$ 时，$y=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}$，

$\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x}+1=2(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{1}{2}$，所以 $y\leq\sqrt{2}$，综上可得，函数的值域为 R．

（13）$y=4-\sqrt{3+2x-x^2}$ 的定义域 $[-1,\ 3]$，令 $f(x)=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$

则 $0\leq f(x)\leq 4$，即 $0\leq\sqrt{3+2x-x^2}\leq 2$，所以 $2\leq f(x)\leq 4$ 即函数的值域 $[2,\ 4]$．

（14）$y=x-\sqrt{1-2x}$ 的定义域为 $(-\infty,\ \dfrac{1}{2}]$，且在 $(-\infty,\ \dfrac{1}{2}]$ 上单调递增，所以当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，函数有最大值 $\dfrac{1}{2}$，

故函数的值域 $(-\infty,\ \dfrac{1}{2}]$．

（15）$y=\dfrac{2x^2+2x+5}{x^2+x+1}$，即 $\therefore (y-2)x^2-(y-2)x+y-5=0$，所以 $\Delta=(y-2)^2-4(y-2)(y-5)\geq 0$，

即 $(y-2)(3y-18)\leq 0$，所以 $2\leq y\leq 6$，故函数的值域 $(2,\ 6]$．

专题 4 函数基本性质

达标训练（适合高一）

1．C【解析】根据对勾函数单调性，$f(x)$ 在 $(0,\sqrt{2})$ 上单调递减，故选 C．

2．A【解析】根据题意，依次分析选项：对于 A，$y=2|x|=\begin{cases}2x, x\geq 0\\ -2x, x<0\end{cases}$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，符合题意；对于 B，$y=\dfrac{1}{x}$，为反比例函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不符合题意；对于 C，$y=(\dfrac{1}{2})^x$，为指数函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不符合题意；对于 D，$y=x^2-x$，为二次函数，在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上单调递减，不符合题意；故选 A．

3．D【解析】根据题意，函数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}=\dfrac{-3}{x+2}+2$，易得在区间 $(-\infty,-2)$ 和 $(-2,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，即函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-2)$ 和 $(-2,+\infty)$ 为增函数，故选 D.

4．B【解析】根据题意，函数 $f(x)=-x^3+m$，其定义域为 R，则 R 上 $f(x)$ 为减函数，$g(x)=f(x)+x^3+x^2-kx=x^2-kx+m$ 在 $[-1,1]$ 上为减函数，必有 $x=\dfrac{k}{2}\geq 1$，解可得 $k\geq 2$，即 k 的取值范围为 $[2,+\infty)$；故选 B.

5．C【解析】令 $t=-x^2+2x$，则 $y=(\dfrac{1}{2})^t$，由 $t=-x^2+2x$ 的对称轴为 $x=1$，函数 t 在 $(-\infty,1)$ 递增，$[1,+\infty)$ 递减，而 $y=(\dfrac{1}{2})^t$ 在 R 上递减，由复合函数的单调性：同增异减，可得函数 $y=(\dfrac{1}{2})^{-x^2+2x}$ 的单调递增区间是 $[1,+\infty)$，故选 C.

6．C【解析】令 $x^2-5x+4\geq 0$，解得：$x\geq 4$ 或 $x\leq 1$，而函数 $y=x^2-5x+4$ 的对称轴是：$x=\dfrac{5}{2}$，由复合函数同增异减的原则，故函数 $y=\sqrt{x^2-5x+4}$ 的单调递增区间是 $[4,+\infty)$，故选 C.

7．C【解析】由题意，分段函数是在 R 上单调递减，可得对数的底数需满足 $0<a<1$，根据二次函数开口向上，在 $(-\infty,-\dfrac{b}{2a})$ 单调递减，可得 $-\dfrac{b}{2a}\geq 0$，即 $-\dfrac{4a-3}{2}\geq 0$，解得：$a\leq\dfrac{3}{4}$．且 $[x^2+(4a-3)x+3a]_{\min}\geq[\log_a(x+1)+1]_{\max}$，故而得：$3a\geq 1$，解得：$a\geq\dfrac{1}{3}$．所以 a 的取值范围是 $[\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{4}]$，故选 C.

8．C【解析】$c=4$，因为 $f(3-x)=f(3+x)$，所以 $f(4)=f(2)$，又 $0<2^{-0.5}<2^0=1$，$1=\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4=2$，且 $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上为单调递减函数，即 $f(c)<f(b)<f(a)$．故选 C.

9．C【解析】由题意可知，函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，因为 $f(2a^2-5a+4)<f(a^2+a+4)$，则 $2\leq 2a^2-5a+4<a^2+a+4$，即 $a^2-6a<0$ 且 $2a^2-5a+2\geq 0$，解可得，$2\leq a<6$ 或 $0<a\leq\dfrac{1}{2}$．故选 C.

10．D【解析】因为 $y=(\dfrac{1}{2})^x$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递减，$y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上也单调递减，所以函数 $f(x)=(\dfrac{1}{2})^x+\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递减，即 $f(x)_{\min}=f(2)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$，故选 D.

11．C【解析】因为函数 $f(x+1)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 中心对称，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 中心对称，即 $f(x)$ 为奇函数，令 $g(x)=x^{2019}f(x)$，则 $g(-x)=g(x)$，即 $g(x)$ 为偶函数，因为 $f(1)=1$，所以 $g(1)=f(1)=1$，又由任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{x_1^{2019}f(x_1)-x_2^{2019}f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立.

所以 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 对于任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，都成立，即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

根据偶函数的对称性可知，$g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，因为 $f(x)\leq\dfrac{1}{x^{2019}}$，当 $x>0$ 时，可得 $g(x)\leq 1$，

所以 $\begin{cases}x>0\\-1\leq x\leq 1\end{cases}$，解得 $0<x\leq 1$，当 $x<0$ 时，可得 $g(x)\geq 1$，所以 $\begin{cases}x<0\\x\geq 1\text{或}x\leq -1\end{cases}$，解得 $x\leq -1$，综上可得，不等式的解集为 $\{x\,|\,x\leq -1$ 或 $0<x\leq 1\}$．故选 C.

12．A【解析】据题意知，$f(x)$ 在 R 上是减函数，又 $\pi^{0.5}>\pi^0=1$，$0=\log_\pi 1<\log_\pi e<\log_\pi \pi=1$，

$\log_\pi \sin\dfrac{\pi}{5} < \log_\pi 1 = 0$，所以$c<b<a$，即$f(a)<f(b)<f(c)$．故选A.

13．C【解析】函数$f(x)=-x^2+2(a-1)x$是二次函数，图象是抛物线，且开口向下，对称轴是$x=a-1$；$f(x)$在区间$(1,2)$上是减函数时，有$a-1\le 1$，解得$a\le 2$；函数$g(x)=\dfrac{ax-1}{x-1}=a+\dfrac{a-1}{x-1}$在区间$(1,2)$上是减函数时，有$a-1>0$，解得$a>1$，综上知，$a$的取值范围是$(1,2]$．故选C.

14．A【解析】因为$f(2-x)=f(x)$，所以$f(\dfrac{1}{3})=f(2-\dfrac{1}{3})=f(\dfrac{5}{3})$，$f(\dfrac{2}{3})=f(2-\dfrac{2}{3})=f(\dfrac{4}{3})$，因为$x\ge 1$时，$f(x)=2^x-1$，则$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，且$\dfrac{4}{3}<\dfrac{3}{2}<\dfrac{5}{3}$，所以$f(\dfrac{4}{3})<f(\dfrac{3}{2})<f(\dfrac{5}{3})$，即$f(\dfrac{2}{3})<f(\dfrac{3}{2})<f(\dfrac{1}{3})$．故选A.

15．D【解析】因为$f(x)=\begin{cases}(2a+3)x-4a+3(x\ge 1)\\ a^x(x<1)\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数，所以$\begin{cases}2a+3>0\\ a>1\\ 6-2a\ge a\end{cases}$，解可得，$1<a\le 2$，故选D.

16．C【解析】因为函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{1-ax}}{a-1}(a\ne 1)$在$[-1,0]$上是增函数，当$a>1$时，$f(x)=\dfrac{\sqrt{1-ax}}{a-1}$在$[-1,0]$上是减函数；当$a<1$时，要使$f(x)=\dfrac{\sqrt{1-ax}}{a-1}$在$[-1,0]$上是增函数，则$a>0$，故$0<a<1$．综上：实数$a$的取值范围是$(0,1)$故选C.

17．A【解析】由$f(-x)=f(x)$可得$f(x)$为偶函数，且$f(-1)=-2$，因为当$0\le a<b$时不等式$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$恒成立，所以$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，根据偶函数的对称性可知，在$(-\infty,0)$上单调递减，且$f(1)=f(-1)=-2$，因为$f(x-1)+2<0$，所以$f(x-1)<-2=f(1)=f(-1)$，即$|x-1|<1$，解可得，$0<x<2$，故选A.

18．C【解析】因为$f(x)$在R上是增函数；所以$\begin{cases}2-a>0\\ a>0\\ (2-a)\cdot 2\ge a+1\end{cases}$；解得$0<a\le 1$；即$a\in a\in(0,1]$．故选C.

19．C【解析】因为$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3x^2-ax+8)$在$[-1,+\infty)$上是减函数，且外层函数$y=\log_{\frac{1}{3}}t$为减函数，则内层函数$t=3x^2-ax+8$在$[-1,+\infty)$上是增函数且恒大于0，所以$\begin{cases}\dfrac{a}{6}\le -1\\ 3\times(-1)^2+a+8>0\end{cases}$，解得$-11<a\le -6$．即实数$a$的取值范围是$(-11,-6]$．故选C.

20．D【解析】函数$y=\log_a(8-ax)$（其中$a>0$，$a\ne 1$）在区间$[1,4]$上单调递减，当$a>1$时，由函数$t=8-ax$在区间$[1,4]$上单调递减且$y>0$，故$8-4a>0$，求得$1<a<2$．当$0<a<1$时，由函数$t=8-ax$在区间$[1,4]$上单调递减，可得函数$y=\log_a(8-ax)$在区间$[1,4]$上单调递增，这不符合条件．综上，实数a的取值范围为$(1,2)$，故选D.

21．C【解析】设$g(x)=x^2-ax+1$，则要使$f(x)=\ln(x^2-ax+1)$在区间$(2,+\infty)$上单调递增，则满足$\begin{cases}-\dfrac{-a}{2}=\dfrac{a}{2}\le 2\\ g(2)=5-2a\ge 0\end{cases}$，即$\begin{cases}a\le 4\\ a\le\dfrac{5}{2}\end{cases}$，得$a\le\dfrac{5}{2}$，即实数$a$的取值范围是$(-\infty,\dfrac{5}{2}]$，故选C.

22．A【解析】当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}[\frac{1}{2}(x^2-x)]$，在 $x=1$ 时无意义，故不可能在 $[1,2]$ 上递减，据此排除 B，D，当 $a=\frac{1}{4}$ 时，$f(x)=\log_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x)$ 在 $[1,2]$ 上递减，符合题意，据此排除 C，故选 A.

22．D【解析】$f(x)=\frac{2^x-t}{2^x+1}=1-\frac{t+1}{2^x+1}$，①当 $t+1=0$ 即 $t=-1$ 时，$f(x)=1$，此时 $f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 都为 1，能构成一个正三角形的三边长，满足题意；②当 $t+1>0$ 即 $t>-1$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递增，$-t<f(x)<1$，所以 $-t<f(a)$，$f(b)$，$f(c)<1$，由 $f(a)+f(b)>f(c)$ 得：$f(x)_{\max}\le 2f(x)_{\min}$ $-2t\ge 1$，解得 $-1<t\le-\frac{1}{2}$；③当即 $t<-1$ 时 $t+1<0$，$f(x)$ 在 R 上单调递减，又 $1<f(x)<-t$，由 $f(a)+f(b)>f(c)$，$f(x)_{\max}\le 2f(x)_{\min}$，即 $2\ge -t$，$t\ge-2$，所以 $-2\le t<-1$．综上，t 的取值范围是 $-2\le t\le-\frac{1}{2}$．故选 D.

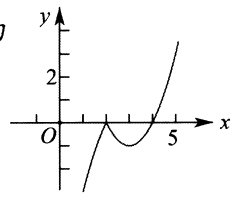
24．AC 【解析】$f(x)$ 是定义在 D 上的函数，若存在两个不相等的实数 x_1，$x_2\in D$，使得 $f(\frac{x_1+x_2}{2})=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称函数 $f(x)$ 具有性质 P．说明函数的图象上存在 3 个点，具有对称性，因为 $f(x)=x^3$；是奇函数关于原点对称，所以 A 满足题意；$f(x)=\ln x$ 是单调增函数，不存在满足题意的 3 点，所以 B 不正确；$f(x)=|x^2-1|$ 当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时 $f(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2})=f(0)=1=\frac{f(-\sqrt{2})+f(\sqrt{2})}{2}=\frac{1+1}{2}=1$；$C$ 满足题意；$f(x)=e^{|x|}-2$，函数是偶函数，关于 y 轴对称，$x>0$ 时是增函数，$x<0$ 是单调减函数，没有满足题意的 3 点，所以 D 不正确．故选 AC.

25．AD 【解析】当 $a<0$ 时，函数 $y=ax+1$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递减，当 $x=0$ 时，函数取得最大值为 1；当 $x=2$ 时，函数取得最小值为 $2a+1$．当 $a>0$ 时，函数 $y=ax+1$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递增，当 $x=0$ 时，函数取得最小值为 1，当 $x=2$ 时，函数取得最大值为 $2a+1$．故选 AD.

26．【解析】若 $f(x)$ 为"区域 D 上的三角形函数"．则在区间上 D，函数的最大值 M 和最小值 m 应满足：$M<2m$，$m>0$，因为函数 $f(x)=kx+2$ 是"$[1,4]$ 上的三角形函数"，故 $k<0$ 时，$k+2<2(4k+2)$，解得：$k\in(-\frac{2}{7},0)$；$k=0$ 时，显然满足条件；$k>0$ 时，$4k+2<2(k+2)$，解得：$k\in(0,1)$；综上可得：实数 k 的取值范围是 $(-\frac{2}{7},1)$，故答案为 $(-\frac{2}{7},1)$．

27.【解析】$f(x-1)=\begin{cases}1, x>1\\0, x=1\\-1, x<1\end{cases}$；所以 $g(x)=\begin{cases}x^2, x>1\\0, x=1\\-x^2, x<1\end{cases}$；即 $g(x)$ 的单调递减区间为 $[0,1)$．故答案为：$[0,1)$．

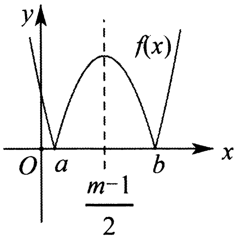
28．【解析】函数 $f(x)=|x-2|(x-4)=\begin{cases}(x-2)(x-4) & (x\ge 2)\\(2-x)(x-4) & (x<2)\end{cases}$ 所以函数的增区间为 $(-\infty,2)$ 和 $(3,+\infty)$，减区间是 $(2,3)$．因为在区间 $(5a,4a+1)$ 上单调递减，所以 $(5a,4a+1)\subseteq(2,3)$，得 $\begin{cases}2\le 5a\\4a+1\le 3\end{cases}$，解之得 $\frac{2}{5}\le a\le\frac{1}{2}$，故答案为 $\frac{2}{5}\le a\le\frac{1}{2}$

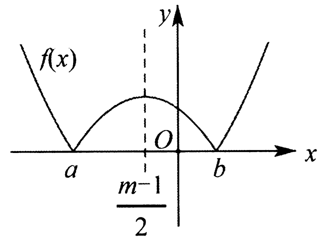


29.【解析】由 $2x-1>0$，得 $x>\frac{1}{2}$，所以函数 $f(x)=\log_a(2x-1)$ 的定义域为 $(\frac{1}{2},+\infty)$，因为 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\in(0,1)$，而内层函数 $y=2x-1$ 为增函数，所以 $f(x)$ 是定义域内的减函数，由 $f(t-1)>f(\frac{12}{t})$，得 $\begin{cases}t-1>\frac{1}{2}\\\frac{12}{t}>\frac{1}{2}\\t-1<\frac{12}{t}\end{cases}$，解

得$\dfrac{3}{2}<t<4$．所以不等式$f(t-1)>f(\dfrac{12}{t})$的解集为$(\dfrac{3}{2},4)$．故答案为$(\dfrac{3}{2},4)$．

30.【解析】函数$y=x^2+(1-m)x+m-3$的判别式$\Delta=(m-3)^2+4>0$，所以$x^2+(1-m)x+m-3=0$有2个不等实数根，设这两个根为a、b，且$a<b$，因为$f(x)$在$[-2,0]$上是减函数，所以$a\ge 0$①，如图（1）所示：或$\begin{cases}b\ge 0\\ \dfrac{m-1}{2}\le -2\end{cases}$②，如图（2）所示．由①可得$\dfrac{m-1-\sqrt{(m-3)^2+4}}{2}\ge 0$，即$(m-1)^2\ge(m-3)^2+4$，解得$m\ge 3$；由②可得$\begin{cases}\dfrac{m-1+\sqrt{(m-3)^2+4}}{2}\ge 0\\ m\le -3\end{cases}$，解得$m\le -3$．综上可得，$m$的取值范围为：$(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$，





31.【解析】当$a=0$时，$f(x)=\sqrt{-2x+5}$在定义域内是减函数，不满足条件．要使$f(x)$在$[2,+\infty)$是增函数，则$a>0$，此时$y=g(x)=ax^2-2x-5a+5$的对称轴为$x=-\dfrac{-2}{2a}=\dfrac{1}{a}$，同时满足$\begin{cases}\dfrac{1}{a}\le 2\\ g(2)=1-a\ge 0\end{cases}$，得$\begin{cases}a\ge\dfrac{1}{2},\\ a\le 1\end{cases}$得$\dfrac{1}{2}\le a\le 1$，即实数$a$的取值范围是$[\dfrac{1}{2},1]$，故答案为$[\dfrac{1}{2},1]$．

32.【解析】由$2-x=0$，得$x=2$，此时$f(2)=0$，所以$f(x)$恒过定点$(2,0)$，则当$a>1$时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减；因为内函数$t=x^2$在$(-\infty,0)$上是减函数，所以$f(x^2)$的单调递增区间为$(-\infty,0)$．故答案为$(-\infty,0)$．

33．【解析】令$t=\log_{\frac{1}{2}}x$，在$(\dfrac{1}{4},2)$上，$t\in(-1,2)$，且t单调递减．因为函数$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}^2 x+a\log_{\frac{1}{2}}x+1=g(t)=t^2+at+1$，则$g(t)=t^2+at+1$ 在$(-1,2)$上单调递减，所以$-\dfrac{a}{2}\ge 2$，解得$a\le -4$，故答案为$(-\infty,-4]$．

34.【解析】(1)因为$f(-x)=2^{-x}-2^{x}=-(2^{x}-\dfrac{1}{2^{x}})=-f(x)$，则函数$f(x)$是奇函数，则当$x\ge 0$时，设$0\le x_1<x_2$，则$f(x_1)-f(x_2)=2^{x_1}-\dfrac{1}{2^{x_1}}-2^{x_2}+\dfrac{1}{2^{x_2}}=2^{x_1}-2^{x_2}+\dfrac{2^{x_2}-2^{x_1}}{2^{x_1}2^{x_2}}=(2^{x_1}-2^{x_2})\dfrac{2^{x_1}2^{x_2}-1}{2^{x_1}2^{x_2}}$，因为$0\le x_1<x_2$，所以$1\le 2^{x_1}<2^{x_2}$，即$2^{x_1}-2^{x_2}<0$，$2^{x_1}2^{x_2}>1$，则$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，则$f(x)$在$[0,+\infty)$，上是增函数，因为$f(x)$是$R$上的奇函数，所以$f(x)$在$R$上是增函数．

（2）因为$f(x)$在R上是增函数，所以不等式$f(\log_2 x)<f(1)$等价为不等式$\log_2 x<1$，即$0<x<2$．即不等式的解集为$(0,2)$．

35.【解析】(1）$f'(x)=\dfrac{3x+6-3x-7}{(x+2)^2}=-\dfrac{1}{(x+2)^2}<0$；函数$f(x)$在$(-\infty,-2)$，$(-2,+\infty)$上单调递减，即该、函数的单调递减区间是：$(-\infty,-2)$，$(-2,+\infty)$；

（2）$m\in(-2,2)$时，$-2m+3\in(-1,7)$，$m^2\in[0,4)$；即$-2m+3$和m^2都在$f(x)$的递减区间$(-2,+\infty)$上；所以由$f(-2m+3)>f(m^2)$得：$-2m+3<m^2$，解得$m<-3$或$m>1$，又$m\in(-2,2)$，所以$1<m<2$；

所以m的范围是$(1,2)$.

36. 【解析】设$x_1>x_2>0$，则$\frac{x_1}{x_2}>1$，所以$f(\frac{x_1}{x_2})>0$，所以$f(x_1)=f(x_2\cdot\frac{x_1}{x_2})=f(x_2)+f(\frac{x_1}{x_2})>f(x_2)$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

37.【解析】(1) 若函数$f(x)$为偶函数，则$f(-x)=f(x)$对于任意实数恒成立. 即：$x^2+|-x-a|=x^2+|x-a|$，所以$|x+a|=|x-a|$恒成立，即$a=0$.

(2)在$a>\frac{1}{2}$的基础上,讨论$x-a$的符号,①当$x\geq a$时,$f(x)=x^2+x-a$,所以函数$f(x)$的对称轴为$x=\frac{1}{2}$，此时$y_{\min}=f(a)=a^2$. ②当$x<a$时，$f(x)=x^2+x-a$，所以函数$f(x)$的对称轴为$x=\frac{1}{2}$，此时$y_{\min}=f(\frac{1}{2})=a-\frac{1}{4}$. 又由于$a>\frac{1}{2}$时，$a^2>a-\frac{1}{4}$，所以函数$f(x)$的最小值为$y_{\min}=a-\frac{1}{4}$.

达标训练（适合高一）

1. B【解析】法一：根据题意，设$F(x)=f(x)-\frac{3}{2}=\frac{1}{2^x+1}+2x+1-\frac{3}{2}=\frac{1-2^x}{2(2^x+1)}+2x$，则$F(0)=f(0)-\frac{3}{2}=0$，又由$F(-x)=\frac{1-2^{-x}}{2(2^{-x}+1)}+2(-x)=-(\frac{1-2^x}{2(2^x+1)}+2x)=-F(x)$，即函数$F(x)$为奇函数；又由$F'(x)=\frac{-2^x\ln 2}{(2^x+1)^2}+2=\frac{-2^x\ln 2+2(2^x+1)^2}{(2^x+1)^2}=\frac{2^x(4-\ln 2)+2(2^x)^2+2}{(2^x+1)^2}>0$，所以函数$F(x)$单调递增，若$f(a^2)+f(2a)>3$，则$f(a^2)-\frac{3}{2}>\frac{3}{2}-f(2a)$，$f(a^2)-\frac{3}{2}>-[f(2a)-\frac{3}{2}]$，$F(a^2)>-F(2a)$，$F(a^2)>F(-2a)$，所以$a^2>-2a$，解得，$a<-2$或$a>0$，故选$B$.

法二：由于$f(x)=2x+\frac{1}{2^x+1}+1$，可以构造成一个奇函数$g(x)=2x+\frac{2^x-1}{2^x+1}$和一个常数$m$的和，且$g(x)\uparrow$，故$f(x)+f(-x)=2f(0)=2m=3$，根据题意，$f(a^2)+f(2a)>3$即$a^2+2a>0$，$a<-2$或$a>0$，故选$B$.

2. D【解析】设$x<0$，则$-x\geq 0$，因为当$x\geq 0$时，$f(x)=x(1+\sqrt[3]{x})$，所以$f(-x)=-x(1+\sqrt[3]{-x})=-x(1-\sqrt[3]{x})$，又由函数$y=f(x)$是定义在$R$上的奇函数，则$f(x)=-f(-x)$，即$f(x)=x(1-\sqrt[3]{x})$. 故选$D$.

3. D【解析】因为$f(x)$为奇函数，且在$(0,+\infty)$上是增函数，$f(3)=0$，所以$f(3)=-f(-3)=0$，在$(-\infty,0)$内是增函数所以$xf(x)<0$则$\begin{cases}x>0\\f(x)<0=f(3)\end{cases}$或$\begin{cases}x<0\\f(x)>0=f(-3)\end{cases}$，根据在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$内是都是增函数解得：$x\in(-3,0)\cup(0,3)$，故选C.

4. B【解析】构造函数$g(x)=x\ln(e^{2x}+1)-x^2$，则$g(-x)+g(x)=-x\ln(e^{-2x}+1)-x^2+x\ln(e^{2x}+1)-x^2$
$=x\ln\frac{e^{2x}+1}{e^{-2x}+1}-2x^2=x\ln e^{2x}-2x^2=0$，故函数$g(x)$为奇函数，又$f(a)=g(a)+1=2$，所以$g(a)=1$，即$f(-a)=g(-a)+1=-g(a)+1=0$，故选B.

5. C【解析】因为函数$f(x)$是偶函数，所以$f(x)=f(-x)=f(|x|)$，即$f(\sqrt{x+2})<f(|x|)$，因为函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$单调递增，所以$\sqrt{x+2}<|x|$，解得：$x\in[-2,-1)\cup(2,+\infty)$，故选C.

6. D【解析】由题意可得$|ax+1|\leq|x-2|$对$x\in[\frac{1}{2},1]$恒成立，得$x-2\leq ax+1\leq 2-x$对$x\in[\frac{1}{2},1]$恒成立，从

而$a\ge\dfrac{x-3}{x}$且$a\le\dfrac{1-x}{x}$对$x\in[\dfrac{1}{2},1]$恒成立，所以$a\ge -2$且$a\le 0$，即$a\in[-2,0]$，故选D.

7. B 【解析】因为$f(x)=|x-1|+|x+1|$，所以$f(-x)=f(x)$即函数$f(x)$为偶函数，图象关于y轴对称．故选B.

8. C 【解析】因为$y=2^{1-x}=(\dfrac{1}{2})^{x-1}$可看做由$y=(\dfrac{1}{2})^x$的图象右移1个单位，而$y=2^{x+1}$的图象可看做由$y=2^x$的图象向左平移1个单位，且$y=2^x$与$y=(\dfrac{1}{2})^x$的图象关于$y$轴对称，故数$y=2^{x+1}$与$y=2^{1-x}$的图象关于$y$轴对称．故选C.

9. D【解析】函数$y=f(a+x)$与函数$y=f(a-x)$的图象关于直线$x=0$对称，证明如下：在函数$y=f(a+x)$里任取$P(x,y)$，其关于$x=0$对称点(m,n)，则$\begin{cases}m=-x\\ y=n\end{cases}$，因为$y=f(a+x)$，所以$n=f(a-m)$满足$y=f(a-x)$，即$(m,n)$在$y=f(a-x)$上，故选D.

10. B 【解析】$f(x)=x\cdot\ln(ax+\sqrt{1+9x^2})$的图象关于$y$轴对称，即为偶函数，则$f(-x)=f(x)$恒成立，$(-x)\cdot\ln(-ax+\sqrt{1+9x^2})=x\cdot\ln(ax+\sqrt{1+9x^2})$，所以$\ln(-ax+\sqrt{1+9x^2})+\ln(ax+\sqrt{1+9x^2})=0$，即$(ax+\sqrt{1+9x^2})(-ax+\sqrt{1+9x^2})=1$，整理可得，$a^2=9$，即$a=\pm 3$，故选B.

11. C 【解析】根据题意，有$x\in R$，其定义域关于原点对称，

$$\frac{f(-x)}{f(x)}=\frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x-1}{\sqrt{1+x^2}-x+1}}{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}}=\frac{[\sqrt{1+x^2}-(x+1)][\sqrt{1+x^2}+(x+1)]}{[\sqrt{1+x^2}-(x-1)][\sqrt{1+x^2}+(x-1)]}=\frac{1+x^2-(x^2+2x+1)}{1+x^2-(x^2-2x+1)}=-1$$

所以$f(-x)=-f(x)$，即$f(x)$是奇函数，其图象关于原点对称，故选C.

12. C 【解析】$f(x)=\dfrac{1}{x}(\log_2 4^x+1)-2=\dfrac{1}{x}(2x+1)-2=\dfrac{1}{x}$，则函数$f(x)$是奇函数，图象关于原点对称，故选C.

13. B 【解析】由题意，$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}\cdot\tan x$，所以$f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}\cdot\tan(-x)=f(x)$，即函数$f(x)$是偶函数，图象关于$y$轴对称，故选B.

14. B 【解析】函数的定义域$\{x|x\ne 0\}$，因为$f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{x}$，所以$f(-x)=\dfrac{2^{-x}-2^x}{-x}=\dfrac{2^x-2^{-x}}{x}=f(x)$则函数$f(x)$为偶函数，图象关于$y$轴对称，故选B.

15. A【解析】根据题意，函数$f(x)=\dfrac{te^x-t-2}{e^x-1}+x^3=t-\dfrac{2}{e^x-1}+x^3$，则$f(-x)=t-\dfrac{2}{e^{-x}-1}+(-x)^3=t+\dfrac{2e^x}{e^x-1}-x^3$，若$f(x)$为奇函数，则$f(-x)+f(x)=2t-(\dfrac{2}{e^x-1}-\dfrac{2e^x}{e^x-1})=2t+2=0$，解可得$t=-1$；故选A.

16. C【解析】因为定义在R上的奇函数$f(x)$和偶函数$g(x)$满足$f(x)+g(x)=a^x$，所以$f(1)+g(1)=a$，①$f(-1)+g(-1)=\dfrac{1}{a}$，即$f(1)-g(1)=-\dfrac{1}{a}$②，①×②可得，$f^2(1)-g^2(1)=-1$．故选C.

17. C【解析】因为函数$f(x+1)$的图象关于y轴对称，所以函数$f(x)$的图象关于$x=1$对称，则$f(x)=f(2-x)$，又函数$f(x)$为奇函数，所以函数$f(x)$的最小正周期为4，设$x\in[-1,0]$，则$-x\in[0,1]$，故$f(-x)=-(-x)^2=-x^2$，此时$f(x)=x^2$，设$x\in[2,3]$，则$(2-x)\in[-1,0]$，故$f(2-x)=(2-x)^2$，此时

$f(x)=(x-2)^2$，$x\in[2,3]$，故选 C.

18. C 【解析】因为 $f(x)=e^x-e^{-x}$ 为奇函数，又 $f(2a+5)+f(4-b)=0$，所以 $f(2a+5)=f(b-4)$，则 $2a+5=b-4$ 即 $2a-b=-9$，故选 C.

19. C 【解析】令 $F(x)=f(x)-1=ax|x|+b\sin x$，则 $F(-x)=-ax|x|-b\sin x=-F(x)$，所以 $F(x)$ 为奇函数，则 $F(3)+F(-3)=0$，即 $f(3)-1+f(-3)-1=0$，解得 $f(-3)=0$．故选 C.

20. D 【解析】根据题意，函数 $f(x)=\log_3(3^x+1)+mx$ 是偶函数，则有 $f(-x)=f(x)$，即

$\log_3(3^{-x}+1)-mx=\log_3(3^x+1)+mx$，变形可得：$2mx=\log_3(3^{-x}+1)-\log_3(3^x+1)=-x$，则必有 $m=-\dfrac{1}{2}$，

则 $f(x)=\log_3(3^x+1)-\dfrac{1}{2}x$，其导数 $f'(x)=\dfrac{(3^x-1)}{2(3^x+1)}$，在 $(0,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，则 $f(2x+3)<f(2m)\Rightarrow f(2x+3)<f(-1)\Rightarrow f(|2x+3|)<f(1)\Rightarrow|2x+3|<1$，解可得：$-2<x<-1$，即 x 的取值范围为 $(-2,-1)$；故选 D.

21. D【解析】根据题意，$f(x)=\ln(\sqrt{9x^2+1}-3x)-1$，则 $f(-x)=\ln(\sqrt{9x^2+1}+3x)-1$，则有 $f(x)+f(-x)=-2$，

则 $f(\lg\dfrac{1}{2})+f(\lg 2)=f(-\lg 2)+f(\lg 2)=-2$；故选 D.

22. C【解析】令 $g(x)=f(x)+f(-x)$，则 $g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x)$，故 $g(x)$ 为偶函数，$F(x)=f(x)-f(-x)$，则 $F(-x)=f(-x)-f(x)=-F(x)$，即 $F(x)$ 为奇函数，例如 $f(x)=x+1$，则 $f^2(x)=(x+1)^2$，$f^2(-x)=(1-x)^2$，故 $f^2(x)=f^2(-x)$ 不成立，$h(x)=xf(x^2)$，则 $h(-x)=-xf(x^2)=-h(x)$，即 $h(x)$ 为奇函数，故选 C.

23. A 【解析】由 $f(x)=\dfrac{8\times 4^x-a}{2^x}(a\in R)$ 是奇函数，可得 $f(0)=0$，所以 $8-a=0$，解得 $a=8$，因为

$g(x)=\ln(e^x+1)-bx(b\in R)$ 是偶函数，则 $g(-x)=\ln(e^{-x}+1)+bx=\ln(e^x+1)-bx$，所以 $\ln\dfrac{e^{-x}+1}{e^x+1}=-2bx$，

则 $\ln e^{-x}=-2bx$，即 $-x=-2bx$，所以 $b=\dfrac{1}{2}$，则 $\log_b a=log_{\frac{1}{2}}8=-3$．故选 A.

24. A 【解析】根据题意，函数 $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}+\ln\dfrac{2019+x}{2019-x}-1$，设 $h(x)=f(x)+1=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}+\ln\dfrac{2019+x}{2019-x}$，则

$h(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}+\ln\dfrac{2019-x}{2019+x}=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}-\ln\dfrac{2019+x}{2019-x}=-h(x)$，则 $h(x)$ 是奇函数，

$g(1)=f(\log_2 25)+f(\log_{\sqrt{2}}\dfrac{1}{5})=f(2\log_2 5)+f(-2\log_2 5)=h(2\log_2 5)-1+h(-2\log_2 5)-1=-2$，又 $g(x)$ 是奇函数，则 $g(-1)=-g(1)=2$．故选 A.

25. C 【解析】$f(x)=g(x)+h(x)=e^x$，①则 $f(-x)=g(-x)+h(-x)=e^{-x}$，因为 $g(x)$ 是奇函数，$h(x)$ 是偶函数，所以 $f(-x)=-g(x)+h(x)=e^{-x}$，②，由①②得 $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$h(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，故选 C.

26. D 【解析】根据题意，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=\ln(2x+2)-2^x$，则 $f(1)=\ln(2+2)-2=\ln 4-2$，又由 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(-1)=-f(1)=-\ln 4+2$；故选 D.

27. D 【解析】根据题意，函数 $f(x)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ 是定义在 R 上的偶函数，且

$3\log_{\frac{1}{8}}a=\log_{\frac{1}{2}}a=-\log_2 a$，则 $f(3\log_{\frac{1}{8}}a)=f(-\log_2 a)=f(\log_2 a)$，则

$f(\log_2 a)+f(3\log_{\frac{1}{8}}a)=2f(\log_2 a)=2f(|\log_2 a|)$，$f(\log_2 a)+f(3\log_{\frac{1}{8}}a)\ge 2f(-1)\Rightarrow 2f(|\log_2 a|)\ge 2f(1)$，

又由 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递减，则有 $|\log_2 a|\le 1$，即 $-1\le\log_2 a\le 1$，解可得 $\frac{1}{2}\le a\le 2$，即 a 的取值范围是 $[\frac{1}{2},2]$；故选 D.

28. B 【解析】根据题意，$f(\log_4 x)+f(\log_{0.25}x)\le 2f(1)\Leftrightarrow f(\log_4 x)+f(-\log_4 x)\le 2f(1)$，又由函数 $f(x)$ 为 R 上的偶函数，则有 $f(\log_4 x)=f(\log_4 x)=f(|\log_4 x|)$，则原不等式可以转化为 $f(|\log_4 x|)\le f(1)$，又由函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，则 $f(|\log_4 x|)\le f(1)\Rightarrow|\log_4 x|\le 1$，即 $-1\le\log_4 x\le 1$，解可得 $\frac{1}{4}\le x\le 4$，即不等式的解集为 $[\frac{1}{4},4]$，故选 B.

29．【解析】因为函数 $f(x)=\frac{a-2^x}{1+a\cdot 2^x}(a\in R)$ 是定义域上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，即 $\frac{a-2^{-x}}{1+a\cdot 2^{-x}}=-\frac{a-2^x}{1+a\cdot 2^x}$，则 $(1-a^2)2^{2x}=a^2-1$，所以 $a^2-1=0$，解得 $a=\pm 1$，故答案为 ± 1.

30.【解析】因为函数 $f(x)=ax^2+bx+3a+b$ 是定义在 $[a-1,2a]$ 的偶函数，所以 $a-1+2a=0$，解得 $a=\frac{1}{3}$，由 $f(x)=f(-x)$ 得，$b=0$，即 $a+b=\frac{1}{3}$．故答案为 $\frac{1}{3}$

31.【解析】由题意可知，$k>0$，函数 $f(x)=2^x+k\cdot 2^{-x}$ 的图象都关于直线 $x=m$ 成轴对称图形，则 $f(m+x)$ 为偶函数，关于 y 轴对称，故 $f(m-x)=f(m+x)$ 恒成立，所以 $2^{m-x}+k\cdot 2^{-(m-x)}=2^{m+x}+k\cdot 2^{-(m+x)}$，因为对于任意 $x\in R$ 成立，故 $2^m-k\cdot 2^{-m}=0$，所以 $m=\frac{1}{2}\log_2 k$，故答案为 $\frac{1}{2}\log_2 k$

32.【解析】对于函数 $f(x)=\frac{4}{3^{x-1}-3}$，令 $3^{x-1}-3=0$，求得 $x=2$．又当 $x=1$ 时，$f(1)=-2=-2$；当 $x=3$ 时，$f(3)=\frac{2}{3}$；则 $\frac{-2+\frac{2}{3}}{2}=-\frac{2}{3}$，可得它的对称中心为 $P(2,-\frac{2}{3})$，故答案为 $(2,-\frac{2}{3})$．

33．【解析】根据题意，函数 $f(x)=\frac{1-9^x}{3^x}-x=3^{-x}-3^x-x$，函数 $f(x)$ 为 R 上的减函数，又由 $f(-x)=3^x-3^{-x}-(-x)=-(3^{-x}-3^x-x)=-f(x)$，则函数 $f(x)$ 为奇函数，

$f(12-x^2)+f(2-5x)<0\Rightarrow f(12-x^2)<-f(2-5x)\Rightarrow f(12-x^2)<f(5x-2)\Rightarrow 12-x^2>5x-2$，

即 $x^2+5x-14<0$，解可得：$-7<x<2$，即不等式的解集为 $(-7,2)$；故答案为 $(-7,2)$．

34.【解析】因为 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(0)=0$，即 $0\ge a+2$，得 $a\le -2$；当 $x>0$ 时，$-x<0$，所以 $f(x)=-f(x)=-16(-x)-\frac{a^2}{-x}-5=16x+\frac{a^2}{x}-5\ge a+2$ 恒成立，因为 $16x+\frac{a^2}{x}-5\ge 2\sqrt{16\cdot\frac{a^2}{x}}-5=8|a|-5$，（当且仅当 $x=\frac{|a|}{4}$ 时取等），$8|a|-5\ge a+2$，解得 $a\le -\frac{7}{9}$，综上所述；a 的取值范围是：$(-\infty,-2]$，故答案为 $(-\infty,-2]$

35.【解析】（1）$x<0$ 时，$-x>0$，因为 $x\ge 0$ 时 $f(x)=\ln(x^2-2x+2)$，所以 $f(-x)=\ln(x^2+2x+2)$，因为

$y=f(x)$ 是偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$， $x<0$ 时， $f(x)=\ln(x^2+2x+2)$

（2）由（1）知 $x<0$ 时， $f(x)=\ln(x^2+2x+2)$，根据复合函数的单调性可得函数的单调增区间 $(-1,0)$

$x\geq 0$ 时 $f(x)=\ln(x^2-2x+2)$，根据复合函数的单调性可得函数的单调增区间 $(1,+\infty)$，所以函数的单调增区间为：$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

36．【解析】（1）由题意， $\log_2(m+\frac{n}{1-x})=-\log_2(m+\frac{n}{x+1})$，得 $(m+\frac{n}{1-x})(m+\frac{n}{1+x})=1$，即

$(1-m^2)x^2+(m+n)^2-1=0$ 恒成立．所以 $\begin{cases}1-m^2=0\\m<0\\(m+n)^2-1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=-1\\n=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-1\\n=2\end{cases}$．当 $m=-1$，$n=0$ 时

不合题意，故 $m=-1$，$n=2$；

（2）由（1）知，$f(x)=\log_2(-1+\frac{2}{x+1})=\log_2\frac{1-x}{1+x}$．由 $f(x)\geq 1$，得 $\log_2\frac{1-x}{1+x}\geq 1$，所以 $\frac{1-x}{1+x}\geqslant 2$，解得

$-1<x\leq -\frac{1}{3}$．即不等式 $f(x)\geq 1$ 成立的 x 的取值范围是 $(-1,-\frac{1}{3}]$．

37.【解析】(1) 因为函数 $f(x)=\log_9(3^x+1)+kx\ (k\in R)$ 为偶函数．所以 $f(x)=f(-x)$，

$\log_9(3^x+1)+kx=\log_9(3^{-x}+1)+k(-x)$，$\log_9(3^x+1)-\log_9(3^{-x}+1)=-2kx$，$\log_9\frac{3^x+1}{3^{-x}+1}=-2kx$，

$\log_9\frac{3^x(3^x+1)}{1+3^x}=-2kx$，$\log_9 3^x=-2kx$，$x\log_9 3=-2kx$，$\log_9 3=-2k$，$k=-\frac{1}{2}\log_9 3=-\frac{1}{2}\frac{\log_3 3}{\log_3 9}=-\frac{1}{4}$．

（2）由（1）知函数 $f(x)=\log_9(3^x+1)-\frac{1}{4}x$，函数 $g(x)=9^{f(x)+\frac{x}{4}}+m\cdot 9^x-1=9\log_9(3^x+1)+m\cdot 9^x-1$

$=3^x+1+m\cdot 9^x-1=m\cdot 9^x+3^x=m\cdot(3^x)^2+3^x$，$x\in[0,1]$，令 $t=3^x$，因为 $x\in[0,1]$，所以 $t\in[1,3]$，

$y=m\cdot t^2+t$，当 $m=0$ 时，$y=t$ 在 $[1,3]$ 上是增函数，$y_{\min}=1$ 不合题意，当 $m>0$ 时，对称轴 $x=-\frac{1}{2m}<0$，

$y=m\cdot t^2+t$ 在 $[1,3]$ 上是增函数 $y_{\min}=m+1=0$，$m=-1$ 矛盾，当 $m<0$ 时，对称轴 $x=-\frac{1}{2m}<0$，

$y=m\cdot t^2+t$，若 $3\leq -\frac{1}{2m}$ 时，即 $0>m\geq -\frac{1}{6}$，在 $[1,3]$ 上是增函数 $y_{\min}=m+1=0$，$m=-1$，矛盾，若

$1\geq -\frac{1}{2m}$ 时，即 $m\leq -\frac{1}{2}$，在 $[1,3]$ 上是减函数，$y_{\min}=9m+3=0$，$m=-\frac{1}{3}$ 矛盾，若 $1<-\frac{1}{2m}<3$ 时，即

$-\frac{1}{2}<m<-\frac{1}{6}$，若 $-\frac{1}{2m}>2$，即 $-\frac{1}{6}>m>-\frac{1}{4}$，$y_{\min}=m+1=0$，$m=-1$ 矛盾，若 $1<-\frac{1}{2m}<3$ 时，即

$-\frac{1}{2}<m<-\frac{1}{6}$，若 $-\frac{1}{2m}<2$，即 $-\frac{1}{4}>m>-\frac{1}{2}$，$y_{\min}=9m+3=0$，$m=-\frac{1}{3}$，综上所述，$m$ 的值为 $-\frac{1}{3}$．

38.【解析】(1) 因为函数 $f(x)=1-\frac{a\cdot 5^x}{5^x+1}$，$x\in(b-3,2b)$ 是奇函数，所以 $f(0)=1-\frac{a}{2}=0$，且 $b-3+2b=0$，

$a=2$，$b=1$．

(2)因为 $f(m-1)+f(2m+1)>0$，所以 $f(m-1)>-f(2m+1)$．又由 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(m-1)>f(-2m-1)$，

因为 $f(x)$ 是区间 $(-2,2)$ 上的减函数，所以 $\begin{cases}m-1<-2-1\\-2<m-1<2\\-2<2m+1<2\end{cases}$，即有 $\begin{cases}m<0\\-1<m<3\\-\frac{3}{2}<m<\frac{1}{2}\end{cases}$，解得 $-1<m<0$，则实

数 m 的取值范围是 $(-1,0)$．

39．【解析】（1）函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$ 是定义域 $(-2,2)$ 上的奇函数，理由如下，任取 $x\in(-2,2)$，有 $f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+4}=-\dfrac{x}{x^2+4}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是定义域 $(-2,2)$ 上的奇函数；

（2）证明：设 x_1，x_2 为区间 $(-2,2)$ 上的任意两个值，且 $x_1<x_2$，则

$f(x_1)-f(x_2)=(\dfrac{x_1}{{x_1}^2+4})-(\dfrac{x_2}{{x_2}^2+4})=\dfrac{(x_2-x_1)(x_1x_2-4)}{({x_1}^2+4)({x_2}^2+4)}$；因为 $-2<x_1<x_2<2$，所以 $x_2-x_1>0$，$x_1x_2-4<0$，即 $f(x_1)-f(x_2)<0$；所以函数 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上是增函数；

（3）因为 $f(x)$ 为奇函数，所以由 $f(2+a)+f(1-2a)>0$，得 $f(2+a)>-f(1-2a)=f(2a-1)$，又因为函数 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上是增函数，所以 $\begin{cases}-2<2+a<2\\-2<2a-1<2\\2+a>2a-1\end{cases}$；解得 $\begin{cases}-4<a<0\\-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}\\a<3\end{cases}$，即实数 a 的取值范围是 $(-\dfrac{1}{2},0)$．

40．【解析】（1）因为 $f(x)=ka^x-a^{-x}(a>0$ 且 $a\neq 0)$ 是奇函数．所以 $f(0)=0$，即 $k-1=0$，解得 $k=1$．

（2）因为 $f(x)=a^x-a^{-x}(a>0$ 且 $a\neq 1)$，当 $a>1$ 时 $f(x)$ $f(x)$ 在 R 上递增．

理由如下：设 $m<n$，则 $f(m)-f(m)=a^m-a^{-m}-(a^n-a^{-n})=(a^m-a^n)+(a^{-n}-a^{-m})=(a^m-a^n)(1+\dfrac{1}{a^ma^n})$，由于 $m<n$，则 $0<a^m<a^n$，即 $a^m-a^n<0$，$f(m)-f(n)<0$，即 $f(m)<f(n)$，则当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 R 上递增．

（3 因为 $f(1)=\dfrac{8}{3}$，所以 $a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{8}{3}$，即 $3a^2-8a-3=0$，解得 $a=3$ 或 $a=-\dfrac{1}{3}$（舍去）．

所以 $g(x)=3^{2x}+3^{-2x}-2m(3^x-3^{-x})=(3^x-3^{-x})^2-2m(3^x-3^{-x})+2$，令 $t=3^x-3^{-x}$ 因为 $x\geq 1$，所以 $t\geq f(1)=\dfrac{8}{3}$，

即 $(3^x-3^{-x})^2-2m(3^x-3^{-x})+2=(t-m)^2+2-m^2$，当 $m\geq\dfrac{8}{3}$ 时，$2-m^2=-2$，解得 $m=2$，不成立舍去．当 $m<\dfrac{8}{3}$ 时，$(\dfrac{8}{3})^2-2m\times\dfrac{8}{3}+2=-2$，解得 $m=\dfrac{25}{12}$，满足条件，所以 $m=\dfrac{25}{12}$．

41．【解析】$f(x)$ 为“局部奇函数”等价于关于 x 的方程 $f(-x)=-f(x)$ 有解．

（1）当 $f(x)=ax^2+2x-4a(a\in R)$ 时，方程 $f(-x)=-f(x)$ 即 $2a(x^2-4)=0$，$2a(x^2-4)=0$ 有解 $x=\pm 2$，所以 $f(x)$ 为“局部奇函数”．

（2）当 $f(x)=2^x+m$ 时，$f(-x)=-f(x)$ 可化为 $2^x+2^{-x}+2m=0$，因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，所以方程 $2^x+2^{-x}+2m=0$ 在 $[-1,1]$ 上有解．令 $t=2^x\in[\dfrac{1}{2},2]$，则 $-2m=t+\dfrac{1}{t}$．设 $g(t)=t+\dfrac{1}{t}$，则 $g'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t^2-1}{t^2}$，当 $t\in(0,1)$ 时，$g'(t)<0$，故 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数，当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$g'(t)>0$，故 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数．所以 $t\in(\dfrac{1}{2},2)$ 时，$g(t)\in[2,\dfrac{5}{2}]$．所以 $-2m\in[2,\dfrac{5}{2}]$，即 $m\in[-\dfrac{5}{4},-1]$．

（3）当 $f(x)=4^x-m2^{x+1}+m^2-3$ 时，$f(-x)=-f(x)$ 可化为 $4^x+4^{-x}-2m(2^x+2^{-x})+2m^2-6=0$．

$t=2^x+2^{-x}\geq 2$，则 $4^x+4^{-x}=t^2-2$，从而 $t^2-2mt+2m^2-8=0$ 在 $[2,+\infty)$ 有解即可保证 $f(x)$ 为“局部奇函数”．令 $f(t)=t^2-2mt+2m^2-8$，1° 当 $f(2)\leq 0$，$t^2-2mt+2m^2-8=0$ 在 $[2,+\infty)$ 有解，由当 $f(2)\leq 0$，即

$2m^2-4m-4\le 2m^2-4m-4\le 0$，解得 $1-\sqrt{3}\le m\le 1+\sqrt{3}$；2° 当 $f(2)>0$ 时，$t^2-2mt+2m^2-8=0$ 在 $[2,+\infty)$ 有解等价于 $\begin{cases}\Delta=4m^2-4(2m^2-8)\ge 0\\ m>2\\ f(2)>0\end{cases}$ 解得 $1+\sqrt{3}\le m\le 2\sqrt{2}$．综上，所求实数 m 的取值范围为 $1+\sqrt{3}\le m\le 2\sqrt{2}$

达标训练（适合高三复习）

1．D【解析】$f(x)=\dfrac{2\sin(x+\dfrac{\pi}{2})+x^2-x}{x}=\dfrac{2\cos x+x^2-x}{x}=\dfrac{2\cos x+x^2}{x}-1$，设 $g(x)=\dfrac{2\cos x+x^2}{x}$，则 $g(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 关于 $(0,0)$ 对称，则 $f(x)=g(x)-1$，则 $f(x)$ 关于 $(0,-1)$ 对称，故选 D.

2．A 因为当 $x>2$ 时，$f(x)$ 单调递增；所以当 $x<2$ 时单调递增；又由 $(x_1-2)\cdot(x_2-2)<0$，不妨设 $x_1>2$，$x_2<2$；则由 $x_1+x_2>4$ 得，$x_1-2>2-x_2$，即 $|x_1-2|>|2-x_2|$；又 $f(x_1)>0$，$f(x_2)<0$；所以结合函数对称性可知 $f(x_1)+f(x_2)>0$．故选 A.

3．D【解析】根据题意，$f(x)=e^x+e^{-x}$，其定义域为 R，且 $f(-x)=e^{-x}+e^x=e^x+e^{-x}=f(x)$，即函数为偶函数，则有；又由 $f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})$ $f'(x)=e^x-e^{-x}$，在区间 $(0,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，即函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，又由 $\sqrt{2}<\sqrt{5}<e$，则 $f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})<f(\sqrt{5})<f(e)$；故选 D.

4．C【解析】因为 $f(x)=e^{|x|}-e^{-|x|}$，则 $f(-x)=f(x)$，即 $f(x)$ 为偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=e^x-e^{-x}$ 单调递增，故选 C.

5．C【解析】函数 $f(x)$ 可变形为 $f(x)=1+\dfrac{-\sin x}{|x|+1}$，令 $g(x)=\dfrac{-\sin x}{|x|+1}$，则 $g(-x)=\dfrac{-\sin x}{|x|+1}=-g(x)$，

所以 $g(x)$ 为奇函数，当 $x=a$ 时，$g(x)$ 有最大值 $g(a)$，当 $x=-a$ 时，$g(x)$ 有最小值 $g(-a)=-g(a)$，又由 $f(x)=1+g(x)$，所以当 $x=a$ 时，$f(x)$ 有最大值 $g(a)+1$，则当 $x=-a$ 时，$f(x)$ 有最小值 $-g(a)+1$，$M=g(a)+1$，$m=-g(a)+1$，即 $M+m=2$，故选 C.

6．A【解析】当 $x\ge 0$ 时，$f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x+x^2=x^2-x\sin x=x(x-\sin x)>0$，即函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$，上为增函数，所以 $f(\log_2 m)+f(\log_{\frac{1}{2}} m)<2f(1)$ 等价为 $f(\log_2 m)+f(-\log_2 m)<2f(1)$，即 $f(\log_2 m)<f(1)$，则 $-1<\log_2 m<1$，解得 $\dfrac{1}{2}<m<2$．故选 A.

7．A【解析】由奇函数的对称性可知，$m-5+1-2m=0$，则 $m=-4$，因为 $x>0$ 时，$f(x)=2^x-1$，则 $f(m)=f(-4)=-f(4)=-15$．故选 A.

8．A【解析】因为 $f(x)=\dfrac{a^2-a\sin x+1}{a^2-a\cos x+1}=\dfrac{a^2+1-a\sin x}{a^2+1-a\cos x}$，所以 $f(x)$ 表示点 (a^2+1,a^2+1) 与圆 $x^2+y^2=a^2$ 上点连线的斜率，则斜率最大与最小的临界值是直线与圆相切的时候，即 $\Delta=0$，联立

$\begin{cases}y=k(x-a^2-1)+a^2+1\\ x^2+y^2=a^2\end{cases}$，消去 x 整理得：$(1+k^2)x^2+2k(1-k)(a^2+1)x+(1-k)^2(a^2+1)^2-a^2=0$，

令 $\Delta=0$，即 $[2k(1-k)(a^2+1)]^2-4(1+k^2)[(1-k)^2(a^2+1)^2-a^2]=0$，整理得：

$[(a^2+1)^2-a^2]k^2-2(a^2+1)^2k+(a^2+1)^2-a^2=0$，由韦达定理 $M(a)+\mathrm{m}(a)=\dfrac{2(a^2+1)^2}{(a^2+1)^2-a^2}>\dfrac{2(a^2+1)^2}{(a^2+1)^2}=2$，

所以存在实数 a，使 $M(a)+\mathrm{m}(a)=2.5$ 正确；存在实数 a，使 $M(a)+\mathrm{m}(a)=-2.5$ 错误；对任意实数 a，

有 $M(a)+\mathrm{m}(a)\geq 3$ 错误；对任意实数 a，有 $M(a)+\mathrm{m}(a)=2$ 错误．故选 A.

9．B【解析】因为 $f(x)=\dfrac{2^x}{2^x-1}$，所以 $f(-x)+f(x)=\dfrac{2^{-x}}{2^{-x}-1}+\dfrac{2^x}{2^x-1}=\dfrac{1}{1-2^x}+\dfrac{2^x}{2^x-1}=1$，又由 $f(-m)=2$，则 $f(m)=-1$．故选 B.

10．C【解析】展开 $f(x)$ 得 $f(x)=\sin x+\dfrac{2x}{x^2+1}+1$，令 $h(x)=\sin x+\dfrac{2x}{x^2+1}$，则 $h(x)$ 为一个奇函数，由于 $h(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上最大值和最小值之和为 0，所以 $f(x)$ 的最大值和最小值之和为 2．故选 C.

11．A【解析】函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(0)=0$，即 $f(0)=\dfrac{1-m}{1+1}+0=0$，得 $1-m=0$，得 $m=1$，

即 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}+\tan x+x=1-\dfrac{2}{2^x+1}+\tan x+x$ 为 $[-1,1]$ 上的增函数，则不等式 $f(2x-1)<f(x-m+1)$ 等价为 $f(2x-1)<f(x)$，即 $\begin{cases}-1\leq 2x-1\leq 1\\-1\leq x\leq 1\\2x-1<x\end{cases}$，得 $\begin{cases}0\leq x\leq 1\\-1\leq x\leq 1\\x<1\end{cases}$ 得 $0\leq x<1$，即实数 x 的取值范围是 $[0,1)$，故选 A.

12．A【解析】$f(x)$ 是 R 上的偶函数，且 $x\geq 0$ 时，$f(x)=e^x+\cos x$，$f'(x)=e^x-\sin x\geq 0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，即由 $f(2x-1)\geq f(x)$ 得 $f(|2x-1|)\geq f(|x|)$，$|2x-1|\geq|x|$，则 $(2x-1)^2\geq x^2$，解得 $x\leq\dfrac{1}{3}$ 或 $x\geq 1$，

所以实数 x 的取值范围为 $(-\infty,\dfrac{1}{3}]\cup[1,+\infty)$．故选 A.

13．B【解析】函数 $f(-x)=(-x)^2+2\cos(-x)=x^2+2\cos x=f(x)$，则函数 $f(x)$ 是偶函数，函数的导数 $f'(x)=2x-2\sin x=2(x-\sin x)$，$[f'(x)]'=2-2\cos x\geq 0$，即 $f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 是为增函数，则当 $0\leq x\leq 1$ 时，$f'(x)\geq f'(0)=0$，即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上为增函数，则不等式 $f(x-1)>f(2x)$ 等价为 $f(|x-1|)>f(|2x|)$，得

$\begin{cases}-1\leq x-1\leq 1\\-1\leq 2x\leq 1\\|x-1|>|2x|\end{cases}$ 得 $\begin{cases}0\leq x\leq 2\\-\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{1}{2}\\x^2-2x+1>4x^2\end{cases}$，得 $\begin{cases}0\leq x\leq 2\\-\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{1}{2}\\3x^2+2x-1<0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}0\leq x\leq 2\\-\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{1}{2}\\-1<x<\dfrac{1}{3}\end{cases}$，得 $0\leq x<\dfrac{1}{3}$，即不等式的解集为

$[0,\dfrac{1}{3})$，故选 B.

14．C【解析】根据题意，$f(x)=e^{x-2}+e^{2-x}$，设 $t=x-2$，则 $y=e^t+e^{-t}$，设 $g(t)=e^t+e^{-t}$，有 $g(-t)=e^t+e^{-t}=e^t+e^{-t}=g(t)$，则 $y=e^t+e^{-t}$ 为偶函数，当 $t>0$ 时，$e^t>1$，函数 $y=e^t+e^{-t}$ 在 $(0,+\infty)$ 上增函数，若实数 x_1、x_2 满足 $x_1<x_2$，$x_1+x_2<4$ 且 $(x_1\text{-}2)(x_2\text{-}2)<0$，即 $(x_1\text{-}2)(x_2\text{-}2)<0$，且 $(x_1\text{-}2)+(x_2\text{-}2)<0$，则有 $(x_1\text{-}2)<0<(x_2\text{-}2)$，且 $|x_1-2|>|x_2-2|$，即 $|t_1|>|t_2|$，则有 $g(t_1)>g(t_2)$，即 $f(x_1)>f(x_2)$；故选 C.

15．C【解析】$x\geq -1$ 时，$y=x^2+2x$ 是增函数，$y=-\ln\dfrac{1}{1+e^{|x+1|}}=\ln(1+e^{x+1})$ 是增函数，即 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上是增函数；$x<-1$ 时，$y=x^2+2x$ 是减函数，$y=-\ln\dfrac{1}{1+e^{|x+1|}}=\ln(1+e^{-x-1})$ 是减函数，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上是减函数，又 $f(x)$ 关于 $x=-1$ 对称，所以 $f(-4)=f(2)$，则由 $f(3x-1)>f(2)$ 得，$\begin{cases}3x-1\geq -1\\3x-1>2\end{cases}$ 或

$\begin{cases}3x-1<-1\\3x-1<-4\end{cases}$，解得 $x>1$ 或 $x<-1$，不等式 $f(3x-1)>f(2)$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$．故选 C.

16．B【解析】由题意，$f(-x)+f(x)=\dfrac{1}{2^{-x}+1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^{x}+1}-\dfrac{1}{2}=0$，可得 $f(x)$ 为奇函数，又 $f(x)$ 是 R 上的减函数，故 $f(m^2-2n)+f(n^2-2m)\geq 0\Rightarrow f(m^2-2n)\geq -f(n^2-2m)=f(2m-n^2)$

$\Rightarrow m^2-2n\leq 2m-n^2\Rightarrow (m-1)^2+(n-1)^2\leq 2$，所以满足条件的 (m,n) 表示的区域是圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 的内部（含边界），则点 (m,n) 到直线 $x+7y+4=0$ 的距离 $d=\dfrac{|m+7n+4|}{\sqrt{50}}\in[\dfrac{12}{\sqrt{50}}-\sqrt{2},\dfrac{12}{\sqrt{50}}+\sqrt{2}]$，

则 $\sqrt{50}(\dfrac{12}{\sqrt{50}}-\sqrt{2})\leq|m+7n+4x|\leq\sqrt{50}(\dfrac{12}{\sqrt{50}}+\sqrt{2})$，即 $12-10\leq|m+7n+4x|\leq 12+10$，

即 $2\leq|m+7n+4x|\leq 22$，所以 $|m+7n+4|$ 的取值范围是 $[2,22]$，故选 B.

17．B【解析】$f(x)=\dfrac{2009^{x+1}+3}{2009^{x+1}}=\dfrac{2019(2019^{x}+1)-2016}{2019^{x}+1}=2019-\dfrac{2016}{2019^{x}+1}$，$f(x)$ 在定义域内单调递增，

$f(-x)=2019-\dfrac{2016}{2019^{-x}+1}=2019-\dfrac{2016-2019^{x}}{2019^{x}+1}$，$f(-x)+f(x)=2019\times 2-2016=2022$，

即 $M=f(a)=2019-\dfrac{2016}{2019^{a}+1}$，$N=f(-a)=2019-\dfrac{2016-2019^{a}}{2019^{a}+1}$，$M+N=2019\times 2-2016=2022$，故选 B.

18．B【解析】根据题意，$f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}+ax^2$，则 $f(-x)=-\sin x-\dfrac{1}{\sin x}+ax^2$，则 $f(x)+f(-x)=2ax^2$，

当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $f(\dfrac{\pi}{2})+f(-\dfrac{\pi}{2})=2a(\dfrac{\pi}{2})^2=2\pi$，又由 $f(\dfrac{\pi}{2})=2+\pi$，则 $f(-\dfrac{\pi}{2})=\pi-2$，故选 B.

19．A【解析】函数 $y=\dfrac{x^3+2017x}{x^4+2018}+1=\dfrac{x(x^2+2017)}{x^4+2018}+1$，可设 $g(x)=\dfrac{x(x^2+2017)}{x^4+2018}$，定义域为 R，

可得 $g(-x)+g(x)=-\dfrac{x(x^2+2017)}{x^4+2018}+\dfrac{x(x^2+2017)}{x^4+2018}=0$，即 $g(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 的最大值和最小值之和为 0，可得函数 y 的最值之和为 $M+m=2$．故选 A.

20．A【解析】设 $F(x)=f(x)-4$，因 $F(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\dfrac{1}{x}$ 为奇函数，所以 $F(x)_{\max}+F(x)_{\min}=0$，所以 $[f(x)_{\max}-4]+[f(x)_{\min}-4]=0$，所以 $M+m=8$．故选 A.

21．C【解析】函数 $f(x)=\dfrac{\log_3(3^x+1)}{x}+1(x\in[-2,-1]\cup[1,2])$，可得

$f(x)=\dfrac{\log_3(3^x+1)}{x}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{\log_3(3^x+1)-\log_3 3^{3^{\frac{1}{2}x}}}{x}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{\log_3(3^{\frac{1}{2}x}+3^{-\frac{1}{2}x})}{x}+\dfrac{3}{2}$，由 $g(x)=\dfrac{\log_3(3^{\frac{1}{2}x}+3^{-\frac{1}{2}x})}{x}$，

可得 $g(-x)=\dfrac{\log_3(3^{-\frac{1}{2}x}+3^{\frac{1}{2}x})}{-x}=-g(x)$，即有 $g(x)$ 在 $x\in[-2,-1]\cup[1,2]$ 为奇函数，可得 $g(x)$ 的最小值 s 和最大值 t 互为相反数，则 $M+N=(t+\dfrac{3}{2})+(s+\dfrac{3}{2})=3$．故选 C.

22．A【解析】根据题意，奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(1-x)$，则 $f(x)=f(2-x)$，则 $f(-x)=f(2+x)=-f(x)$，则 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，故函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，则 $f(2018-a)=f(2-a)$，又由 $f(x)=f(2-x)$，则 $f(2018-a)=f(2-a)=f(a)$，当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$，若 $f(x)=1$，即

$\frac{1+x}{1-x}=10$，解可得：$x=\frac{9}{11}$，又由 $f(2018-a)=1$ 且函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，$f(2018-a)=1$，则 a 的值可以为 $\frac{9}{11}$，故选 A.

23. D 【解析】根据题意，函数 $f(x)=\frac{e^x-a}{e^x+a}(a>0)$ 为奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，即 $\frac{e^{-x}-a}{e^{-x}+a}=-\frac{e^x-a}{e^x+a}$，变形可得 $a=1$，则 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1}$，易得 $f(x)$ 在 R 上为增函数 $f(x+a)+f(2x)>0\Rightarrow f(x+1)>-f(2x)$ $\Rightarrow f(x+1)>f(-2x)\Rightarrow x+1>-2x$，解可得：$x>-\frac{1}{3}$，即不等式的解集为 $(-\frac{1}{3},+\infty)$；故选 D.

24. B【解析】根据题意，当 $x<0$ 时，$f(x)=\frac{x}{e^x}$，其导数 $f'(x)=\frac{1-x}{e^x}>0$，则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上为增函数，又由 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，则 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为减函数，

$f(3^{-|a+1|})>f(-\frac{\sqrt{3}}{3})\Rightarrow f(3^{-|a+1|})>f(\frac{\sqrt{3}}{3})\Rightarrow 3^{-|a+1|}<3^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow|a+1|>\frac{1}{2}$，解可得：$a<-\frac{3}{2}$ 或 $a>-\frac{1}{2}$，即 a 的取值范围为 $(-\infty,-\frac{3}{2})\cup(-\frac{1}{2},+\infty)$；故选 B.

25. D 【解析】因为 $f(x)=e^{x-1}-e^{1-x}+(x-1)^3+x$，所以 $f(x)=e^{x-1}-e^{1-x}+(x-1)^3+x-1+1$，又由 $f(t)=e^t-e^{-t}+t^3+t$ 是单调递增奇函数，图象关于原点对称，则 $f(x)=e^{x-1}-e^{1-x}+(x-1)^3+x-1+1$ 的图象关于 $(1,1)$ 对称，且单调递增，即 $f(2-m)+f(m)=2$，因为 $f(x-4)+f(2-3x)\geq 2$，所以 $f(x-4)\geq 2-f(2-3x)=2-[2-f(3x)]=f(3x)$ 即 $x-4\geq 3x$，解可得 $x\leq -2$，故选 A.

26. D 【解析】设 $x<0$，则 $-x>0$，所以 $f(-x)=e^{-x}-1$，因为设 $f(x)$ 为奇函数，所以 $-f(x)=e^{-x}-1$，即 $f(x)=-e^{-x}+1$．故选 D.

27. CD 【解析】函数 $f(x)=\frac{\sin^2x+\sin x}{\sin x+1}$ 的定义域为 $\{x|x\neq 2k\pi-\frac{\pi}{z},k\in Z\}$，图象不关于原点对称，不是奇函数，$A$ 错误；函数 $f(x)=1$ 是偶函数不是奇函数，B 错误；函数 $y=(\frac{1}{3})^x$ 与 $y=-\log_3 x$ 互为反函数，图象关于直线 $y=f(-x)$ $y=x$ 对称，C 正确；若 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的函数，函数 $y=f(1+x)$ 是把 $y=f(x)$ 的图象向左平移1个单位得到的，$y=f(1-x)$ 是由 $y=f(x)$ 得到 $y=f(-x)$，在把右移1个单位得到 $y=f[-(x-1)]$，所以 $y=f(1+x)$ 与 $y=f(1-x)$ 的图象关于 y 轴对称，D 正确．故选 CD.

28. ABCD 【解析】因为 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$，且其定义域为 $(-1,1)$，所以 $f(-x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)=-[\ln(1+x)-\ln(1-x)]=-f(x)$，$\forall x\in(-1,1)$，有 $f(-x)=-f(x)$，故 A 是真命题；因为 $x\in(-1,1)$，由 $f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{2}{1-x^2}\geq 2>0$，可知 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递增，即 $\forall x_1,x_2\in(-1,1)$ 且 $x_1\neq x_2$，有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，故 B 是真命题；因为 $f'(x)=\frac{2}{1-x^2}$ 在 $(0,1)$ 单调递增，所以 $\forall x_1,x_2\in(0,1)$，有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，故 C 是真命题；设 $g(x)=f(x)-2x$，则当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)=f'(x)-2\geq 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)>g(0)$，即 $f(x)>2x$；由奇函数性质可知，$\forall x\in(-1,1)$ $|f(x)|\geq 2|x|$，故 D 是真命题．故选 ABCD.

29. BD 【解析】函数 $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln(\frac{2}{1+x}-1)$，其定义域满足：$(1-x)(1+x)>0$，解得：$-1<x<1$，即

定义域为$\{x|-1<x<1\}$．故 A 不对．由$f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(\frac{1-x}{1+x})^{-1}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$是奇函数，故 B 对．定义域为$\{x|-1<x<1\}$．函数$y=\frac{2}{1+x}-1$在定义内是减函数，根据复合函数的单调性，同增异减，即$f(x)$在定义域上是减函数；故 C 不对．$f(x_1)+f(x_2)=\ln\frac{1-x_1}{1+x_1}+\ln\frac{1-x_2}{1+x_2}=\ln(\frac{1-x_1}{1+x_1}\times\frac{1-x_2}{1+x_2})=f(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2})$．即 D 对．故选 BD．

30．ABC 【解析】定义在R上的奇函数$f(x)$和偶函数$g(x)$满足：$f(x)+g(x)=4^x$，

又$f(-x)+g(-x)=4^{-x}$，得$-f(x)+g(x)=4^{-x}$，所以$f(x)=\frac{4^x-4^{-x}}{2}$，$g(x)=\frac{4^x+4^{-x}}{2}$，

$f(0)=0<f(1)=\frac{15}{8}<g(2)=4+\frac{1}{32}$，故 A 成立，$[g(x)]^2-[f(x)]^2=\frac{(4^x+4^{-x})^2}{4}-\frac{(4^x-4^{-x})^2}{4}=1$，故 B 成立，根据奇偶性，$f(-x)g(-x)+f(x)g(x)=-f(x)g(x)+f(x)g(x)=0$，故 C 成立，

$f(2x_0)-2f(x_0)g(x_0)=\frac{4^{2x_0}-4^{-2x_0}}{2}-\frac{2(4^{x_0}-4^{-x_0})(4^{x_0}+4^{-x_0})}{4}=0$，故 D 不成立，故选 ABC．

31．AD 【解析】A．$f(x)$的定义域为$(-1,1]$，定义域不关于原点对称，所以$f(x)$不是偶函数，故该判断错误；B．设$x>0$，$-x<0$，则$f(-x)=x^2-x=-(-x^2+x)=-f(x)$，所以$f(x)$是奇函数，故该判断正确；$C$．解$x^2-3=0$得，$x=\pm\sqrt{3}$，所以$f(x)$的定义域关于原点对称，且$f(x)=0$，则$f(x)$是偶函数，故该判断正确；$D$．解$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ |x-3|-3\neq 0\end{cases}$得，$-1\leq x<0$，或$0<x\leq 1$，所以$f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+3-3}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$，则$f(x)$是奇函数，故该判断错误．故选 AD．

32．AB 【解析】$h(0)=0$，$\phi(h(0))=1$，故A成立，$h(x)=-h(-x)$，$h(x)$为奇函数，在R上单调递增，$h(-1)<h(3)$成立，$h(x)$同理$\phi(x)$为偶函数，当$x>0$，$\phi(-1)=\phi(1)=\frac{e+e^{-1}}{2}<\phi(3)=\frac{e^3+e^{-3}}{2}$，故$B$成立，

$h(2x)=\frac{(e^{2x}-e^{-2x})}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.(e^x-e^{-x})=2h(x)\phi(x)$，故$C$不成立，$h(0)=0$，$\phi(0)=1$，$[h(0)]^2-[\phi(0)]^2=-1$，故 D 不成立，故选 AB．

33．CD 【解析】因为$b\,f(x)=ax^3-\frac{1}{x}+b$，所以$f(x)-b=ax^3-\frac{1}{x}$是奇函数，即$f(-x)-b=-(f(x)-b)$，即$f(-x)+f(x)=2b$是偶数，因为$f(\lg\frac{1}{a})=f(-\lg a)$，则$f(\lg a)+f(\lg\frac{1}{a})$是偶数，排除$A$，$B$，故 C，D 可能满足条件，故选 CD．

34．AC 【解析】法一：任意$x\in A$恒有$f(x)+f(2-x)=2$，A：若$f(x)=2-x$，则$f(x)+f(2-x)=2-x+2-(2-x)=2$，故 A 正确；$B$：若$f(x)=(x-1)^2$，则$f(x)+f(2-x)=2(x-1)^2$，故 B 错误；$C$：若$f(x)=\frac{x}{x-1}$，则$f(x)+f(2-x)=\frac{x}{x-1}+\frac{2-x}{2-x-1}=2$，故 C 正确；$D$：若$f(x)=(x-2)^3$，则$f(x)+f(2-x)=(x-2)^3+(-x)^3\neq 2$，故 D 错误；故选 A，　C

法二：因为任意$x\in A$恒有$f(x)+f(2-x)=2$，所以$f(x)$的图象关于$(1,1)$中心对称，结合选项可知，$f(x)=2-x$，过$(1,1)$的直线，符合题意；根据反比例函数及图象的平移可知，$f(x)=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$关于$(1,1)$对称，符合题意；故选 AC．

35．AC【解析】$f(x)$定义域关于原点对称，令$y=-x$则有：$f(x)+f(-x)=f(0)$，令$x=y=0$，则有$f(0)=0$，

所以$f(-x)=-f(x)$，故$f(x)$是奇函数，A正确，B错误；令$x=x_1$，$y=-x_2$，且$x_1<x_2$，所以$f(x_1)+f(-x_2)=f(\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2})$，又$x_1-x_2<0$且$-1<x_1<1$，$-1<x_2<1$，则$(1-x_1x_2)-(x_2-x_1)=(1+x_1)(1-x_2)>0$，即$-1<\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}<0$，所以$f(x_1)-f(x_2)>0$，所以$f(x)$是单调减函数，C正确，D错误．故选AC．

36.【解析】$f(x)+f(-x)=\frac{2}{4^x+1}+\tan x+\frac{2}{4^{-x}+1}+\tan(-x)=\frac{2}{4^x+1}+\frac{2}{4^{-x}+1}=\frac{2\cdot4^{-x}+2\cdot4^x+4}{4^x+4^{-x}+2}=2$，所以$f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)=5$．故答案为5．

37.【解析】根据题意，函数$f(x)=ax-\log_2(2^x+1)+\cos x$，其定义域为$R$，若$f(x)$为偶函数，则$f(-x)=f(x)$，则有$a(-x)-\log_2(2^{-x}+1)+\cos(-x)=ax-\log_2(2^x+1)+\cos x$，变形可得：$2ax=\log_2(2^x+1)-\log_2(2^{-x}+1)=x$，必有$a=\frac{1}{2}$；故答案为$\frac{1}{2}$．

38.【解析】因为$f(-x)=1-\frac{2}{2^{-x}+1}=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=\frac{-(2^x+1)+2}{2^x+1}=-1+\frac{2}{2^x+1}=-f(x)$，所以函数$f(x)$为奇函数；所以不等式$f(e^{2x}-a)+f(2a-e^x)<0$成立即等价于不等式$f(e^{2x}-a)<f(e^x-2a)$成立，又函数$f(x)$为增函数，所以$e^{2x}-a<e^x-2a$成立，即有$a<e^x-e^{2x}$，令$g(x)=e^x-e^{2x}=e^x-(e^x)^2=-(e^x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}$，则$a<\frac{1}{4}$，故答案为$(-\infty,\frac{1}{4})$．

39.【解析】$f(x)$是$\{x|x\neq0\}$上的偶函数，$t=x^4+x^2$在$(0,+\infty)$上单调递增，$y=0.5^t$是减函数，所以复合函数$y=0.5^{x^4+x^2}$在$(0,+\infty)$上是减函数，且幂函数$y=x^{-\frac{2}{3}}$在$(0,+\infty)$上是减函数，即$f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数，因为$f(\log_{\frac{1}{3}}x)=f(-\log_3x)=f(\log_3x)$，由$f(\log_3x)\ge\frac{5}{2}-f(\log_{\frac{1}{3}}x)$得，$f(\log_3x)\ge\frac{5}{4}$，且$f(1)=\frac{5}{4}$，所以$f(\log_3x)\ge f(1)$，则$f(|\log_3x|)\ge f(1)$，得$0<|\log_3x|\le1$，解得$\frac{1}{3}\le x\le3$，且$x\neq1$，所以原不等式的解集为$\{x|\frac{1}{3}\le x\le3$且$x\neq1\}$，故答案为$\{x|\frac{1}{3}\le x\le3$且$x\neq1\}$．

40.【解析】因为$f(x)=\frac{1}{2^x+\sqrt2}$，所以$f(1-x)=\frac{1}{2^{1-x}+\sqrt2}=\frac{2^x}{\sqrt2(2^x+\sqrt2)}$，即$f(x)+f(1-x)=\frac{\sqrt2}{2}$

则$f(-5)+f(-4)+\cdots+f(0)+\cdots+f(5)+f(6)=6\times\frac{\sqrt2}{2}=3\sqrt2$ 故答案为$3\sqrt2$

41.【解析】因为$f(x)=\frac{xe^x+x+2}{e^x+1}+\sin x=\frac{2}{e^x+1}+x+\sin x$，所以

$f(-x)+f(x)=\frac{2}{e^x+1}+x+\sin x+\frac{2}{e^{-x}+1}-x-\sin x=\frac{2}{e^x+1}+\frac{2e^x}{1+e^x}=2$，则

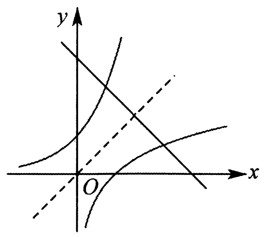
$f(-5)+f(-4)+f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=5\times2+1=11$，故答案为11．

42.【解析】根据题意，设$F(x)=f(x)+2x$，则有$F(-x)=f(-x)+2(-x)=-[f(x)+2x]=-F(x)$，即函数$F(x)$是定义在$R$上的奇函数，当$x>0$时，$f(x)=2^x-4$，则$F(x)=2^x+2x-4$，且$F(1)=2+2-4=0$，且$F'(x)=2^x\ln2+2>0$，即函数$F(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数，则此时$f(x)+2x>0\Rightarrow F(x)>0\Rightarrow x>1$，故当$x>0$时，$f(x)+2x>0$的解集为$\{x|x>1\}$；又由函数$F(x)$是定义在$R$上的奇函数，则当$x<0$时，$f(x)+2x>0$的解集为$\{x|x<-1\}$；综合可得：不等式$f(x)+2x>0$的解集为$\{x|x>1$或$x<-1\}$；故答案为：$\{x|x>1$或$x<-1\}$

专题 5 函数图像变换

同步训练

1．B【解析】令$t=x-1$，则$t+3^t=3$，$t+\log_3 t=3$，作出$y=3^t$，$y=\log_3 t$，$y=3-t$的图象，由对称性知$t_1+t_2=3$，故$x_1+x_2=5$．故选B．



2.【解析】法一：（换元）因为方程$2^{x-1}+x-4=0$，所以$2^{x-1}=4-x$，所以$2^{t_1}=3-t_1$，$x_1=t_1+1$，x_2是方程$\log_2 x=3-x$的根，所以$t_1+x_2=3$所以$x_1-1+x_2=3$．故答案为4．

因为法二：(同构)方程$2^{x-1}+x-4=0$，所以$2^{x-1}=4-x$，所以$x-1=\log_2(4-x)$，所以$x=\log_2(4-x)+1$，做变量代换$y=4-x$，则$4-y=\log_2 y+1$，即为$y+\log_2 y=3$，因为x_1是方程$2^{x-1}+x-4=0$的根，x_2是方程$x+\log_2 x=3$的根，所以$x_2=4-x_1$，所以$x_1+x_2=4$．故答案为4．

3.【解析】方程$x+2+\log_2 x=0$和$x+2+2^x=0$分别变形为：方程$\log_2 x=-x-2$，$2^x=-x-2$．因为方程$x+2+\log_2 x=0$和$x+2+2^x=0$的根分别是a和b，所以(a,b)满足$y=-x-2$．所以$a+b=-2$．函数$f(x)=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab=)=x^2-2x+ab=(x-1)^2+ab-1$，所以$f(x)$的单调递增区间是$[1,+\infty)$．故答案为$[1,+\infty)$．

4.【解析】$2^{m-1}=\frac{5}{2}-m$，$\log_2(n-1)=\frac{5}{2}-n$，$y=\frac{5}{2}-x$与对称直线$y=x-1$的交点坐标为$(\frac{7}{4},\frac{3}{4})$，$m+n=2\cdot\frac{7}{4}=\frac{7}{2}$．

5.【解析】由题意$(x_1-e^{x_2})^2+(x_2-e^{x_1})^2$的最小值转化为点$(x_1,e^{x_1})$与$(e^{x_2},x_2)$的距离的平方．因为$(x_1,e^{x_1})$在函数$y=e^x$，而点$(e^{x_2},x_2)$在函数$y=\ln x$上，所以点$(x_1,e^{x_1})$与$(e^{x_2},x_2)$的距离即为函数$y=e^x$与函数$y=\ln x$上的最小值距离；它们的切线方程分别为$y=x+1$和$y=x-1$．所以最小值距离$d=\sqrt{2}$，则$(x_1-e^{x_2})^2+(x_2-e^{x_1})^2$的最小值等于2．故选D．

6.【解析】$(a+2)^2+(b-3)^2=1$，可得(a,b)在$(-2,3)$为圆心，1为半径r的圆上，$(x-a)^2+(\ln x-b)^2$表示点(a,b)与点$(x,\ln x)$的距离的平方，

法一：设过切点$(m,\ln m)$的切线与过$(-2,3)$的法线垂直，可得$\frac{\ln m-3}{m+2}\cdot\frac{1}{m}=-1$，即有$\ln m+m^2+2m=3$，由$f(m)=\ln m+m^2+2m$在$m>0$递增，且$f(1)=3$，可得切点为$(1,0)$，圆心与切点的距离为$d=\sqrt{(1+2)^2+(0-3)^2}=3\sqrt{2}$，可得$(x-a)^2+(\ln x-b)^2$的最小值为$(3\sqrt{2}-1)^2=19-6\sqrt{2}$，故选D

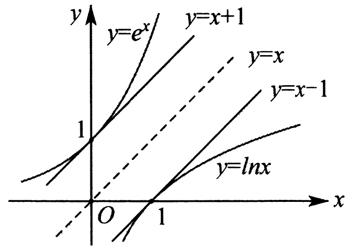
法二：由于$(-2,3)$在直线$y=1-x$上，故根据推论3，$d_{\min}=\sqrt{(-2-0)^2+(3-1)^2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，可得$(x-a)^2+(\ln x-b)^2$的最小值为$(3\sqrt{2}-1)^2=19-6\sqrt{2}$，故选D

7.【解析】令$n=\ln t$，则原式可化为$(m-t)^2+(e^m-\ln t)^2$，其几何意义是动点(m,e^m)和$(t,\ln t)$的距离的平方，又因为曲线$y=e^x$与曲线$y=\ln t$关于$y=x$对称，设曲线$y=e^x$上点且平行直线$y=x$的切线为$y=x+a$，设切点为(x_1,y_1)，因为$y'=e^x$，所以$1=e^{x_1}$，解得$x_1=0$，则$y_1=1$，所以$a=1$，

即曲线 $y=e^x$ 上点且平行直线 $y=x$ 的切线为 $y=x+1$，曲线 $y=\ln x$ 上点且平行直线 $y=x$ 的切线为 $y=x+b$，设切点为 (x_2,y_2)，因为 $y'=\frac{1}{x}$，所以 $\frac{1}{x_2}=1$，即 $x_2=1$，$y_2=0$，所以 $b=-1$，

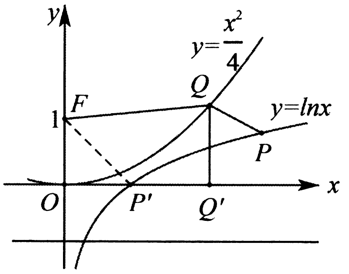
即曲线 $y=\ln x$ 上点且平行直线 $y=x$ 的切线为 $y=x-1$，则两切线的距离 $d=\frac{|1+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

故 $(m-t)^2+(e^m-\ln t)^{22}$ 最小值为 2，即 $(m-e^n)^2+(n-e^m)^2$ 的最小值是 2，故答案为 2．



8.【解析】因为实数 a、b、c、d 满足：$(b+2a^2-6\ln a)^2+|2c-d+6|=0$ 所以 $b+2a^2-6\ln a=0$，设 $b=y$，$a=x$，则有：$y=6\ln x-2x^2$，$2c-d+6=0$，设 $c=x$，$d=y$，则有：$y=2x+6$，所以 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 就是曲线 $y=6\ln x-2x^2$ 与直线 $y=2x+6$ 之间的最小距离的平方值，对曲线 $y=6\ln x-2x^2$ 求导：$y'(x)=\frac{6}{x}-4x$，与 $y=2x+6$ 平行的切线斜率 $k=2=\frac{6}{x}-4x$，解得：$x=1$ 或 $x=-\frac{3}{2}$（舍去）把 $x=1$ 代入 $y=6\ln x-2x^2$，得：$y=-2$，即切点为 $(1,-2)$，切点到直线 $y=2x+6$ 的距离：(c,d) 在线 $y=x-2e^x$ 上，点 (a,b) 在线 $y=2-x$ 上，由题意知 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 可表示为曲线 $y=x-2e^x$ 的点到直线 $y=2-x$ 的距离的平方，求曲线 $y=x-2e^x$ 平行于直线 $y=2-x$ 的切线，$y'=1-2e^x$，令 $y'=-1$，得 $x=0$，因此切点为 $(0,-2)$，切点到直线 $y=2-x$ 的距离为 $d=\frac{|0-2-2|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}$ 就是曲线上的点到直线的最小距离，因此 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 $d^2=8$，故选 D.

10.【解析】设 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\frac{x^2}{4}$，则 $\sqrt{(a-b)^2+(\ln a-\frac{b^2}{4})^2}$ 表示函数 $f(x)$ 上一点 $P(a,\ln a)$ 与函数 $g(x)$ 上一点 $Q(b,\frac{b^2}{4})$ 之间的距离，又函数 $g(x)=\frac{x^2}{4}$ 表示焦点为 $F(0,1)$，准线为 $y=-1$ 的抛物线，由抛物线的定义可得 $\frac{b^2}{4}=|QF|-1$，所以 $\varphi(a,b)=\sqrt{(a-b)^2+(\ln a-\frac{b^2}{4})^2}+\frac{b^2}{4}(a>0,b\in R)$ 的几何意义即为 $|PQ|+|QQ'|=|PQ|+|QF|-1$，作出示意图如下，



当点 P 运动至点 P'，且 FP' 垂直于过点 P' 的函数 $f(x)=\ln x$ 的切线，点 Q 为线段 FP' 与函数 $g(x)=\frac{x^2}{4}$ 的

交点时，$|PQ|+|QF|-1$最小，设$P'(x_0,y_0)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，则$\begin{cases}\dfrac{y_0-1}{x_0}\cdot\dfrac{1}{x_0}=-1\\ y_0=\ln x_0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_0=1\\ y_0=0\end{cases}$，

即$p'(1,0)$，所以$|PQ|+|QF|-1$的最小值为$|FP|-1=\sqrt{1+1}-1=\sqrt{2}-1$．故答案为$\sqrt{2}-1$．

11.【解析】因为a满足$x+\lg x=5$，b满足$x+10^x=5$，所以a，b分别为函数$y=5-x$与函数$y=\lg x$，$y=10^x$图象交点的横坐标，由于$y=x$与$y=5-x$图象交点的横坐标为$\dfrac{5}{2}$，函数$y=\lg x$，$y=10x$的图象关于$y=x$对称，所以$a+b=5$，所以函数$f(x)=\begin{cases}x^2+(a+b)x+3,(x\le 0)\\ x^{\frac{b}{a}},(x>0)\end{cases}$，当$x\le 0$时，关于$x$的方程$f(x)=x$，即$x^2+5x+3=x$，即$x^2+4x+3=0$，解得$x_1=-1<0$，$x_2=-3<0$，满足题意；当$x>0$时，关于$x$的方程$f(x)=x$，即$x=x^{\frac{b}{a}}$，解得$x=1>0$，满足题意．所以关于$x$的方程$f(x)=x$的解的个数是3．故选C．

12．【解析】法一：根据题意，$g(m)=f(n)$，即$e^{m-2}=\ln\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{2}$，所以$m=2+\ln(\ln\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{2})$，所以

$n-m=n-2-\ln(\ln\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{2})=\ln e^{n-2}-\ln(\ln\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{2})=\ln\dfrac{e^{n-2}}{\ln\dfrac{n\sqrt{e}}{2}}$，设$h(x)=\dfrac{e^{x-2}}{\ln\dfrac{x\sqrt{e}}{2}}$，则$h'(x)=\dfrac{e^{x-2}(\ln\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x})}{(\ln\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2})^2}$，

令$h'(x)=0$，得$\ln\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}=0$，由$x>0$，可得$\ln\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}$递增，当$x=2$时，$h'(x)=0$，

$x>2$时，$h'(x)>0$，$h(x)$递增；$0<x<2$时，$h'(x)<0$，$h(x)$递减．可得$x=2$处取得极小值且为最小值$h(2)=2$，则$n-m$的最小值为$\ln 2$．故答案为$\ln 2$．

法二：$f^{-1}(x)=2e^{x-\frac{1}{2}}$，$g^{-1}(x)=\ln x+2$，$n-m=h(x)=2e^{x-\frac{1}{2}}-\ln x-2$，$h'(x)=2e^{x-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{x}=0$，$x=\dfrac{1}{2}$，

即$h(x)_{\min}=h(\dfrac{1}{2})=\ln 2$．故答案为$\ln 2$．

13.【解析】法一：不妨设$f(m)=g(n)=t$，所以$e^{2m-1}=\dfrac{1}{2}+lnn=t$，$(t>0)$，所以$2m-1=\ln t$，$m=\dfrac{1}{2}(1+\ln t)$，

$n=e^{t-\frac{1}{2}}$，故$m-n=\dfrac{1}{2}(1+\ln t)-e^{t-\frac{1}{2}}$，$(t>0)$，令$h(t)=\dfrac{1}{2}(1+\ln t)-e^{t-\frac{1}{2}}$，$(t>0)$，则$h'(t)=\dfrac{1}{2t}-e^{t-\frac{1}{2}}$，易知$h'(t)$在$(0,+\infty)$上是减函数，且$h'(\dfrac{1}{2})=0$，当$t>\dfrac{1}{2}$时，$h'(t)<0$，当$0<t<\dfrac{1}{2}$时，$h'(t)>0$，即当$t=\dfrac{1}{2}$时，$h(t)$取得极大值，同时也是最大值，此时$h(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}(1+\ln\dfrac{1}{2})-e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln 2$

$=-\dfrac{\ln 2+1}{2}$．故选A．

法二：$f^{-1}(x)=\dfrac{\ln x+1}{2}$，$g^{-1}(x)=e^{x-\frac{1}{2}}$，$m-n=h(x)=-e^{x-\frac{1}{2}}+\dfrac{\ln x}{2}+\dfrac{1}{2}$，$h'(x)=-e^{x-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2x}=0$，$x=\dfrac{1}{2}$，即$h(x)_{\max}=h(\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1+\ln 2}{2}$．故选A．

14.【解析】法一：令$f(x_1)=g(x_2)=t>-e$，则$e^{x_1}-e=t$，$\ln x_2+1=t$，$x_1=\ln(e+t)$，$x_2=e^{t-1}$，令$h(t)=x_1-x_2=\ln(e+t)-e^{t-1}$，$(t>-e)$，所以$h'(t)=\dfrac{1}{e+t}-e^{t-1}$，$h''(t)=-\dfrac{1}{(e+t)^2}-e^{t-1}<0$在$(-e,+\infty)$上

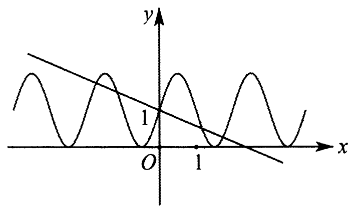
恒成立，所以$h'(t)$为$(-e,+\infty)$上的减函数，又$h'(0)=\dfrac{1}{e}-e^{-1}=0$，所以$-e<t<0$时，$h'(t)>h'(0)=0$，$x>0$时，$h'(t)>h'(0)=0$，所以$h(t)$在$(-e,0)$上递增，在$(0,+\infty)$上递减，所以$t=0$时，$h(t)$取得最大值$h(0)=\ln(e+0)-e^{0-1}=1-\dfrac{1}{e}$．即$x_1-x_2$的最大值为$1-\dfrac{1}{e}$．故选D．

法二：$f^{-1}(x)=\ln(x+e)$，$g^{-1}(x)=e^{x-1}$，$x_1-x_2=h(x)=-e^{x-1}+\ln(x+e)$，$h'(x)=-e^{x-1}+\dfrac{1}{x+e}=0$，$x=0$，

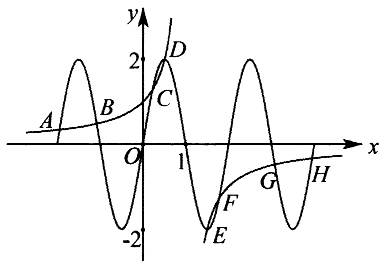
即$h(x)_{\max}=h(0)=1-\dfrac{1}{e}$．故选D．

15.【解析】函数$f(x)(x\in R)$满足$f(-x)=8-f(4+x)$，可得：$f(-x)+f(4+x)=8$，即函数$f(x)$关于点$(2,4)$对称，函数$g(x)=\dfrac{4x+3}{x-2}=\dfrac{4(x-2)+11}{x-2}=4+\dfrac{11}{x-2}$可知图象关于$(2,4)$对称；所以函数$f(x)$与$g(x)$的图象共有168个交点即在$(2,4)$两边各有84个交点．而每个对称点都有：$x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=8$，因为有168个交点，即有84组．故得：$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\ldots+(x_{168}+y_{168})=(4+8)\times84=1008$．故选D．

16.【解析】由$f(-x)=2-f(x)$，得$f(-x)+f(x)=2$，函数$f(x)$关于$(0,1)$对称，同时$y=\sin\pi x+1$也关于$(0,1)$对称，则$y=\sin\pi x+1$与$y=f(x)$图象的交点为两两关于$(0,1)$对称，当m是偶数数，则$x_1+x_m=x_2+x_{m-1}=\cdots=0$，$y_1+y_m=y_2+y_{m-1}=\cdots=2$，则$\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=0+2\times\dfrac{m}{2}=m$，同理当$m$是奇数时，$\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=m$，故选B．

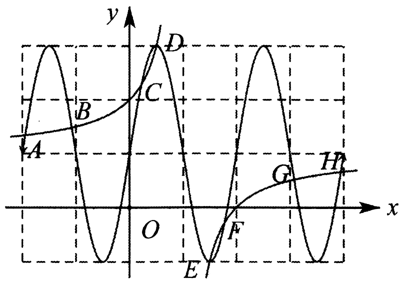


17.【解析】函数$y_1=\dfrac{1}{1-x}$，$y_2=2\sin\pi x$的图象有公共的对称中心$(1,0)$，作出两个函数的图象，如图，当$1<x\leqslant4$时，$y_1<0$，而函数y_2在$(1,4)$上出现1.5个周期的图象，在$(1,\dfrac{3}{2})$和$(\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{2})$上是减函数；在$(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2})$和$(\dfrac{7}{2},4)$上是增函数．所以函数$y_1$在$(1,4)$上函数值为负数，且与$y_2$的图象有四个交点$E$、$F$、$G$、$H$，相应地，$y_1$在$(-2,1)$上函数值为正数，且与$y_2$的图象有四个交点$A$、$B$、$C$、$D$，且$x_A+x_H=x_B+x_G=x_C+x_F=x_D+x_E=2$，故所求的横坐标之和为8．故选D．



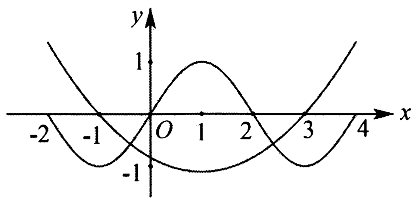
18.【解析】根据题意，函数$y=\dfrac{x-2}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$，$(-2\le x\le4)$，其图象关于点$(1,1)$对称，函数$y=2\sin\pi x+1$，（$-2\le x\le4$）其图象也关于点$(1,1)$对称，作出两个函数草图分析可得两个函数在$(-2,4)$上有8个交点，

设8个交点从左到右依次为A、B、C、D、E、F、G、H，A与H关于点$(1,1)$对称，则$x_A+x_H=2$，$y_A+y_H=2$，B与G关于点$(1,1)$对称，则$x_B+x_G=2$，$y_B+y_G=2$，C与F关于点$(1,1)$对称，则$x_C+x_F=2$，$y_C+y_F=2$，D与E关于点$(1,1)$对称，则$x_D+x_E=2$，$y_D+y_E=2$，故两个图象的所有的交点的横坐标与纵坐标之和等于16；故选C.

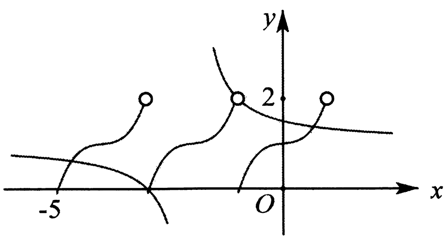


19.【解析】因为函数$f(x)=x+2\sin(x-\frac{1}{2})$，所以$f(x)+f(1-x)=x+2\sin(x-\frac{1}{2})+1-x+2\sin(\frac{1}{2}-x)=1$，所以$f(\frac{1}{2019})+f(\frac{2}{2019})+\cdots+f(\frac{2018}{2019})=\frac{1}{2}\times 2018\times 1=1009$．故选D.

20.【解析】函数$f(x)=\ln(e^{x-1}+e^{1-x})-2$关于直线$x=1$对称（满足$f(x)=f(2-x)$），$g(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$也关于直线$x=1$对称，当$x>1$时，$f(x)$单调递增，$f(1)=\ln 2-2$，$f(4)=\ln(e^3+e^{-3})-2>1$，如图，两个函数图象只有两个交点所以$\sum_{i=1}^{m}x_i=2$，故选A.



21.【解析】法一：由题意，当$x=1$时，$f(1)=f(-1)=0$，$g(1)=\frac{4}{3}$；当$0\le x<1$时，$x^2+1=\frac{x+3}{x+2}$，即$(x+1)(x^2+x-1)=0$，解得$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$；当$-1\le x<0$时，$f(x)<1$，$g(x)>1$，无解；当$-2<x<-1$时，$f(x)<2$，$g(x)>2$，无解；当$-3\le x<-2$时，$f(x)>0$，$g(x)<0$，无解；当$-4\le x<-3$时，$f(x)=f(x+4)=(x+4)^2+1>1$，$g(x)<1$，无解；当$-5\le x<-4$时，$f(x)=f(x+4)=1-(x+4)^2<1$，$g(x)<1$，则$1-(x+4)^2=\frac{x+3}{x+2}$，解得$x=\frac{-7-\sqrt{5}}{2}$；则$\frac{-7-\sqrt{5}}{2}+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=-4$；$x=-3$时，$g(x)=f(x)=0$，可得所有根之和为$-7$．故答案为$-7$．



法二：函数$f(x)$满足$f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\in[0,1)\\ 1-x^2, x\in[-1,0)\end{cases}$，则$f(x)$关于点$(0,1)$对称，又因为$f(x)=f(x+2)$，故$f(x)$

关于点$(-2,1)$对称，$g(x)=\dfrac{x+3}{x+2}$也关于点$(-2,1)$对称，如图，$g(x)=\dfrac{x+3}{x+2}$过点$(-3,0)$和，$x_1+x_4=-4$，$x_2+x_3=-4$，由于点$(-1,2)$不在$f(x)$上，所有根之和为-7．故答案为：-7．

22.【解析】不等式$(e^x-a)^2+x^2-2ax+a^2\le\dfrac{1}{2}$成立，即为$(e^x-a)^2+(x-a)^2\le\dfrac{1}{2}$，表示点$(x,e^x)$与$(a,a)$的距离的平方不超过$\dfrac{1}{2}$，即最大值为$\dfrac{1}{2}$．由$(a,a)$在直线$l:y=x$上，设与直线$l$平行且与$y=e^x$相切的直线的切点为$(m,n)$，可得切线的斜率为$e^m=1$，解得$m=0$，$n=1$，切点为$(0,1)$，由切点到直线$l$的距离为直线$l$上的点与曲线$y=e^x$的距离的最小值，可得$(0-a)^2+(1-a)^2=\dfrac{1}{2}$，解得$a=\dfrac{1}{2}$，则$a$的取值集合为$\{\dfrac{1}{2}\}$．故选A．

达标训练（适合高一）

1．C 【解析】不等式$||x-2|-1|\le1$的解集，就是$-1\le|x-2|-1|\le1$的解集，也就是$0\le|x-2|\le2$的解集，$0\le|x-2|\le2$的几何意义是数轴上的点到2的距离小于等于2的值，所以不等式的解为：$0\le x\le4$．所以不等式的解集为$[0,4]$．故选C．

2．C 【解析】法一：关于x的不等式$m-|x+1|\le|2x+1|+|x+1|$的解集为R，即$m\le|2x+1|+|2x+2|$ 的解集为R．因为$|2x+1|+|2x+2|\ge|2x+1-(2x+2)|=1$，所以$m\le1$，所以实数$m$的最大值为1，故选C．

法二：利用平底锅函数性质，$2|x+1|+2|x+\dfrac{1}{2}|\ge1\ge m$，故选C．

3．C 【解析】法一：$|x-1|+|x+2|+|x-4|$表示x轴上的点x到两点1，-2，$-P$的距离之和，$f(x)=|x-1|+|x+2|+|x+P|$的最小值为3，易得点x在-2与1间，才可能有最小值，否则有些线段被加了两次以上．所以$-2\le P\le1$，故选C．

法二：利用尖尖角函数性质，由于$|x-1|+|x+2|\ge3$，显然$x=P$时，取得尖尖角最小值，$x=P$时，必须同时满足$|P-1|+|P+2|=3$，所以$-2\le P\le1$，故选C．

4．C 【解析】因为$|x+t^2-2|+|x+t^2+2t-1|\ge|(x+t^2-2)-(x+t^2+2t-1)|=|-2t-1|=|2t+1|$，

所以关于x的不等式$|x+t^2-2|+|x+t^2+2t-1|<3t$无解等价于$|2t+1|\ge3t$，所以$\begin{cases}t\ge0\\2t+1\ge3t\end{cases}$或$t<0$，

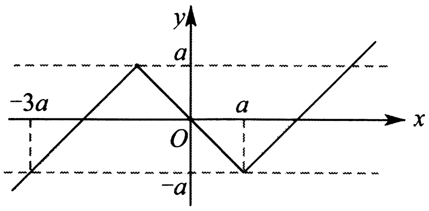
解得$t\le1$．故选C．

5．A 【解析】$1\le x\le4$时，$|x-1|=x-1$，则原不等式为$|x+\dfrac{4}{x}-m|\le5-m$，则$m\le5$，且

$-5+m\le x+\dfrac{4}{x}-m\le5-m$，得$-5+2m\le x+\dfrac{4}{x}\le5$，由对勾函数$y=x+\dfrac{4}{x}$，$x\in[1,4]$性质可知，$y_{\min}=4$，$y_{\max}=5$，所以$-5+2m\le4$，得$m\le\dfrac{9}{2}$，故选A．

6．C 【解析】因为$a>0$，所以$x\ge0$时，$f(x)=|x-a|-a=\begin{cases}x-2a,x>a\\-x,0\le x\le a\end{cases}$，且$f(x)$是$R$上的奇函数，

所以画出$f(x)$的图象如下：因为对任意的实数x，有$f(x-1)\le f(x)$成立，所以$a-(-3a)\le1$，解得$0<a\le\dfrac{1}{4}$，所以正数a的取值范围为$(0,\dfrac{1}{4}]$．故选C．



7.【解析】函数 $y=|(\log_2|x-1|)|=|\log_2(1-x)|$，令 $t=\log_2(1-x)$，则 $y=|t|$，$t<0$，解得 $0<x<1$，由 t 在 $(0,1)$ 递减，y 在 $(-\infty,0)$ 递减，由复合函数的单调性：同增异减，可得所求增区间为 $(0,1)$．故答案为 $(0,1)$．

8.【解析】法一：（1）当 $-\dfrac{a}{2}>-1$，即 $a<2$ 时，$f(x)=\begin{cases}-3x-1-a,x\leqslant-1\\-x+1-a,-1<x<-\dfrac{a}{2}\\3x+1+a,x\geqslant-\dfrac{a}{2}\end{cases}$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-\dfrac{a}{2})$ 上单调递减，在区间 $[-\dfrac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增，当 $x=-\dfrac{a}{2}$ 时取最小值．因为函数 $f(x)=|x+1|+|2x+a|$ 的最小值为3，所以 $f(-\dfrac{a}{2})=3$．所以 $a=-4$．

（2）当 $-\dfrac{a}{2}<-1$，即 $a>2$ 时，$f(x)=\begin{cases}-3x-1-a,x\leqslant-\dfrac{a}{2}\\x-1+a,-\dfrac{a}{2}<x<-1\\3x+1+a,x\geqslant-1\end{cases}$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-\dfrac{a}{2})$ 上单调递减，在区间 $[-\dfrac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增，当 $x=-\dfrac{a}{2}$ 时取最小值．因为函数 $f(x)=|x+1|+|2x+a|$ 的最小值为3，所以 $f(-\dfrac{a}{2})=3$．所以 $a=8$．

（3）当 $-\dfrac{a}{2}=-1$，即 $a=2$ 时，$f(x)=3|x+1|\geq0$，与题意不符．因为 a 为正实数，所以 $a=8$．故答案为8．

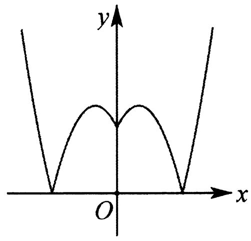
法二：$f(x)=|x+1|+2|x+\dfrac{a}{2}|$，根据函数性质得 $x=-\dfrac{a}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=f(-\dfrac{a}{2})=|-\dfrac{a}{2}+1|=3$，因为 $a>0$，故答案为8．

9.【解析】法一：$f(x)=|2x-t|+|5-x|=|x-5|+|x-\dfrac{t}{2}|+|x-\dfrac{t}{2}|\geq|x-5-x+\dfrac{t}{2}|+|x-\dfrac{t}{2}|\geq|\dfrac{t}{2}-5|$，当且仅当 $x=\dfrac{t}{2}$ 时，上式取得等号，即有 $|\dfrac{t}{2}-5|=3$，解得 $t=4$ 或 16，故答案为 4 或 16．

法二：$x=\dfrac{t}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=f(\dfrac{t}{2})=|\dfrac{t}{2}-5|=3$，$t=4$ 或 16，故答案为 4 或 16．

10.【解析】$f(x)=|-x^2+2|x|+3|=||x|^2-2|x|+3|=\begin{cases}x^2-2x-3,x<-3\\-x^2-2x+3,-3\leq x<0\\-x^2+2x+3,0<x\leq3\\x^2-2x-3,x>3\end{cases}$，

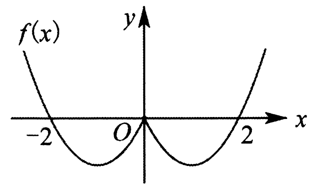
其图象如图：则其减区间为 $(-\infty,-3]\cup[0,3]$；故答案为 $(-\infty,-3]\cup[0,3]$．



11.【解析】不等式组$\begin{cases}|x^2-2x-3|>x^2-2x-3\\x^2+|x|-2<0\end{cases}$，即$\begin{cases}x^2-2x-3<0\\(|x|+2)(|x|-1)<0\end{cases}$，即$\begin{cases}(x+1)(x-3)<0\\|x|<1\end{cases}$，求得$-1<x<1$，故答案为$(-1,1)$.

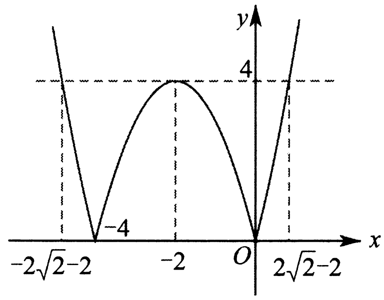
12.【解析】不等式$||x-2|-1|\le 1$的解集，就是$-1\le|x-2|-1\le 1$的解集，也就是$0\le|x-2|\le 2$的解集，$0\le|x-2|\le 2$的几何意义是数轴上的点到2的距离小于等于2的值，所以不等式的解为：$0\le x\le 4$．所以不等式的解集为$[0,4]$．故答案为：$[0,4]$.

13.【解析】由于函数$f(x)=x^2-2|x|=\begin{cases}x^2-2x,x\ge 0\\x^2+2x,x<0\end{cases}$为偶函数，且$f(2)=f(0)=0$，故$f(-m^2-1)<f(2)$即$f(-m^2-1)<0$．画出函数$f(x)$的图象，数形结合可得①$-2<-m^2-1<0$，或②$0<-m^2-1<2$．解①求得$-1<m<1$，解②求得$m$无解．综上可得，$m$取值范围是$(-1,1)$，故答案为$(-1,1)$.



14.【解析】利用绝对值的几何意义，当$-1<a<0$时，满足题意；当$a=-1$时，$x=0$就不满足题意，同理分析，$a=0$，$x=-1$就不满足题意；$a<-1$，比如$a=-4$，$x=1$就不满足题意；$a>0$时，比如$a=1$，$x=0$就不满足题意．故答案为：$-1<a<0$.

15.【解析】作出$f(x)$的函数图象如图所示：由图象可知$f(x)$的图象关于直线$x=-2$对称，所以$f(2^x-2)=f(-2^x-2)$，所以不等式转化为$f(2^x-2)\le 4$，又$2^x-2\ge -2$，所以$-2\le 2^x-2\le 2\sqrt{2}-2$，解得$x\le\frac{3}{2}$．故答案为$(-\infty,\frac{3}{2}]$.



16.【解析】由题意知，$x\in[1,5)$，$2^{|x-3|}\in[1,4]$，故$2^{|x-3|}-a\in[1-a,4-a]$，①$a\le 1$时，

$f(x)=|2^{|x-3|}-a|+a=|2^{|x-3|}\in[1,4]$，故符合题意；②$1<a\le\frac{5}{2}$时，$1-a<0$，$4-a>0$且$a-1\le 4-a$，所以$|2^{|x-3|}-a|\in[0,4-a]$，故$f(x)=|2^{|x-3|}-a|+a\in[a,4]$，故符合题意；③$\frac{5}{2}<a\le 4$时，$1-a<0$，$4-a>0$，且$a-1>4-a$，所以$|2^{|x-3|}-a|\in[0,1-a]$，故$f(x)=|2^{|x-3|}-a|+a\in[a,1]$，故不符合题意；④$a>4$时，

$f(x)=|2^{|x-3|}-a|+a=2a-2^{|x-3|}\in[2a-4,2a-1]$，故不符合题意．综上所述：$(-\infty,\frac{5}{2}]$．

17.【解析】法一：$x\le 1$ 时，$f(x)=|x-1|+\frac{|x-2|}{2}+\frac{|x-3|}{3}=-\frac{11}{6}x+3\ge\frac{7}{6}$；

$1<x\le 2$ 时，$f(x)=|x-1|+\frac{|x-2|}{2}+\frac{|x-3|}{3}=\frac{1}{6}x+1\in[\frac{7}{6},\frac{4}{3}]$；

$2<x<3$ 时，$f(x)=|x-1|+\frac{|x-2|}{2}+\frac{|x-3|}{3}=\frac{7}{6}x-1\in(\frac{4}{3},\frac{5}{2})$；

$x\ge 3$ 时，$f(x)=|x-1|+\frac{|x-2|}{2}+\frac{|x-3|}{3}=\frac{11}{6}x-3\ge\frac{5}{2}$；

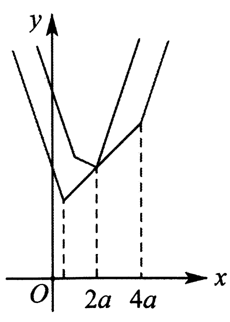
所以 $f(x)$ 的最小值是 $\frac{7}{6}$．故答案为 $\frac{7}{6}$．

法二：$f(x)=\frac{1}{6}(6|x-1|+3|x-2|+2|x-3|)$，共11个零点，属于尖尖角函数，最中间在 $x=1$ 这个尖尖角位置，故 $f(x)_{\min}=\frac{1}{6}(6|1-1|+3|1-2|+2|1-3|)=\frac{7}{6}$．

18.【解析】法一：$f(2x)-1\le f(x)$ 恒成立，即 $|2x-a|-|2x-4a|-1\le|x-a|-|x-4a|$ 恒成立，

即 $|2x-a|+|x-4a|\le|x-a|+|2x-4a|+1$ 恒成立，且 $a>0$．此不等式中，绝对值的“根”共有4个：$\frac{a}{2}$，a，$2a$，$4a$．当 $x<\frac{a}{2}$ 时，不等式即 $a-2x+4a-x\le a-x+4a-2x+1$，即 $0\le 1$．当 $\frac{a}{2}\le x<a$ 时，不等式即 $2x-a+4a-x\le a-x+4a-2x+1$，即 $2x-\frac{1}{2}\le a$，故有 $2a-\frac{1}{2}\le a$，即 $a\le\frac{1}{2}$．当 $a\le x<2a$ 时，不等式即 $2x-a+4a-x\le x-a+4a-2x+1$，即 $x\le\frac{1}{2}$．当 $2a\le x<4a$ 时，不等式即 $2x-a+4a-x\le x-a+2x-4a+1$，即 $8a\le 2x+1$，故 $8a\le 4a+1$，可得 $a\le\frac{1}{4}$．当 $x\ge 4a$ 时，不等式即 $2x-a+x-4a\le a-x+2x-4a+1$，即 $0\le 1$．综上可得，$0<a\le\frac{1}{4}$，故 a 的最大值为 $\frac{1}{4}$，故答案为 $\frac{1}{4}$．

法二：构造尖尖角函数，$|2x-a|+|x-4a|\le|x-a|+|2x-4a|+1$ 恒成立，且 $a>0$．令 $g(x)=|2x-a|+|x-4a|$，$h(x)=|x-a|+|2x-4a|+1$，如图所示，易知 $h(x)_{\min}=h(2a)=a+1$，处于尖尖角位置，此时 $g(2a)=5a$，且 $g(x)$ 在区间 $[\frac{a}{2},4a]\uparrow$，故只需卡住尖尖角，即 $a+1\ge 5a$，$0<a\le\frac{1}{4}$，故答案为 $\frac{1}{4}$．



19.【解析】法一：设 $t=x^2(t\ge 0)$，则 $g(t)=|t-1|+|t-2|+a|t-3|$，当 $0\le t\le 1$ 时，

$g(t)=1-t+2-t+a(3-t)=3+3a-(2+a)t$；当 $1<t\le 2$ 时，$g(t)=t-1+2-t+a(3-t)=1+3a-at$；当

$2<t\le 3$ 时，$g(t)=t-1+t-2+a(3-t)=3a-3+(2-a)t$；当 $t>3$ 时，$g(t)=t-1+t-2+a(t-3)=(2+a)t-3-3a$．由 $g(1)=1+2a$；$g(2)=1+3a-2a=1+a$；$g(3)=3$．由于 $y=g(t)$ 的图象为折线，若 $g(t)$ 在 $[0,1]$ 递增，可得 $2+a<0$，即 $a<-2$，则 $g(t)$ 在 $(1,2)$ 递增，在 $(2,3)$ 递增，在 $(3,+\infty)$ 递减，$g(t)$ 取得最大值3，无最小值；则 $g(t)$ 在 $[0,1]$ 不为增函数，即 $2+a\ge 0$，可得 $a\ge -2$，$g(t)$ 在 $(1,2)$ 先增后减；在 $(2,3)$ 先增后减；在 $(3,+\infty)$ 不为减函数，则 $f(x)$ 存在最小值，随着 a 在 $[-2,+\infty)$ 的增大，$g(t)$ 的最小值分别为 $g(1)$，$g(2)$，$g(3)$，综上可得 a 的范围是 $[-2,+\infty)$，故答案为 $[-2,+\infty)$．

法二：由于 $f(x)=|x^2-1|+|x^2-2|+a|x^2-3|(x\in R)$ 为偶函数，故只考虑 $x\ge 0$，设 $t=x^2(t\ge 0)$，则 $g(t)=|t-1|+|t-2|+a|t-3|$，显然 $a\ge 0$ 时均可以转化为平底锅函数或者尖尖角函数，都有最小值，$a<0$ 时，$a=-1$，构成开口向上的折线，有最小值，$a=-2$ 时，构成两个Z字函数相加，依然有最小值，当 $a<-2$ 时，构成开口向下的折线，有最大值，故答案为 $[-2,+\infty)$．

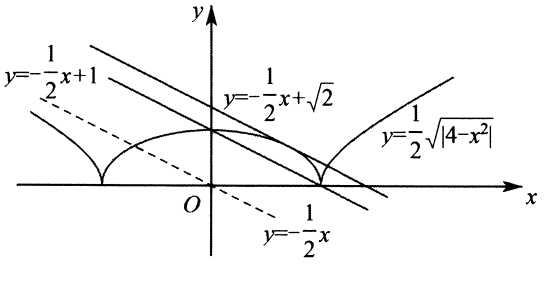
绝对值函数达标训练（适合高三一轮）

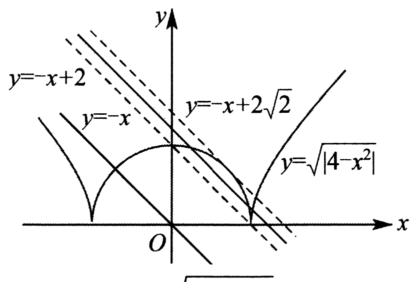
1．D【解析】由于

$S_n=|n-1|+2|n-2|+3|n-3|+\cdots+10|n-10|=|n-1|+(|n-2|+|n-2|)+(|n-3|+|n-3|+|n-3|)+\cdots+(|n-10|+\cdots+|n-10|)$，共计55项的和，根据尖尖角函数性质，当 n 从1到10取值时，n 在中间取值时，S_n 最小．从 $|n-1|$ 到最后一个 $|n-6|$，共计21项，从 $|n-8|$ 到 $|n-10|$，共计27项，而 $|n-7|$ 共计有7项，故当 $n=7$ 时，S_n 最小为

$6+2\times5+3\times4+4\times3+5\times2+6\times1+0+8\times1+9\times2+10\times3=112$．故选D．

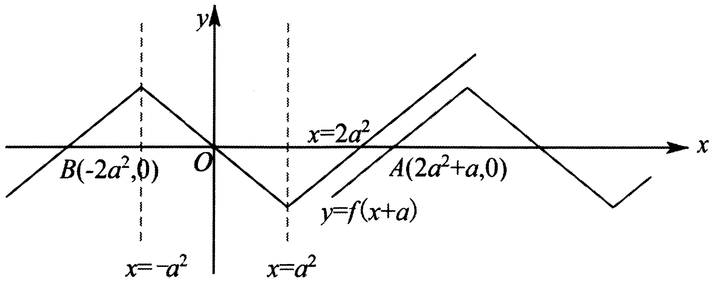
2．B【解析】法一：由题意作图象如下，$y=\frac{1}{2}\sqrt{|4-x^2|}$ 的图象由椭圆的一上部分与双曲线的上部分构成，故直线 $l:y=-\frac{x}{2}+m$ 与曲线 $C:y=\frac{1}{2}\sqrt{|4-x^2|}$ 有且仅有三个交点的临界直线有，当 $y=-\frac{x}{2}+m$ 过点 $(2,0)$ 时，即 $0=-1+m$，故 $m=1$；当直线 $y=-\frac{x}{2}+m$ 与椭圆的上部分相切，即 $y'=\frac{-2x}{4\sqrt{4-x^2}}=-\frac{1}{2}$，即 $x=\sqrt{2}$，$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，此时，$m=\sqrt{2}$．故选B．





法二：（仿射换元法）令 $y'=2y$，即 $y'=-x+2m$（斜率为 -1 的直线）与 $y'=\sqrt{|4-x^2|}$（原点为圆心半径为2的上半圆，和渐近线为 $y=\pm x$ 双曲线上半部分）有三个交点，如右图可得 $2<2m<2\sqrt{2}$，故选B．

3．C【解析】当 $x>0$ 时，做出函数 $f(x)=|x-a^2|-a^2$ 的图象，因为 $a^2\ge 0$，且该函数图象过原点，关于 $x=a^2$ 对称，顶点为 $(a^2,-a^2)$，结合该函数还是奇函数，作出图象如下：



而函数 $y=f(x-a)$ 的图象是将 $y=f(x)$ 像右平移 $|a|$ 个单位得到的，要使任意的 $x\in R$，恒有 $f(x-a)\le f(x)$，只需 $f(x-a)$ 的图象恒在 $f(x)$ 的图象下方或部分重合，所以只需 $y=f(x-a)$ 与 x 轴最右边的交点在 A 在 $y=f(x)$ 与 x 轴最右边交点 B 的右边或重合”．因此应该有 $2a^2-a\le -2a^2$，即 $4a^2-a\le 0$，解得 $0<a\le\frac{1}{4}$．故选 C.

4．A 【解析】法一：当 $m=0$ 时，$f(x)=x^2-2x+|x^2-2x+2|=(x-1)^2-1+|(x-1)^2+1|$，

当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最小值 0；$f(1)=1+m-2+|1-m-2+2|=m-1+|m-1|$，

当 $m\le 1$ 时，可得 $f(1)=m-1+1-m=0$，

当 $m>1$ 时，$f(1)=2(m-1)>0$，$f(x)=(x-1)^2-1+mx+|(x-1)^2+1-mx|$，

当 $(x-1)^2\ge mx-1$ 时，$f(x)=2(x-1)^2\ge 0$，当 $x=1$ 时，取得最小值 0，此时 $m\le 1$；

当 $(x-1)^2<mx-1$ 时，$f(x)=2(mx-1)$，由题意可得 $2(mx-1)\ge 0$ 恒成立，故选 A.

法二：令 $t=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$，$f(t)=t-2+mx+|t-mx|\ge 0\Rightarrow t+mx+|t-mx|\ge 2$ 恒成立，由于 $t\ge 1$，当仅当 $x=1$ 时等号成立，当 $t\ge mx$ 时，$f(t)=2t-2\ge 0\Rightarrow t=1$ 时等号成立，故只需 $x=1$ 时，$t\ge mx$，即 $m\le 1$，故选 A.

5．B 【解析】法一：对任意的 $x\in(1,a)$，$x^2>x$，所以

$f(x)=2|x^2-x+a|+|x^2-4x+a|=2(x^2-x+a)+|x^2-4x+a|$，

不等式 $f(x)\ge(a-1)x$ 化为：$2x^2-2x+2a+|x^2-4x+a|\ge(a-1)x$，即 $|x^2-4x+a|\ge -2x^2+(a+1)x-2a$，

所以 $x^2-4x+a\ge -2x^2+(a+1)x-2a$，或 $x^2-4x+a\le 2x^2-(a+1)x+2a$，

即 $3x^2-(a+5)x+3a\ge 0$①或 $x^2-(a-3)x+a\ge 0$②在 $x\in(1,a)$ 时恒成立，

（1）当 $3x^2-(a+5)x+3a\ge 0$①在 $x\in(1,a)$ 时恒成立时，令 $g(x)=3x^2-(a+5)x+3a$，$x\in(1,a)$，

因为 $x\in(1,a)$，所以 $1<\frac{a+5}{6}<a$，所以由 $g(x)\ge 0$ 恒成立有，$\begin{cases}\frac{a+5}{6}<a\\ g(\frac{a+5}{6})\ge 0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}a>1\\ 1\le a\le 25\end{cases}$，所以 $1<a\le 25$；（2）当 $x^2-(a-3)x+a\ge 0$ 在 $x\in(1,a)$ 时恒成立时，令 $g(x)=x^2-(a-3)x+a$，$x\in(1,a)$

因为 $x\in(1,a)$，所以 $\frac{a-3}{2}>a$，所以由 $g(x)\ge 0$ 恒成立有，$\begin{cases}\frac{a-3}{2}\le 1\\ g(1)\ge 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{a-3}{2}>1\\ g(\frac{a-3}{2})\ge 0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}a\le 5\\ 4\ge 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>5\\ 1\le a\le 9\end{cases}$，所以 $a\le 9$，又 $a>1$，即 $1<a\le 9$；所以由（1）（2）得实数 a 的取值范围为 $(1,25]$．故选 B.

法二：(构造尖尖角函数)，$f(x)\ge(a-1)x\Leftrightarrow 2|x+\frac{a}{x}-1|+|x+\frac{a}{x}-4|\ge a-1$，令 $x+\frac{a}{x}=t\ge 2\sqrt{a}>2$，

$g(t)=2|t-1|+|t-4|$，显然 $g(t)$ 在 $[1,+\infty)\uparrow$，当 $2<t\le 4$ 时，即 $a\le 4$，

$g(t)_{\min}=g(2\sqrt{a})=2+2\sqrt{a}\ge a-1\Rightarrow a\le 9$，显然成立，当 $4<t$，即 $a>4$ 时，

$g(t)_{\min}=g(2\sqrt{a})=6\sqrt{a}-6\ge a-1\Rightarrow a\le 25$，故选 B.

6. A 【解析】法一：$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|=|a_1+1|+|a_2+1|+\ldots+|a_n+1|=|a_1-1|+|a_2-1|+\ldots+|a_n-1|=98$，

可得等差数列不为常数列，且 $\{a_n\}$ 中的项一定满足 $\begin{cases}a_n>0\\a_{n-1}<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_n<0\\a_{n-1}>0\end{cases}$，且项数为偶数，设 $n=2k$，

$k\in N^*$，等差数列的公差设为 d，不妨设 $\begin{cases}a_{k+1}>0\\a_k<0\end{cases}$，则 $a_1<0$，$d>0$，且 $a_k+1\le 0$，$a_k-1<0$ 即 $a_k\le -1$，

由 $a_{k+1}-1\ge 0$，则 $-1+kd\ge a_k+kd\ge 1$，即 $kd\ge 2$，即有 $d\ge 2$，则

$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|=-a_1-a_2-\ldots-a_k+a_{k+1}+\ldots+a_{2k}=-(ka_1+\frac{k(k-1)}{2}d)+k(a_1+kd)+\frac{k(k-1)}{2}d$

$=k^2d=98$，可得 $98\ge 2k^2$，即有 $k\le 7$，即有 k 的最大值为 7，n 的最大值为 14．故选 A.

法二：构造平底锅函数，$f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|+\cdots+|x-a_n|$，由于 $f(0)=f(1)=f(-1)$，故只能为平底锅函数（尖尖角函数只能有两个函数值相等），所以 $n=2k$，$a_k\le -1$ 且 $a_{k+1}\ge 1$，$|d|\ge 2$，不妨令 $d\ge 2$，故

$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|=-(a_1+a_2+\cdots a_k)+a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}=S_{2k}-2S_k=2ka_{\frac{2k+1}{2}}-2ka_{\frac{k+1}{2}}=k^2d=98$，由于：

$d\ge 2$，所以：$k^2d=98\ge 2k^2$，解得：$k^2\le 49$，故：$k\le 7$，$n\le 14$．故选 A.

7. C 【解析】函数 $y=|5^x-1|$ 的图象如图：设 $x_1<x_2$，所以 $5^{x_1}=1-k$，$5^{x_2}=1+k$，可得 $x_1=\log_5(1-k)<0$，

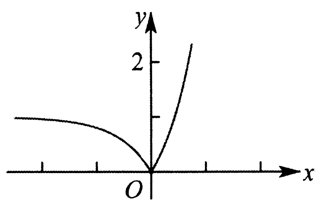
$x_2=\log_5(1+k)>0$，又设 $x_3<x_4$，可得 $x_3=\log_5(1-k^2)<0$，$x_4=\log_5(1+k^2)>0$，

$|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|=(x_2+x_4)-(x_1+x_3)=\log_5(1+k)(1+k^2)-\log_5(1-k)(1-k^2)=\log_5\frac{1+k^2}{1+k^2-2k}$，

由 $\frac{1+k^2}{1+k^2-2k}=\frac{1}{1-\frac{2k}{1+k^2}}$，由 $\frac{1}{2}\le k\le\frac{3}{4}$，可得 $\frac{2k}{1+k^2}=\frac{2}{k+\frac{1}{k}}$，$k+\frac{1}{k}$ 在 $\frac{1}{2}\le k\le\frac{3}{4}$ 递减，可得 $k+\frac{1}{k}\in[\frac{25}{12},\frac{5}{2}]$，

即有 $\frac{2k}{1+k^2}\in[\frac{4}{5},\frac{24}{25}]$，$1-\frac{2k}{1+k^2}\in[\frac{1}{25},\frac{1}{5}]$，可得 $\log_5\frac{1+k^2}{1+k^2-2k}\in[1,2]$，即有所求最小值为 1.

故选 C.



8. D 【解析】若 $x\in[-1,0]$，则 $-x\in[0,1]$，则 $f(-x)=1-2|-x-\frac{1}{2}|=1-2|x+\frac{1}{2}|$，因为 $f(x)$ 是奇函数，

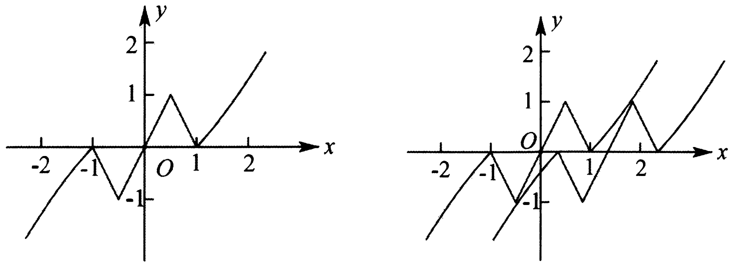
所以 $f(-x)=1-2|x+\frac{1}{2}|=-f(x)$，则 $f(x)=2|x+\frac{1}{2}|-1$，$x\in[-1,0]$，若 $x\in[1,+\infty)$，则 $-x\in(-\infty,-1]$，

则 $f(-x)=1-e^{-1+x}=-f(x)$，则 $f(x)=e^{-1+x}-1$，$x\in[1,+\infty)$，作出函数 $f(x)$ 的图象如图：

当 $m>0$ 时，$f(x+m)$ 的图象向左平移，此时 $f(x+m)>f(x)$ 有解，满足条件.

当 $m<0$ 时，$f(x+m)$ 的图象向右平移，当 $f(x+m)$ 的图象与 $f(x)$ 在 $x>1$ 相切时，$f'(x)=e^{x-1}$，此时对应直线斜率 $k=2$，由 $e^{x-1}=2$，即 $x-1=\ln 2$，得 $x=\ln 2+1$．此时 $y=e^{x-1}-1=e^{\ln 2+1-1}-1=2-1=1$，

即切点坐标为 $(1+\ln 2, 1)$，设直线方程为 $y=2(x-a)$，此时 $1=2(1+\ln 2-a)$，即 $\frac{1}{2}=1+\ln 2-a$，得 $a=\frac{1}{2}+\ln 2$，$0<-m<\frac{1}{2}+\ln 2$，得 $-\frac{1}{2}-\ln 2<m<0$，$-\frac{1}{2}-\ln 2<m<0$ 或 $m>0$，综上 m 的取值范围是 $(-\frac{1}{2}-\ln 2, 0)\cup(0,+\infty)$，故选 D.



9.【解析】法一：由 $|(\frac{i}{99})^2-(\frac{i-1}{99})^2|=\frac{1}{99}\times\frac{2i-1}{99}$，故 $I_1=\frac{1}{99}(\frac{1}{99}+\frac{3}{99}+\frac{5}{99}+\ldots+\frac{2\times 99-1}{99})=\frac{1}{99}\times\frac{99^2}{99}=1$，

由 $2|\frac{i}{99}-\frac{i-1}{99}-(\frac{i}{99})^2+(\frac{i-1}{99})^2|=2\times\frac{1}{99}|\frac{99-(2i-1)}{99}|$，故 $I_2=2\times\frac{1}{99}\times\frac{58(98+0)}{2\times 99}=\frac{98}{99}\times\frac{100}{99}<1$，

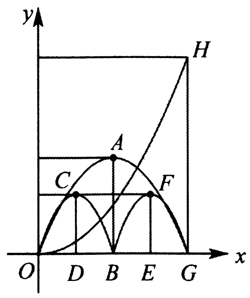
$I_3=\frac{1}{3}[||\sin 2\pi\bullet\frac{1}{99}|-|\sin 2\pi\bullet\frac{0}{99}||+||\sin 2\pi\bullet\frac{2}{99}|-|\sin 2\pi\bullet\frac{1}{99}||+\ldots+||\sin 2\pi\bullet\frac{99}{99}|-|\sin 2\pi\bullet\frac{98}{99}||]$

$=\frac{1}{3}(2\sin 2\pi\bullet\frac{25}{99}-2\sin 2\pi\bullet\frac{74}{99})>1$，故 $I_2<I_1<I_3$，故选 B.

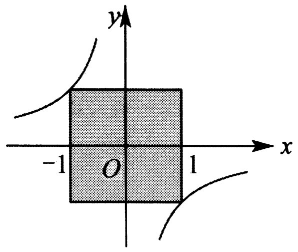
法二：(曼哈顿距离) 不妨取一个区间 $x\in[0,1]$，显然 $|a_1-a_0|+|a_2-a_1|\cdots+|a_{99}-a_{98}|=1$，目标 I_k 进行变形，即 $I_k=|f_k(a_1)-f_k(a_0)|+|f_k(a_2)-f_k(a_1)|\cdots+|f_k(a_{99})-f_k(a_{98})|=$

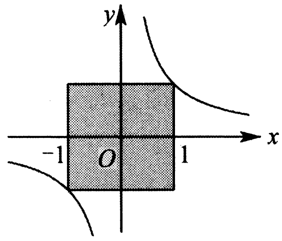
$|f_k(a_1)-f_k(a_0)|+|f_k(a_2)-f_k(a_1)|\cdots+|f_k(a_{99})-f_k(a_{98})|+|a_1-a_0|+|a_2-a_1|\cdots+|a_{99}-a_{98}|-1$ 问题的实质表示质点从原点出发，沿函数图像到达点 $(1,0)$，相邻两个点 a_i 与 a_{i-1} 之间的“曼哈顿距离”之和，由于水平方向所走的路程均为 1，故只需比较竖直方向上所走路程之和大小的问题，如图得：

$I_1=|GH|=1$，$I_2<2|AB|=1$，$I_3\approx 4|CD|=\frac{4}{3}>1$．故 $I_2<I_1<I_3$，故选 B.



10.【解析】$|x+1|+|y+1|+|x-1|+|y-1|\le 4$ 可以理解为点 $P(x,y)$ 到点 $A(-1,-1)$ 和点 $B(1,1)$ 的曼哈顿距离小于等于 4，由取等条件知 $-1\le x\le 1$，$-1\le y\le 1$，根据反比例函数性质，画出可行域如图，得 $-1\le xy\le 1$，





所以xy的取值范围为：$[-1,1]$．故答案为$[-1,1]$．

11.【解析】法一：由题意可得，$f(x)=|x-2|+|x-3|$的最小值大于或等于$\dfrac{|a+1|-|2a-1|}{|a|}$，

而由$|x-2|+|x-3|\geq|(x-2)-(x-3)|=1$，可得$1\geq\dfrac{|a+1|-|2a-1|}{|a|}$，即$|a|+|2a-1|\geq|a+1|$．

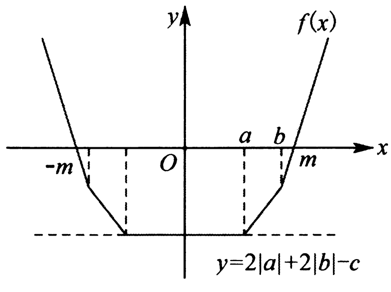
由此可得①$\begin{cases}a<-1\\-a+1-2a\geq-a-1\end{cases}$，或②$\begin{cases}-1\leq a<0\\-a+1-2a\geq a+1\end{cases}$或，③$\begin{cases}0\leq a<\dfrac{1}{2}\\a+1-2a\geq a+1\end{cases}$，或

④$\begin{cases}a\geq\dfrac{1}{2}\\a+2a-1\geq a+1\end{cases}$．解①求得$a<-1$，解②求得$-1\leq a<0$，解③求得$a=0$，解④求得$a\geq1$，

综上可得，a的范围是$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$，故答案为：$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$．

法二：由题意可得，$1\geq\dfrac{|a+1|-|2a-1|}{|a|}$，即$|a|+|2a-1|\geq|a+1|\Rightarrow|t-1|+|2t-3|\geq|t|$（令$t=a+1$），则一定有$|1-\dfrac{1}{t}|+|2-\dfrac{3}{t}|\geq1$恒成立，故$\dfrac{1}{t}\geq1$或者$\dfrac{1}{t}\leq\dfrac{1}{2}$，$a+1\geq2$或$a+1\leq1$，故答案为$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$．

12.【解析】法一：因为$f(-x)=|x-a|+|x+a|+|x-b|+|x+b|-c=f(x)$，故函数$f(x)$为偶函数．又因为$f(x)=|x-a|+|x+a|+|x-b|+|x+b|-c=|a-x|+|x+a|+|b-x|+|x+b|-c\geq2|a|+2|b|-c$，由于存在正常数$m$，使$f(m)=0$，故$2|a|+2|b|-c\leq0$．（否则，当$2|a|+2|b|-c>0$时，不在正常数$m$，使$f(m)=0$）．不妨设$0<a<b$，①当$-a\leq x\leq a$时，$f(x)=2|a|+2|b|-c=2a+2b-c$，②当$b>x>a$时，$f(x)=2x+2b-c$，③当$x>b$时，$f(x)=4x-c$，再根据此函数为偶函数，预想关于$y$轴对称，画出函数$f(x)$在$R$上的图象，如图所示：数形结合可得不等式$f(x)<f(m)$的解集是$(-m,m)$，故答案为$(-m,m)$．



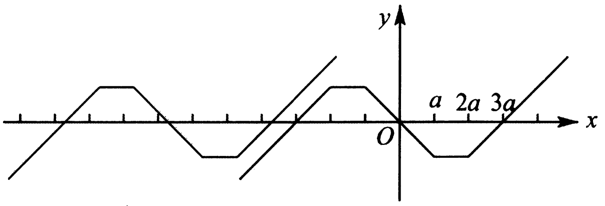
法二：根据平底锅函数性质，令$0<a<b<c$，此函数为偶函数，且$-a\leq x\leq a$为平底锅锅底，$a\leq x\leq b$时斜率为1，$-b\leq x\leq-a$时斜率为-1，$x\geq b$，$x\leq-b$时斜率分别为2和-2，且存在$f(m)=0$，故$f(-m)=0$，不等式$f(x)<f(m)$的解集是$(-m,m)$，故答案为$(-m,m)$．

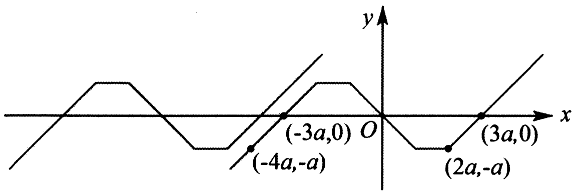
13.【解析】法一：$f(x-2)-f(x)\geq0$等价为$f(x)\leq f(x+2)$恒成立，当$x\geq0$时，

$f(x)=\frac{1}{2}(|x-a|+|x-2a|-3|a|)$．若 $a\le 0$，则当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}(x-a+x-2a+3a)=x$，

因为 $f(x)$ 是奇函数，所以若 $x<0$，则 $-x>0$，则 $f(-x)=-x=-f(x)$，则 $f(x)=x, x<0$，

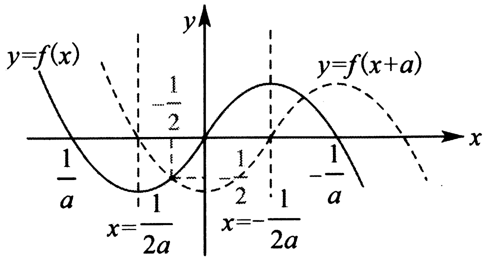
综上 $f(x)=x$，此时函数为增函数，则 $f(x)\le f(x+2)$ 恒成立，若 $a>0$，若 $0\le x\le a$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}[-x+a-(x-2a)-3a]=-x$；当 $a<x\le 2a$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}[x-a-(x-2a)-3a]=-a$；当 $x>2a$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}(x-a+x-2a-3a)=x-3a$．即当 $x\ge 0$ 时，函数的最小值为 $-a$，由于函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)$ 的最大值为 a，作出函数的图象如图：故函数 $f(x)$ 的图象不能在函数 $f(x+2)$ 的图象的上方，结合图可得 $3a-2\le -3a$，即 $a\le\frac{1}{3}$，求得 $0<a\le\frac{1}{3}$，综上 $a\le\frac{1}{3}$．故答案为 $(-\infty,\frac{1}{3}]$．

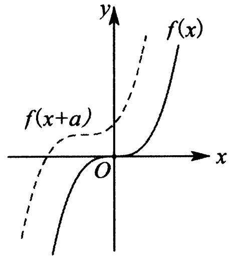




法二：寻找同位最值点，或者同位零点，如上图所示，$(3a,0)$ 的同位零点为 $(-3a,0)$，$(2a,-a)$ 的同位最值为 $(-4a,-a)$，$f(x)\le f(x+2)$ 恒成立，即平移的单位大于等于同位零点（同位最值）距离，$6a\le 2$，故答案为 $(-\infty,\frac{1}{3}]$．

14．【解析】函数 $f(x)=x(1+a|x|)=\begin{cases}ax^2+x, x\ge 0\\ -ax^2+x, x<0\end{cases}$，关于 x 的不等式 $f(x+a)<f(x)$ 的解集为 A，若 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\subseteq A$，则在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上，函数 $y=f(x+a)$ 的图象应在函数 $y=f(x)$ 的图象的下方．当 $a=0$ 时，显然不满足条件．当 $a>0$ 时，函数 $y=f(x+a)$ 的图象是把函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 a 个单位得到的，结合图象（右上方）可得不满足函数 $y=f(x+a)$ 的图象在函数 $y=f(x)$ 的图象下方．当 $a<0$ 时，如图所示，要使在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上，函数 $y=f(x+a)$ 的图象在函数 $y=f(x)$ 的图象的下方，只要 $f(-\frac{1}{2}+a)<f(-\frac{1}{2})$ 即可，即 $-a(-\frac{1}{2}+a)^2+(-\frac{1}{2}+a)<-a(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}$，化简可得 $a^2-a-1<0$，解得 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，故此时 a 的范围为 $(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0)$．综上可得，a 的范围为 $(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0)$，故答案为 $(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0)$．





15．【解析】法一：当 $x<1$ 时，$f(x)=1-x+2m-mx+18-6x=19+2m-(m+7)x$，

当 $1\le x<2$ 时，$f(x)=x-1+2m-m$，$x+18-6x=17+2m-(m+5)x$，$f(1)=12+m$，

当 $2\le x<3$ 时，$f(x)=x-1+mx-2m+18-6x=17-2m+(m-5)x$，$f(2)=7$，

当 $x\ge 3$ 时，$f(x)=x-1+mx-2m+6x-18=-19-2m+(m+7)x$，$f(3)=m+2$，

若函数 $f(x)=|x-1|+m|x-2|+6|x-3|$ 在 $x=2$ 时取得最小值，

则 $\begin{cases}-(m+7)\le 0\\-(m+5)\le 0\\m-5\ge 0\\m+7\ge 0\\m+2\ge 7\\12+m\ge 7\end{cases}$ 解得 $m\ge 5$，故 m 的取值范围为 $[5,+\infty)$．故答案为 $[5,+\infty)$．

法二：根据平底锅函数和尖尖角函数性质，可得：$x=2$ 为中间段（中间点），显然 $m\ge 6$，$m=6$ 时，$x=2$ 为尖尖角函数的尖尖角，当 $m<6$ 时，取 $m=5$，依次的零点为1、2、2、2、2、2、3、3、3、3、3、3，此时为平底锅函数，最小值在 $x\in[2,3]$ 这一段，也满足题意，当 $m=4$ 时，按照零点排序，此尖尖角函数最小值为 $x=3$，矛盾，故答案为 $[5,+\infty)$．

16.【解析】因为 $f(x)=|x+1|+|x+2|+\cdots+|x+2020|+|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-2020|$，

所以 $f(-x)=|-x+1|+|-x+2|+\cdots+|-x+2020|+|-x-1|+|-x-2|+\cdots+|-x-2020|$

$=|1-x|+|2-x|+\cdots+|2020-x|+|x+1|+|x+2|+\cdots+|x+2020|=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，故（1）正确．根据平底锅函数的几何意义可得

$f(x)=(|x+1|+|x-1|)+(|x+2|+|x-2|)+(|x+3|+|x-3|)+\cdots+(|x+2020|+|x-2020|)$

$\ge 2+4+6+\cdots+4040=2020\times 2021$，当且仅当 $-1\le x\le 1$ 时，取等号．所以不等式 $f(x)<2019\times 2020$ 的解集为 ϕ，故（2）正确．由于平底锅底部为 $[-1,1]$，故 $f(\frac{1}{2})=f(1)$，显然函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是增函数，故（3）不正确．由于 $f(a^2-5a+6)=f(a-2)$，且函数 $f(x)$ 为偶函数，所以 $a^2-5a+6=a-2$，或 $a^2-5a+6=-(a-2)$，或 $\begin{cases}-1\le a^2-5a+6\le 1\\-1\le a-2\le 1\end{cases}$．解得 $a=2$，或 $a=4$，或 $\frac{5-\sqrt{5}}{2}\le a\le 3$，故方程 $f(a^2-5a+6)=f(a-2)$ 有无数个实根，故（4）正确．故答案为：（1）、（2）、（4）．

17.【解析】因为 $|x|+|x+2|\ge|x-(x+2)|=2$，所以关于 x 的不等式 $|x|+|x+2|\le a$ 的解集不是空集，则 $a\ge 2$．

不等式 $|x^2+x-1|+|x^2+x+1|\ge\dfrac{|a+1|-|3a-1|}{|a|}$ 对任意实数 a 恒成立 $\Leftrightarrow$ 不等式

$|x^2+x-1|+|x^2+x+1|\ge 4$，令 $x^2+x=t$，即解不等式 $|t-1|+|t+1|\ge 4$，$\Rightarrow\begin{cases}t\ge 1\\2t\ge 4\end{cases}\Rightarrow t\ge 2$，或

$\begin{cases}-1<t<1\\2\ge 4\end{cases}\Rightarrow t\in\phi$，或 $\begin{cases}t\le -1\\-2t\ge 4\end{cases}\Rightarrow t\le -2$ 所以 $x^2+x\ge 2\Rightarrow x\ge 1$ 或 $x\le -2$，或 $x^2+x\le -2$，$\Rightarrow x\in\phi$，

综上实数 x 取值范围是 $(1,+\infty)\cup(-\infty,-2)$，故答案为 $[2,+\infty)$，$(1,+\infty)\cup(-\infty,-2)$

18.【解析】法一：因为

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|=|a_1+1|+|a_2+1|+|a_3+1|+|a_4+1|=|a_1-2|+|a_2-2|+|a_3-2|+|a_4-2|$，

所以 a_1，a_2，a_1+1，a_2+1，a_1-2，a_2-2 符号相同，a_3，a_4，a_3+1，a_4+1，a_3-2，a_4-2 符号相同．因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，所以 $\begin{cases}x_2+1\ge 0\\x_2-2\ge 0\\x_3+1\le 0\\x_3-2\le 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2+1\le 0\\x_2-2\le 0\\x_3+1\ge 0\\x_3-2\ge 0\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x_2\ge 2\\x_3\le -1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2\le -1\\x_3\ge 2\end{cases}$ 解得：$d\le -3$ 或

$d\geq 3$．故答案为 $d\leq -3$ 或 $d\geq 3$．

法二：（构造平底锅函数）$f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|+|x-a_4|$，由于 $f(0)=f(1)=f(-2)$，故为平底锅函数，$a_2\leq -2$ 且 $a_3\geq 1$，或者 $a_3\leq -2$ 且 $a_2\geq 1$，即 $|d|\geq 3$（如果 $|d|<3$，$f(0)$、$f(1)$、$f(-2)$ 不可能同时出现在平底锅的平底位置，锅底宽度要小于等于公差），故答案为：$d\leq -3$ 或 $d\geq 3$．

19.【解析】法一：由去绝对值可得 $f(x)$ 的 $x\in[-1,1]$ 的最大值为 $f(-1)$，$f(1)$，$f(\frac{1}{2})$ 或 $f(-\frac{1}{2})$ 取得．

最大值记为 $P(s,t)\geq f(-1)=|1+s|+|t-1|$，$P(s,t)\geq f(1)=|1+s|+|t+1|$，

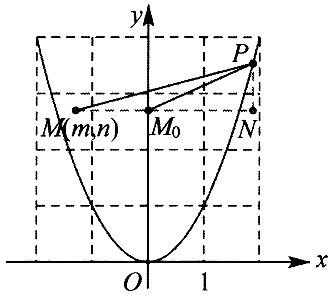
$P(s$，$P(s,t)\geq f(\frac{1}{2})=|\frac{1}{4}+s|+|t+\frac{1}{2}|$，$P(s,t)\geq f(-1)=|\frac{1}{4}+s|+|t-\frac{1}{2}|$，

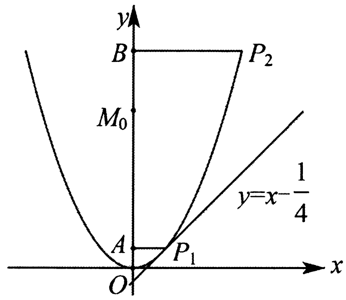
上面四个不等式相加，可得 $4P(s,t)\geq|1+s|+|t-1|+|1+s|+|t+1|+|\frac{1}{4}+s|+|t+\frac{1}{2}|+|\frac{1}{4}+s|+|t-\frac{1}{2}|$

$=2|1+s|+|t-1|+|t+1|+2|\frac{1}{4}+s|+|t+\frac{1}{2}|+|t-\frac{1}{2}|\geq 2|1-\frac{1}{4}|+2+1=\frac{9}{2}$ 所以 $P(s,t)\geq\frac{9}{8}$，故答案为 $\frac{9}{8}$．

法二：利用曼哈顿距离，$f(x)=|x^2-(-s)|+|x-(-t)|=|x^2-n|+|x-m|$，这个目标函数式可以理解为点 $P(x,x^2)$ 与点 $M(m,n)$ 之间的"曼哈顿距离" $d_{MP}=|MN|+|PN|$，如左图，显然由对称性，当 $M(m,n)$ 在 y 轴上，即 $M_0(0,n)$ 时，d_{MP} 取得最大值的最小值，即 $d_{\max}=|x^2-n|+x$，则曼哈顿距离的最大值一定出现在抛物线 $y=x^2$ 切线斜率为 1 的位置 $P_1(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ 和抛物线端点 $P_2(1,1)$ 中，当

$|M_0A|+|AP_1|=|M_0B|+|BP_2|$，即 $\frac{1}{2}+n-\frac{1}{4}=1+1-n\Rightarrow n=\frac{7}{8}$ 时，曼哈顿距离取得最大值的最小值，即 $\frac{9}{8}$．

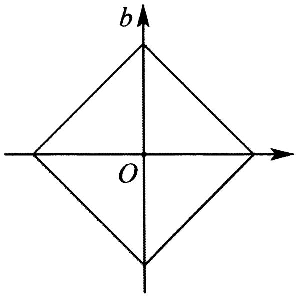


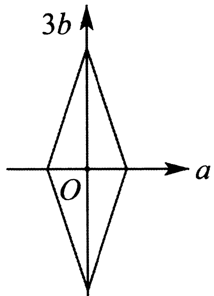


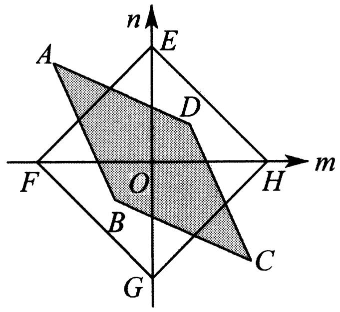
20.【解析】法一：$|a\sin x+b|\leq 1$ 恒成立，只需 $\begin{cases}|a+b|\leq 1\\|-a+b|\leq 1\end{cases}$，故点 (a,b) 位于一个以 $(0,0)$ 为中心，2 为对角线的正方形区域内，如图，则 $|a+3b|+|a-3b|$ 可以理解为原点到点 $(a,3b)$ 与 $(a,-3b)$ 的曼哈顿距离之和，则点 $P(a,3b),Q(a,-3b)$ 在原点为中心，对角线长度为 2 和 6 的菱形内，易知在 $a=0,b=\pm 1$ 时取得最大值 6．

法二：令 $a+3b=m,a-3b=n$，则，所以 $a=\frac{m+n}{2},b=\frac{m-n}{6}$ $|a\sin x+b|=|\frac{m+n}{2}\sin x+\frac{m-n}{6}|$，

要使 $|\frac{m+n}{2}\sin x+\frac{m-n}{6}|\leq 1$ 恒成立，只需 $\begin{cases}|\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{6}|\leq 1\\|-\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{6}|\leq 1\end{cases}$，即 $\begin{cases}|2m+n|\leq 3\\|m+2n|\leq 3\end{cases}$，如下图所示，作出可行域为菱形 ABCD，令 $Z=|m|+|n|$，其表示的区域为如图所示的正方形 $EFGH$，故可知当正方形经过点 A $(-3,3)$ 时，$Z_{\max}=6$．







21.【解析】(1) 当 $x\in[0,1]$ 时，$g(a^x+2)>1$ 恒成立，即 $x\in[0,1]$ 时，$\log_a(a^x+2)>1$ 恒成立，因为 $a>1$，所以 $a^x+2>a$ 恒成立，即 $a-2<a^x$ 在区间 $[0,1]$ 上恒成立，所以 $a-2<1$，即 $a<3$，所以 $1<a<3$．即 a 的取值范围是 $(1,3)$．

(2) 由已知 $f(x)=|\log_a x|$，可知 $f(x)$ 在 $[1,a^2]$ 上单调递增，在 $[\frac{1}{a},1]$ 上单调递减，对于 $(\frac{1}{a},a^2)$ 内的任意一个取数方法 $\frac{1}{a}=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=a^2$，当存在某一个整数 $k\in\{1,2,3,\cdots,n-1\}$，使得 $x_k=1$ 时，$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=[f(x_0)-f(x_1)]+[f(x_1)-f(x_2)]+\cdots+[f(x_{k-1})-f(x_k)]$

$+[f(x_{k+1})-f(x_k)]+[f(x_{k+2})-f(x_{k+1})]+\cdots+[f(x_n)-f(x_{n-1})]=f(\frac{1}{a})-f(1)+f(a^2)-f(1)=1+2=3$．

当对于任意的 $k\in\{0,1,2,3,\cdots,n-1\}$，$x_k\neq1$ 时，则存在一个实数 k 使得 $x_k<1<x_{k+1}$，

此时

$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=[f(x_0)-f(x_1)]+[f(x_1)-f(x_2)]+\cdots+[f(x_{k-1})-f(x_k)]$

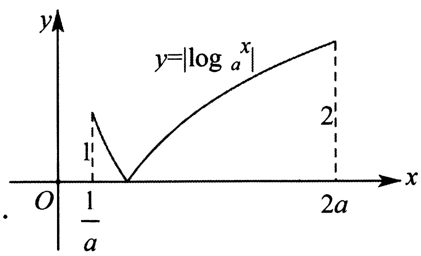
$+|f(x_{k+1})-f(x_k)|+[f(x_{k+2})-f(x_{k+1})]+\cdots+[f(x_n)-f(x_{n-1})]$

$=f(x_0)-f(x_k)+|f(x_k)-f(x_{k+1})|+f(x_n)-f(x_{k+1})$，(*)

当 $f(x_k)>f(x_{k+1})$）时，(*) 式 $=f(x_n)+f(x_0)-2f(x_{k+1})<3$，

当 $f(x_k)<f(x_{k+1})$ 时，(*) 式 $=f(x_n)+f(x_0)-2f(x_k)<3$，

当 $f(x_k)=f(x_{k+1})$ 时，(*) 式 $=f(x_n)+f(x_0)-f(x_k)-f(x_{k+1})<3$．



综上，对于 $(\frac{1}{a},a^2)$ 内的任意一个取数方法 $\frac{1}{a}=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=a^2$，均有 $\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\le3$．所以存在常数 $M\ge3$，使 $\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\le M$ 恒成立，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{a},a^2]$ 上具有性质 P．此时 M 的最小值为 3．

注意：此题就是 $f(x)=|\log_a x|$ 在区间 $[\frac{1}{a},a^2]$ 上的曼哈顿距离减去水平宽度.

专题 6　周期函数与类周期函数

达标训练（适合高一）

1.【解析】根据题意，定义在 R 内的奇函数 $f(x)$ 满足：对任意 $x\in R$ 都有 $f(x+1)=f(3-x)$，则 $f(x+1)=f(3-x)=-f(x-3)$，变形可得 $f(x+4)=-f(x)$，则有 $f(5)=-f(1)$，$f(6)=-f(2)$，$f(7)=-f(3)$，$f(8)=-f(4)$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(8)=0$，又由 $f(x+4)=-f(x)$，则有 $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$，即函数 $f(x)$ 是周期为 8 的周期函数，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2019)=[f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)]$，又由奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)+f(3-x)=0$，令 $x=1$ 可得：$f(2)+f(2)=0$，即 $f(2)=0$，令 $x=0$ 可得：$f(1)+f(3)=0$，则 $f(1)+f(2)+f(3)=0$，故 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2019)=0$；故选 B.

2.【解析】由题意可知 $f(-x)=-f(x)$，因为 $f(x+3)=f(x-3)$ 即 $f(x+6)=f(x)$，故函数的周期 $T=6$，又当 $x\in(0,3)$ 时，$f(x)=2^x-1$，则 $f(2020)=f(-2)=-f(2)=-3$．故选 C.

3.【解析】函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，满足 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，$x\in(-\frac{3}{2},0)$ 时，$f(x)=\log_2(-3x+1)$，所以 $f(-2019)=-f(2019)=-f(-1)=-\log_2 4=-2$．故选 C.

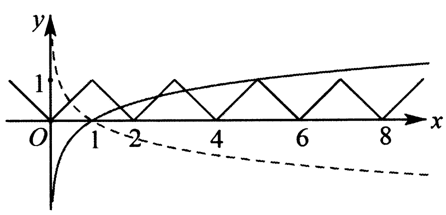
4.【解析】因为函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, x\geq 2\\ f(x+2), x<2\end{cases}$，所以 $f(1)=f(3)=2\times 3+1=7$，$f(2)=2\times 2+1=5$，所以 $f(1)-f(2)=7-5=2$．故选 B.

5.【解析】法一　任意 $x\in A$ 恒有 $f(x)+f(2-x)=2$，A：若 $f(x)=2-x$，则 $f(x)+f(2-x)=2-x+2-(2-x)=2$，故 A 正确；B：若 $f(x)=(x-1)^2$，则 $f(x)+f(2-x)=2(x-1)^2$，故 B 错误；C：若 $f(x)=\frac{x}{x-1}$，则 $f(x)+f(2-x)=\frac{x}{x-1}+\frac{2-x}{2-x-1}=2$，故 C 正确；D：若 $f(x)=(x-2)^3$，则 $f(x)+f(2-x)=(x-2)^3+(-x)^3\neq 2$，故 D 错误，故选 A，C

法二　因为任意 $x\in A$ 恒有 $f(x)+f(2-x)=2$，所以 $f(x)$ 的图象关于 $(1,1)$ 中心对称，结合选项可知，$f(x)=2-x$，过 $(1,1)$ 的直线，符合题意；根据反比例函数及图象的平移可知，$f(x)=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$ 关于 $(1,1)$ 对称，符合题意；故选 AC.

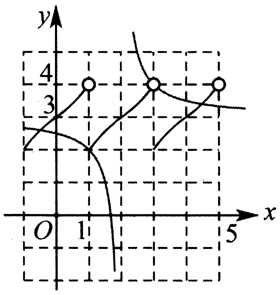
6.【解析】由函数 $f(x)$ 为偶函数可得，$f(-3)=f(3)$，因为 $f(x+6)=f(x)+f(3)$，令 $x=-3$ 可得，$f(3)=f(-3)+f(3)=2f(3)$，所以 $f(3)=0$，所以 $f(x+6)=f(x)+f(3)=f(x)$，即 $f(x+6)=f(x)$．又 $f(-2)=-1$．$f(2012)=f(335\times 6+2)=f(2)=f(-2)=-1$，所以 $f(2012)=-1$，A 正确；由 $(x+6)=f(x)$，可知 6 为函数的周期，则 -12 为函数的周期，所以 $f(-12+x)=f(x)=f(-x)$，则 $x=\frac{-12+x-x}{2}=-6$ 为函数的对称轴，B 正确；由 x_1，$x_2\in[0,3]$ 且 $x_1\neq x_2$ 时，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，0 可知函数在 $[0,3]$ 上为增函数，则函数在 $[-6,-3]$ 上为增函数，又 $x=-6$ 为对称轴，则在 $[-9,-6]$ 上为减函数，C 不正确；$f(3)=0$，所以 $f(-3)=0$，$f(9)=f(6+3)=0$，$f(-9)=0$，结合函数的周期为 6 及函数的增减性可得方程 $f(x)=0$ 在 $[-9,9]$ 上仅有 4 个根，D 正确．故选 ABD.

7.【解析】因为 $f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的周期为 2，在 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=|x|$．画出函数 $f(x)$ 与 $g(x)=\log_a x$ 的图象如下图所示：若函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $g(x)=\log_a x$（$a>0,a\neq 1$）的图象有且仅有 4 个交点，则函数 $g(x)=\log_a x$ 的图象过 $(5,1)$ 点，即 $a=5$，故选 C.

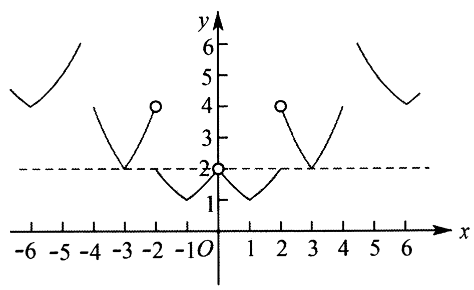


8.【解析】$f(x)=-x^2+4x-2(e^{x-2}+e^{2-x})=-(x-2)^2+4-(e^{x-2}+e^{2-x})$，将$f(x)$向左平移2个单位得到$f(x+2)=-x^2+4-(e^x+e^{-x})$，设$g(x)=f(x+2)$，则$g(x)$是偶函数，当$x>0$时，$g'(x)=-2x-e^x+e^{-x}$减函数，则$g'(x)<g'(0)=-1+1=0$，则$g(x)$是减函数，则不等式$f(2x-1)<f(3x)$等价为不等式$f(2x-3+2)<f(3x-2+2)$，即$g(2x-3)<g(3x-2)$，等价为$g(|2x-3|)<g(|3x-2|)$，得$|2x-3|>|3x-2|$，平方得$4x^2-12x+9>9x^2-12x+4$，得$5x^2<5$，即$x^2<1$，得$-1<x<1$，即不等式的解集为$(-1,1)$，故选B.

9.【解析】因为函数$f(x)=\begin{cases}2^x+2 & 0\le x<1\\ 4-2^{-x} & -1\le x<0\end{cases}$，且$f(x-1)=f(x+1)$，函数的周期为2，函数$g(x)=f(x)-\dfrac{3x-5}{x-2}$，的零点，就是$y=f(x)$与$y=\dfrac{3x-5}{x-2}$图象的交点的横坐标，所以$y=f(x)$关于点$(0,3)$中心对称，将函数两次向右平移2个单位，得到函数$y=f(x)$在$[-1,5]$上的图象，每段曲线不包含右端点（如下图），去掉端点后关于$(2,3)$中心对称．又因为$y=\dfrac{3x-5}{x-2}=3+\dfrac{1}{x-2}$关于$(2,3)$中心对称，故方程$f(x)=g(x)$在区间$[-1,5]$上的根就是函数$y=f(x)$和$y=g(x)$的交点横坐标，共有三个交点，自左向右横坐标分别为$x_1$，$x_2$，$x_3$，其中$x_1$和$x_3$关于$(2,3)$中心对称，所以$x_1+x_3=4$，$x_2=1$，故$x_1+x_2+x_3=5$．故选B.



9 题图



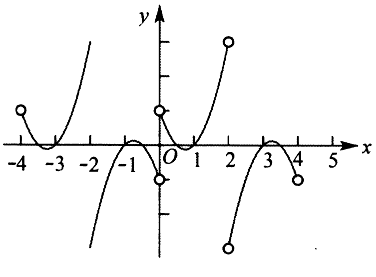
10 题图

10.【解析】因为函数$f(x)$是定义域在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的偶函数，当$x>0$时，$f(x)=\begin{cases}2^{|x-1|}, 0<x\le 2\\ 2f(x-2), x>2\end{cases}$，

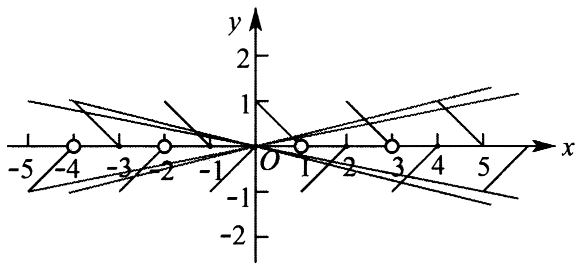
则类周期函数$f(x)$的图象如下图所示：

由图可得：$f(x)$与$y=2$的图象有4个交点，即函数$g(x)=f(x)-2$的零点个数为4，故选B.

11.【解析】由题意，$f(x)$是定义域为R的奇函数，$f(0)=0$．因为$f(x+4)=f(x)+f(2)$，$x\in R$．所以当$x=-2$时，$f(2)=f(-2+4)=f(-2)+f(2)=0$，所以$f(-2)=-f(2)=0$．所以$f(x+4)=f(x)$，所以$f(x)$是以4为周期的周期函数．因为当$x\in(0,2)$时，$f(x)=2x^2-3x+1=2(x-\frac{3}{4})^2-\frac{1}{8}=(2x-1)(x-1)$．所以可以根据周期性及奇函数的特点画出函数$y=f(x)$在$[-4,4]$上的图象：根据图象，可知：函数$y=f(x)$在$[-4,4]$上零点一共有13个．故选D.



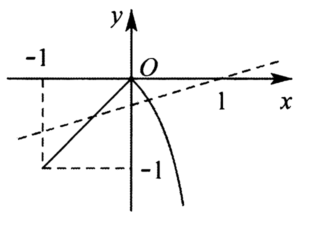
11 题图



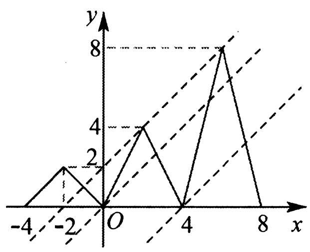
12 题图

12.【解析】因为 $f(x+1)=-f(x)$，所以 $f(x+2)=-f(x+1)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的周期为2．当 $0\le x<1$ 时，$f(x)=1-x$，当 $1\le x<2$ 时，$0\le x-1<1$，$f(x)=-f(x-1)=-(1-(x-1))=x-2$，令 $g(x)=0$ 得 $f(x)=ax$．做出 $y=f(x)$ 在 $[-5,5]$ 上的函数图象如图所示：函数 $g(x)=f(x)-ax$ 有4个零点，可知 $y=ax$ 的斜率在 k_{OB} 与 k_{OA} 之间，或在 k_{OC} 与 k_{OD} 之间，$a\in[-\frac{1}{4},-\frac{1}{5})\cup(\frac{1}{5},\frac{1}{4}]$．故选C．

13.【解析】因为 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)=x$，所以当 $x\in(0,1]$ 时，$x-1\in(-1,0)$，$f(x-1)=\frac{1}{f(x)-1}$，可得 $x-1=\frac{1}{f(x)-1}$，所以 $f(x)=\frac{1}{x-1}+1$，作出 $f(x)$ 在 $[-1,1)$ 上的图象，如图：因为 $g(x)=f(x)-mx-m$ 有两个零点，所以 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=mx-m$ 有两个交点，由图象可知 $m\in(0,\frac{1}{2}]$．故答案为：$(0,\frac{1}{2}]$．



13 题图



15 题图

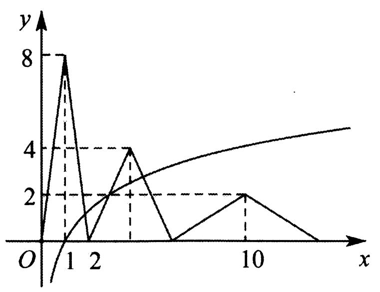
14.【解析】(1) $f(1)=\lg\frac{3}{2}$，$f(2)=\lg15$，所以 $f(3)=f(2)-f(1)=\lg15-(\lg3-\lg2)=\lg5+\lg2=1$，

$f(4)=f(3)-f(2)=1-\lg15$，$f(5)=f(4)-f(3)=1-\lg15-1=-\lg15$，

$f(6)=f(5)-f(4)=-\lg15-(1-\lg15)=-1$，$f(7)=f(6)-f(5)=-1+\lg15=\lg\frac{3}{2}$，所以 $f(x)$ 是一个周期为6的函数，所以 $f(2020)=f(6\times336+4)=f(4)=1-\lg15$．故答案为 $1-\lg15$．

15.【解析】$f(6)=2f(2)=2\times2f(-2)=4(2-|-2+2|)=8$；作出类周期函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的图象：设直线 $y=x+a$，由图象可知要使 $f(x)=x+a$ 在区间 $[-4,8]$ 上有3个不等实根，则 $-4<a<0$ 所以实数 a 的取值范围是 $(-4,0)$，故答案为8；$(-4,0)$．

16.【解析】函数 $g(x)=f(x)-\log_a x$ 有且仅有三个零点，即函数 $y=f(x)$ 与 $y=\log_a x$ 的图象有三个不同交点．易知 $y=f(x)$ 为倍增函数，如图所示，易得 $a>1$，要使函数 $g(x)=f(x)-\log_a x$ 有且仅有三个零点，



则 $\begin{cases}\log_a 4<4\\ \log_a 10>2\end{cases}$，解得 $\sqrt{2}<a<\sqrt{10}$，所以 a 的取值范围是 $(\sqrt{2},\sqrt{10})$．故答案为 $(\sqrt{2},\sqrt{10})$．

17.【解析】由题意可知，$k>0$，函数 $f(x)=2^x+k\cdot2^{-x}$ 的图象都关于直线 $x=m$ 成轴对称图形，则 $f(m+x)$ 为偶函数，关于 y 轴对称，故 $f(m-x)=f(m+x)$ 恒成立，所以 $2^{m-x}+k\cdot2^{-(m-x)}=2^{m+x}+k\cdot2^{-(m+x)}$，

因为对于任意$x\in R$成立，故$2^m-k\cdot 2^{-m}=0$，所以$m=\frac{1}{2}\log_2 k$，故答案为$\frac{1}{2}\log_2 k$

18.【解析】由$f(x)\cdot f(-x)=1$可得，$f(x)=\frac{1}{f(-x)}$，由$f(1+x)\cdot f(1-x)=4$可得$f(1+x)=\frac{4}{f(1-x)}$，令$1-x=t$可得$f(t)=\frac{4}{f(2-t)}$①，由$f(x)\cdot f(-x)=1$可得，$f(x)=\frac{1}{f(-x)}$，所以$f(t)=\frac{1}{f(-t)}$②，①②联立可得，$f(t+2)=4f(t)$，所以$f(x+2)=4f(x)$，因为当$x\in[0,1]$，$f(x)$的值域为$[1,2]$，设$x\in[-1,0]$时，$-x\in[0,1]$，则$f(x)=\frac{1}{f(-x)}\in[\frac{1}{2},1]$，所以$x+2\in[1,2]$时，$f(x+2)=4f(x)\in[2,4]$，以此类推，区间每增加2个长度，值域变为上个区间的4倍的类周期函数，且$x\in[-1,1]$时，值域为$[\frac{1}{2},2]$，则当$x\in[-100,100]$时，函数$f(x)$的值域$[2^{-100},2^{100}]$．故答案为$[2^{-100},2^{100}]$．

19.（1）【解析】由$f(x_1)\le f(x_2)$，得$f(x_1)-f(x_2)=a(x_1^3-x_2^3)\le 0$，因为$x_1<x_2$，所以$x_1^3-x_2^3<0$，得$a\ge 0$．故$a$的范围是$[0,+\infty)$；

（2）证明：若$f(x)$是周期函数，记其周期为T_k，任取$x_0\in R$，则有$f(x_0)=f(x_0+T_k)$，由题意，对任意$x\in[x_0,x_0+T_k]$，$f(x_0)\le f(x)\le f(x_0+T_k)$，所以$f(x_0)=f(x)=f(x_0+T_k)$．又$f(x_0)=f(x_0+nT_k)$，$n\in Z$，并且$\cdots\bigcup[x_0-3T_k,x_0-2T_k]\bigcup[x_0-2T_k,x_0-T_k]\bigcup[x_0-T_k,x_0]\bigcup[x_0,x_0+T_k]\bigcup[x_0+T_k,x_0+2T_k]\bigcup\cdots=R$，所以对任意$x\in R$，$f(x)=f(x_0)=C$，为常数；

（3）【解析】①因为$f(0)=0$，$f(x)+f(1-x)=1$，所以$f(1)=1$，由$f(\frac{1}{2})+f(1-\frac{1}{2})=1$，所以$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，因为$f(\frac{x}{5})=\frac{1}{2}f(x)$，令$x=1$时，可得$f(\frac{1}{5})=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}$，$f(\frac{1}{25})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{5})=(\frac{1}{2})^2$，所以$f(\frac{1}{5^n})=(\frac{1}{2})^n$，因为$a_n=f(\frac{1}{5^n})$（$n\in N^*$），所以$a_n=\frac{1}{2^n}$

②因为$a_4=f(\frac{1}{625})=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$，$a_5=f(\frac{1}{3125})=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$．因为$f(x)+f(1-x)=1$，令$x=\frac{1}{2}$，则$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，由$f(\frac{x}{5})=\frac{1}{2}f(x)$，可得$f(\frac{1}{10})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，于是$f(\frac{1}{50})=\frac{1}{8}$，$f(\frac{1}{250})=\frac{1}{16}$，$f(\frac{1}{1250})=\frac{1}{32}$，由$f(\frac{1}{3125})\le f(\frac{1}{2019})\le f(\frac{1}{1250})$，所以$f(\frac{1}{2017})=\frac{1}{32}$．

20.【解析】（1）函数满足：$2f(x+2)-f(x)=0$；即$2f(x+2)=f(x)$，所以$f(x)=4f(x+4)$；当$x\in(0,2]$时，$f(x)=e^x+ax$（$a>1$）；所以当$x\in(-4,-2]$时，$x+4\in(0,2]$，$f(x)=4f(x+4)=4e^{x+4}+4a(x+4)$；又因为$a>1$，所以$f(x)$在$(-4,-2]$上递增，所以$f(x)_{\max}=f(-2)=4e^2+16$；故$a=2$；

（2）当$x\in(1,2)$时，$f(x)=e^x+2x$，函数$f(x)$在$x\in(1,2)$单调递增；即$x\in(1,2)$时，$f(x)<f(2)=e^2+4$；当$x\in(1,2)$时，$g(x)=\frac{4}{3}bx^3-4bx+2$（$b\neq 0$），$g'(x)=4b(x^2-1)$；当$b>0$时，函数$g(x)$在区间$(1,2)$单调递增，$g(x)<g(2)=\frac{8}{3}b+2$；对任意的$x_1\in(1,2)$，总存在$x_2\in(1,2)$，使不等式$f(x_1)<g(x_2)$恒成立；则$b\ge\frac{3}{8}e^2+\frac{3}{4}$；当$b<0$时，函数$g(x)$在区间$(1,2)$单调递减，$g(x)<g(1)=-\frac{8}{3}b+2$；则$b\le-\frac{3}{8}e^2-\frac{3}{4}$；综上所述，$b$的取值范围是$[\frac{3}{8}e^2+\frac{3}{4},+\infty)$或$(-\infty,-\frac{3}{8}e^2-\frac{3}{4}]$．

21.【解析】（1）由$A=[-1,1]$，$B=[-2,2]$，知：$A\bigcap B=[-1,1]$；且二次函数$f(x)$的开口向上，$f(0)=-1$；

由题意知不等式 $f(x)\le 0$ 的解集为 C，当 $C\subseteq(A\bigcap B)$ 时，函数 $f(x)$ 必有两零点，且两零点均在区间 $[-1,1]$ 内；故只需：$\begin{cases}f(-1)\ge 0\\ f(1)\ge 0\end{cases}$，解得 $-1\le m\le 1$；所以实数 m 的取值范围为 $[-1,1]$；

（2）对任意 $x\in R$，都有 $f(1-x)=f(1+x)$ 成立；所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称；所以 $-\dfrac{m}{4}=1$，解得 $m=-4$；所以函数 $f(x)=2(x-1)^2-3$，$x\in[-2,2]$；所以 $x=-2$ 时，$f(x)$ 取最大值 15，$x=1$ 时，$f(x)$ 取最小值 -3；所以函数 $f(x)$ 在区间 B 上的值域为 $[-3,15]$；

（3）令 $h(x)=f(x)+g(x)$；则 $h(x)=x^2+2|x-a|-1=\begin{cases}x^2+2x-2a-1, x\ge a\\ x^2-2x+2a-1, x\le a\end{cases}$；

①当 $a\le -1$ 时，函数 $h(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 是减函数，$(-1,+\infty)$ 是增函数，此时 $h(x)_{\min}=h(-1)=-2a-2$；

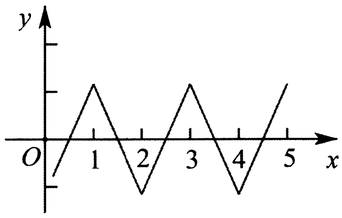
②当 $-1<a<1$ 时，函数 $h(x)$ 在区间 $(-\infty,a)$ 是减函数，$(a,+\infty)$ 是增函数，此时 $h(x)_{\min}=h(a)=a^2-1$；

③当 $a\ge 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 是减函数，$(1,+\infty)$ 是增函数，此时 $h(x)_{\min}=2a-2$；

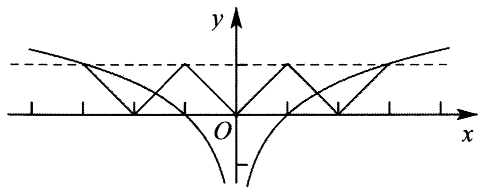
综上：当 $a\le -1$ 时，$f(x)_{\min}=-2a-2$，当 $-1<a<1$ 时 $f(x)_{\min}=a^2-1$，当 $a\ge 1$ 时 $f(x)_{\min}=2a-2$．

达标训练（适合高三一轮）

1．【解析】由题意，对于 $f(x+1)=f(x-1)$，令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，$x+1=t+2$，所以 $f(t+2)=f(t)$．所以函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数；对于 $f(x)=f(-x+2)$，令 $x=t+1$，所以 $f(1+t)=f(t+1)=f(-t-1+2)=f(1-t)$．所以函数 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称．因为方程 $f(x)=0$ 在 $[0,1]$ 内有且只有一个根 $x=\dfrac{1}{2}$，所以可猜测函数 $f(x)$ 大致图象如下：所以 $f(x)=0$ 在区间 $[0,2019]$ 内根的个数为 2019 个．故选 C．



1 题图



2 题图

2.【解析】方程 $f(x)=\log_3|x|$ 的零点个数，即函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=\log_3|x|$ 的交点的个数，作函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=\log_3|x|$ 的图象如下，则由图象可知，有四个不同的交点，故选 C．

3．【解析】因为 $f(x)=e^{x-1}-e^{1-x}+(x-1)^3+x$，所以 $f(x)=e^{x-1}-e^{1-x}+(x-1)^3+x-1+1$，令 $f(t)=e^t-e^{-t}+t^3+t$，$f'(t)=e^t+e^{-t}+3t^2+1>0$，因为 $f(t)=e^t-e^{-t}+t^3+t$ 是单调递增奇函数，图象关于原点对称，所以 $f(x)=e^{x-1}-e^{1-x}+(x-1)^3+x-1+1$ 的图象关于 $(1,1)$ 对称，且单调递增，所以 $f(2-m)+f(m)=2$，因为 $f(x-4)+f(2-3x)\ge 2$ 所以 $f(x-4)\ge 2-f(2-3x)=2-[2-f(3x)]=f(3x)$ 所以 $x-4\ge 3x$，解可得 $x\le -2$，故选 A．

4．【解析】因为 $f(0)=0$，$f(x)+f(1-x)=1$，所以 $f(1)=1$，由 $f(\frac{1}{2})+f1-\frac{1}{2})=1$，所以 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，因为 $f(\frac{x}{5})=\frac{1}{2}f(x)$，令 $x=1$ 可得 $f(\frac{1}{5})=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}$，所以 $f(\frac{1}{25})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{5})=(\frac{1}{2})^2$，$f(\frac{1}{125})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{25})=(\frac{1}{2})^3$，$f(\frac{1}{625})=(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$，$f(\frac{1}{3125})=(\frac{1}{2})^5=\frac{1}{32}$，$f(\frac{1}{10})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，$f(\frac{1}{50})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{10})=\frac{1}{8}$，$f(\frac{1}{250})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{50})=\frac{1}{16}$，

$f(\frac{1}{1250})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{250})=\frac{1}{32}$，因为 $0\le x_1<x_2\le 1$ 时，$f(x_1)\le f(x_2)$，由 $f(\frac{1}{3125})\le f(\frac{1}{2018})\le f(\frac{1}{1250})$ 及 $f(\frac{1}{3125})=f(\frac{1}{1250})=\frac{1}{32}$，即有 $f(\frac{1}{2018})=\frac{1}{32}$．故选 C．注意：此题可用等比阶梯函数性质快速得出答案．

5.【解析】设函数 $g(x)$ 上任意一点 (x,y)，点 (x,y) 关于 $(-1,0)$ 对称的点为 $(-2-x,-y)$，则 $-y=1+\ln(-2-(-2-x))=1+\ln x$，即 $g(x)=-\ln x-1$，依题意，$2x_1=-\ln x_2-1$，则 $x_1+x_2=x_2-\frac{1}{2}\ln x_2-\frac{1}{2}$，设 $h(x)=x-\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}(x>0)$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{2x}=\frac{2x-1}{2x}$，易知函数 $h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 单调递减，在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 单调递增，所以 $h(x)_{\min}=h(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln 2$，即 x_1+x_2 的最小值为 $\frac{1}{2}\ln 2$．故选 D．

6.【解析】因为 $f(3-x)=f(x)$，所以函数图象关于直线 $x=\frac{3}{2}$ 对称，又因为 $(x-\frac{3}{2})f'(x)<0$ 所以当 $x>\frac{3}{2}$ 时，函数是减函数，当 $x<\frac{3}{2}$ 时，函数是增函数，因为 $x_1+x_2>3$，所以 $x_1>3-x_2$，因为 $x_1<x_2$，所以 $x_2>\frac{3}{2}$，所以 $\frac{3}{2}>x_1>3-x_2$，所以 $f(x_1)<f(3-x_2)$，因为 $f(x_2)=f(3-x_2)$，所以 $f(x_1)<f(x_2)$ 故选 B．

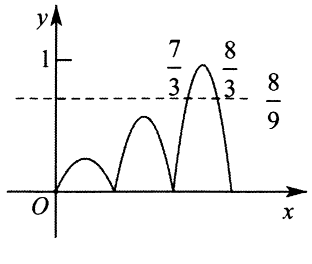
7.【解析】令 $f(x)=x^5+\sin x$，则 $f'(x)=5x^4+\cos x$，当 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上为增函数，因为 $\alpha^5+\sin\alpha-3t=0$，$81\beta^5+\frac{1}{3}\sin 3\beta+t=0$，所以 $\alpha^5+\sin\alpha+(3\beta)^5+\sin 3\beta=0$，所以 $f(\alpha)+f(3\beta)=0$，即 $f(\alpha)=-f(3\beta)=f(-3\beta)$，即 $\alpha=-3\beta$，即 $\alpha+3\beta=0$，$\cos(\alpha+3\beta)=\cos 0=1$，故 $\ln[3-\cos(\alpha+3\beta)]=\ln(3-1)=\ln 2$，故选 A．

8.【解析】因为 $f(1-x)=f(1+x)$，所以函数 $f(x)=-x^2(x^2+ax+b)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位，得函数 $y=f(x+1)$ 的图象关于 $x=0$ 对称，可得

$f(x+1)=-(x+1)^2[(x+1)^2+a(x+1)+b]=-x^4-(a+4)x^3-(6+3a+b)x^2-(4+3a+2b)x+1+a+b$ 是偶函数，设 $g(x)=f(x+1)=-x^4-(a+4)x^3-(6+3a+b)x^2-(4+3a+2b)x+1+a+b$，因为 $g(-x)=g(x)$，所以 $\begin{cases}a+4=0\\4+3a+2b=0\end{cases}$，解之得 $\begin{cases}a=-4\\b=4\end{cases}$，因此，$f(x)=-x^2(x^2-4x+4)=-x^4+4x^3-4x^2$，求导数，得

$f'(x)=-4x^3+12x^2-8x$，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=2$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$、$(1,2)$ 上是增函数，在区间 $(0,1)$、$(2,+\infty)$ 上是减函数，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=2$ 处有极值点 $f(0)=0$，$f(2)=0$，所以 $f(x)_{\max}=0$．故选 C．

9.【解析】因为 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=-x^2+x\in[0,\frac{1}{4}]$，所以 $x+1\in(1,2]$ 时，$x\in(0,1]$，



$f(x+1)=2f(x)=-2x^2+2x\in[0,\frac{1}{2}]$，$x+2\in(2,3]$ 时，$x+1\in(1,2]$，

$f(x+2)=2f(x+1)=-4x^2+4x\in[0,1]$，令

$f(x+2)=2f(x+1)=-4x^2+4x\ge\frac{8}{9}$，解得 $\frac{1}{3}\le x\le\frac{2}{3}$，所以 m 的最小值为 $m=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$，故选 C．

10.【解析】法一 由已知得：$f(x)=\frac{1}{2}f(x+2)=\frac{1}{4}f(x+4)$，当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)=\ln x-ax(a>\frac{1}{2})$，设 $x\in(-4,-2)$ 时，则 $x+4\in(0,2)$，所以 $f(x+4)=\ln(x+4)-a(x+4)$，所以 $x\in(-4,-2)$ 时，

$f(x)=\frac{1}{4}f(x+4)=\frac{1}{4}\ln(x+4)-\frac{1}{4}a(x+4)$，所以 $f'(x)=\frac{1}{4(x+4)}-\frac{a}{4}=\frac{1-a(x+4)}{4(x+4)}=-\frac{\frac{1}{a}(x+4-\frac{1}{a})}{4(x+4)}$，因为

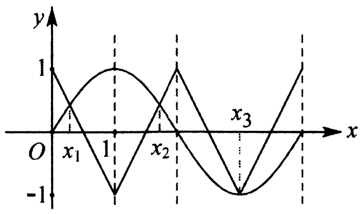
$a>\frac{1}{2}$，所以 $4-\frac{1}{a}>2$，所以 $-(4-\frac{1}{a})<-2$，所以当 $-4<x<\frac{1}{a}-4$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $\frac{1}{a}-4<x<-2$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(\frac{1}{a}-4)=\frac{1}{4}\ln(\frac{1}{a})-\frac{1}{4}a\cdot\frac{1}{a}=-\frac{1}{4}$，

所以 $a=1$，故选 D.

法二 根据题意，此函数为类周期函数，$x\in(-4,-2)$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $-\frac{1}{4}$，易知 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)$ 的最大值为 -1，$f(x)=\ln x-ax\le -1\Rightarrow a\ge\frac{\ln ex}{x}=e\cdot\frac{\ln ex}{ex}=1$ 所以 $a=1$，故选 D.

11.【解析】$f(x+1)=-f(x)$ 则 $f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 以 2 为周期，又当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=-2x+1$，所以可得函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的图象，又知 $f(x)$ 周期为 2，故可以绘制 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上的图象，设 $h(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$，$h(x)$ 为周期为 4 的函数，用 5 点法画出其在 $[0,4]$ 上的图象，可知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,4]$ 上又 3 个交点，其横坐标分别记为 x_1，x_2，x_3，因为 $f(x)$ 和 $h(x)$ 都以 $x=1$ 为对称轴，所以 $x_1+x_2=2$，又 $x_3=3$，所以函数 $g(x)=f(x)-\sin\frac{\pi}{2}x(0\le x\le 4)$ 的零点之和为：$2+3=5$．故选 C.



12.【解析】因为 $f(x)=2f(x+3)$，所以 $f(x-3)=2f(x)$，即 $f(x)=\frac{1}{2}f(x-3)$，所以

$f(x)=\frac{1}{2}f(x-3)=\frac{1}{2^2}f(x-2\times3)=\frac{1}{2^3}f(x-3\times3)=\cdots=\frac{1}{2^n}f(x-n\times3)$，所以

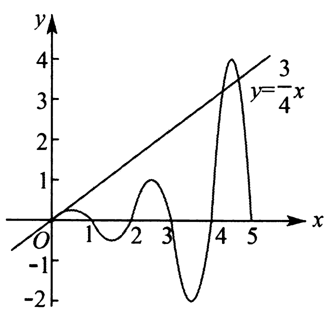
$f(2018)=\frac{1}{2^{672}}f(2018-672\times3)=\frac{1}{2^{672}}f(2)=\frac{1}{2^{672}}[-f(-2)]=-\frac{1}{2^{627}}\log_3[1-(-2)]=-\frac{1}{2^{672}}$．故选 B.

13.【解析】根据题意，$f(x)$ 满足 $f(-3-x)=f(3-x)$，即 $f(-3-x)=f[6+(-3-x)]$，则函数 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数，当 $-3\le x\le -1$ 时，$f(x)=-(x+2)^2$，则 $f(-3)=-1$，$f(-2)=0$，$f(-1)=-1$，当 $-1<x\le 0$ 时，$f(x)=2^x+1$，则 $f(0)=2$，函数 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(1)=f(-1)=-1$，$f(2)=-f(2)=0$，$f(3)=f(-3)=-1$，函数 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数，则 $f(4)=f(-2)=0$，$f(5)=f(-1)=-1$，$f(6)=2$；则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2018)=[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)]+[f(7)+f(8)+f(9)$
$+f(10)+f(11)+f(12)]+\ldots\ldots+[f(2011)+f(2012)+f(2013)+f(2014)+f(2015)+f(2016)]+f(2017)+f(2018)$
$=336\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)]+f(1)+f(2)=-337$；故选 C.

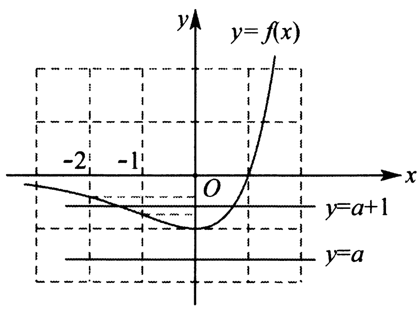
14.【解析】对于 A，因为 $f(x+\frac{3}{2})=-f(x)$，所以 $f(x+3)=-f(x+\frac{3}{2})$，所以 $f(x)=f(x+3)$，所以 $f(x)$ 是

周期为3的函数，故 A 正确；对于 B，因为 $f(x+\frac{3}{2})=-f(x)$，所以 $f(x-\frac{9}{4}+\frac{3}{2})=-f(x-\frac{9}{4})$，即 $f(x-\frac{3}{4})=-f(x-\frac{9}{4})$，又 $f(x)$ 的周期为3，所以 $f(x-\frac{9}{4})=f(x-\frac{9}{4}+3)=f(x+\frac{3}{4})$，所以 $f(x-\frac{3}{4})=-f(x+\frac{3}{4})$，又 $y=f(x-\frac{3}{4})$ 是奇函数，所以 $f(x-\frac{3}{4})=-f(-x-\frac{3}{4})$，所以 $f(x+\frac{3}{4})=f(-x-\frac{3}{4})$，令 $x+\frac{3}{4}=t$，则 $f(t)=f(-t)$，所以 $f(t)$ 是偶函数，即 $f(x)$ 是偶函数，故 B 正确；对于 C，由 B 知 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上的单调性相反，所以 $f(x)$ 在 R 上不单调，故 C 错误；对于 D，因为函数 $y=f(x-\frac{3}{4})$ 为奇函数，所以 $y=f(x-\frac{3}{4})$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称，因为 $y=f(x-\frac{3}{4})$ 的函数图象是由 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3}{4}$ 个单位得到的，所以 $y=f(x)$ 的函数图象关于点 $(-\frac{3}{4},0)$ 对称，故 D 正确；故选 C.

15.【解析】当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$，此时 $f(x)$ 的最大值为 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$；当 $x\in(1,2]$ 时，$x-1\in(0,1]$，$f(x)=-2f(x-1)=-2(x-1)(1-x+1)=2(x-1)(x-2)=2(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2}$，此时 $f(x)$ 的最大值为 $f(1)=f(2)=0$；当 $x\in(2,3]$ 时，$x-1\in(1,2]$，$f(x)=-2f(x-1)=-4(x-2)(x-3)$，此时 $f(x)$ 在 $[2,\frac{5}{2}]$ 上是增函数，$[\frac{5}{2},3]$ 上是减函数，$f(2)=5f(3)=0$，$f(\frac{5}{2})=1$；当 $x\in(3,4]$ 时，$x-1\in(2,3]$，$f(x)=-2f(x-1)=8(x-3)(x-4)$，此时 $f(x)$ 最大值为0；当 $x\in(4,5]$ 时，$x-1\in(3,4]$，$f(x)=-2f(x-1)=-16(x-4)(x-5)$，此时 $f(x)$ 在 $[4,\frac{9}{2}]$ 上是增函数，在 $[\frac{9}{2},5]$ 上是减函数，$f(4)=f(5)=0$，$f(\frac{9}{2})=4$，作出函数 $y=f(x)$ 与直线 $y=\frac{3}{4}$ 的图象如图，由图可知有4个交点，所以函数 $y=4f(x)-3$ 在区间 $[0,5]$ 上有4个零点，故选 C.



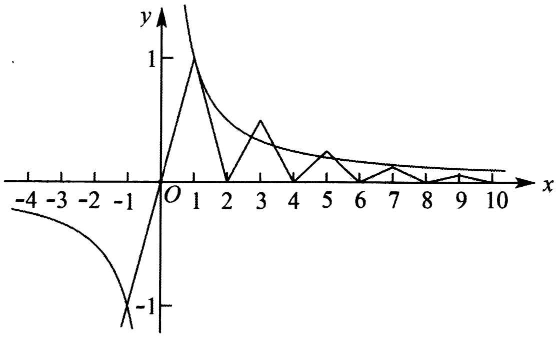
15 题图



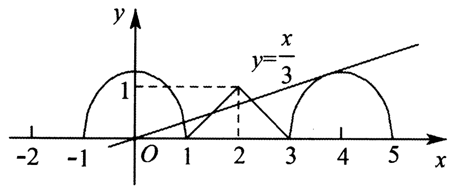
16 题图

16.【解析】$f'(x)=e^x(x-1)+e^x=xe^x$，所以当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)=e^x(x-1)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，做出 $f(x)$ 的图象如图所示：因为 $|f(x)-a|+|f(x)-a-1|=1$ 有且仅有两个不同的整数解，所以 $f(x)$ 的图象夹在平行直线 $y=a$ 和 $y=a+1$ 之间的部分只有两个整数解．又 $f_{\min}(x)=f(0)=-1$，$f(1)=0$，$f(-1)=-\frac{2}{e}$，$f(-2)=-\frac{3}{e^2}$，所以 $-\frac{2}{e}\le a+1<-\frac{3}{e^2}$，所以 $-\frac{2}{e}-1\le a<-\frac{3}{e^2}-1$．故选 A.

17.【解析】由 $F(x)=xf(x)-1=0$ 得，$f(x)=\frac{1}{x}$，然后分别作出函数 $f(x)$ 与 $y=g(x)=\frac{1}{x}$ 的图象如图：因为当 $x\geq 2$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}f(x-2)$，所以 $f(1)=1$，$g(1)=1$，$f(3)=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}$，$g(3)=\frac{1}{3}$，$f(5)=\frac{1}{2}f(3)=\frac{1}{4}$，$g(5)=\frac{1}{5}$，$f(7)=\frac{1}{2}f(5)=\frac{1}{8}$，$g(7)=\frac{1}{7}$，所以当 $x>7$ 时，$f(x)<\frac{1}{x}$，由图象可知两个图象的交点个数为 6 个.故选 C.



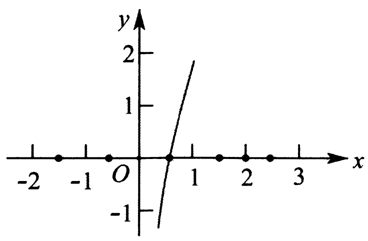
17 题图



18 题图

18.【解析】由 $3f(x)=x$ 恰有3个实数解可知 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{x}{3}$ 的图象有3个交点．做出 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{x}{3}$ 的图象如图所示：显然两函数图象在 $(0,3)$ 上必有3个交点，所以 $y=f(x)$ 在 $(3,5)$ 上的图象在直线 $y=\frac{x}{3}$ 的下方．设直线 $y=\frac{x}{3}$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切，当 $3<x<5$ 时，$f(x)=f(x-4)=m\sqrt{1-(x-4)^2}$．联立方程组 $\begin{cases} y=\frac{x}{3} \\ y=m\sqrt{1-(x-4)^2} \end{cases}$，可得 $(\frac{1}{9}+m^2)x^2-8m^2x+15m^2=0$，令 $\Delta=64m^4-60m^2(\frac{1}{9}+m^2)=0$，解得 $m^2=\frac{5}{3}$，所以 $m=\frac{\sqrt{15}}{3}$，$0<m<\frac{\sqrt{15}}{3}$．故选 A.

19.【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数且满足 $f(2-x)=f(x)$，所以 $f(2-x)=f(x)=-f(x-2)$，得 $f(x-2)=-f(x)$，即 $f(x-4)=-f(x-2)=f(x)$，则函数的周期是4，因为 $f(2-x)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，因为 $f(0)=0$，所以 $f(2)=0$，当 $0<x\leq 1$时，$f(x)=e^x-\frac{1}{x}$ 为增函数，因为 $f(1)=e-1>0$，$f(\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{2}}-2=\sqrt{e}-2<0$，所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内只有一个零点，则根据即函数的性质在区间 $(-1,-\frac{1}{2})$ 内只有一个零点，根据对称性在 $(-2,-1)$ 内只有1个零点，在 $(1,2)$ 和 $(2,3)$ 分别有一个零点，则总共有 7 个零点，故选 A.



20.【解析】因为 $10<x<20$ 时，$f(x)=f(20-x)$，所以 $f(x)$ 在 $(0,20)$ 上的函数图象关于直线 $x=10$ 对称，

所以$x_1+x_4=x_2+x_3=20$，且$0<x_1<1<x_2<10<x_3<19<x_4<20$．所以$x_1+x_2+x_3+x_4=20\times2=40$，故$A$正确，由$-\ln x_1=\ln x_2$可得$\ln x_2+\ln x_1=\ln(x_1x_2)=0$，所以$x_1x_2=1$，故$B$正确；又$x_1=20-x_4$，$x_2=20-x_3$，所以$(20-x_3)(20-x_4)=1$，整理得：$x_3x_4-20(x_3+x_4)+399=0$，故D正确．故选C．

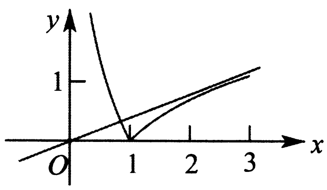
21．【解析】法一　在区间$[\frac{1}{3},3]$内，函数$f(x)=g(x)-mx$，有三个不同的零点，

（1）$m>0$，若$x\in[1,3]$时，$g(x)=\ln x$，可得$f(x)=\ln x-mx$，$(x>0)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-m=\frac{1-mx}{x}$，若$f'(x)<0$，可得$x>\frac{1}{m}$，$f(x)$为减函数，若$f'(x)>0$，可得$x<\frac{1}{m}$，$f(x)$为增函数，此时$f(x)$必须在$[1,3]$上有两个交点，所以$\begin{cases}f(\frac{1}{m})>0\\f(3)\le0\\f(1)\le0\end{cases}$，解得$\frac{\ln3}{3}\le m<\frac{1}{e}$①，设$\frac{1}{3}<x<1$，可得$1<\frac{1}{x}<3$，所以$g(x)=2g(\frac{1}{x})=2\ln\frac{1}{x}$，此时$f(x)=-2\ln x-mx$，$f'(x)=-\frac{2+mx}{x}$，若$f'(x)>0$，可得$x<-\frac{2}{m}<0$，$f(x)$为增函数；若$f'(x)<0$，可得$x>-\frac{2}{m}$，$f(x)$为减函数，在$[\frac{1}{3},1]$上有一个交点，则$\begin{cases}f(\frac{1}{3})\ge0\\f(1)\le0\end{cases}$，解得$0<m\le6\ln3$②综上①②可得$\frac{\ln3}{3}\le a<\frac{1}{e}$；

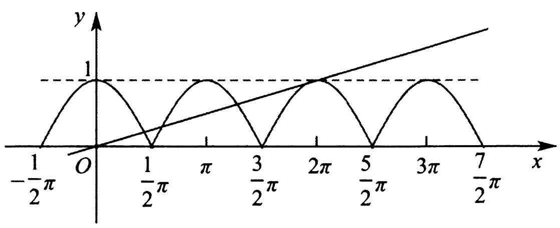
（2）若$m<0$，对于$x\in[1,3]$时，$f(x)=\ln x-mx>0$，没有零点，不满足在区间$[\frac{1}{3},3]$内，函数$f(x)=g(x)-mx$，有三个不同的零点，

（3）$m=0$，显然只有一解，舍去．综上：$\frac{\ln3}{3}\le a<\frac{1}{e}$．

法二　当$x\in[1,3]$时，$g(x)=\ln x$，令$\frac{1}{3}\le x\le1$，则$1\le\frac{1}{x}\le3$，$g(\frac{1}{x})=\ln\frac{1}{x}=-\ln x$，又$g(x)=2g(\frac{1}{x})$，可得$g(x)=-2\ln x$，作出$g(x)=\begin{cases}-2\ln x,\frac{1}{3}\le x<1\\\ln x,1\le x\le3\end{cases}$的图象，由题意可得$g(x)=mx$在区间$[\frac{1}{3},3]$上有3个不等实根，由图象可得$m>0$，设$y=mx$与$y=\ln x$在$[1,3]$相切的切点为$(t,\ln t)$，可得切线的斜率为$\frac{1}{t}$，且$m=\frac{1}{t}$，$\ln t=mt$，解得$t=e$，切线的斜率为$\frac{1}{e}$，当$y=mx$经过点$(3,\ln3)$，可得$m=\frac{\ln3}{3}$，由图象可得$\frac{\ln3}{3}\le m<\frac{1}{e}$．故选A．



21 题图

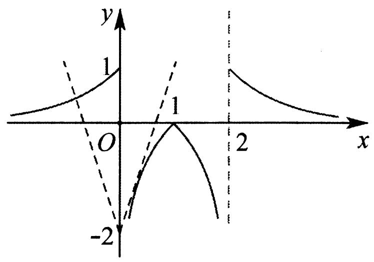


22 题图

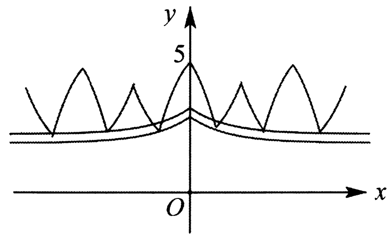
22．【解析】因为偶函数$f(x)$满足$f(\frac{\pi}{2}+x)=f(\frac{\pi}{2}-x)$，所以$f(\frac{\pi}{2}+x)=f(\frac{\pi}{2}-x)=f(x-\frac{\pi}{2})$，即$f(\pi+x)=f(x)$，函数$f(x)$是周期为$\pi$的周期函数，当$x\in(-\frac{\pi}{2},0)$则$-x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$f(-x)=\cos(-x)=f(x)$，即

$f(x)=\cos x$，$x\in(-\frac{\pi}{2},0)$，作出 $f(x)$ 的图象如图：若方程 $f(x)=kx(k>0)$ 有且仅有 4 个根，则 $y=kx$ 与 $f(x)$ 在 $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$ 相切，当 $x\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，$x-2\pi\in(-\frac{\pi}{2},0)$，此时 $f(x)=f(x-2\pi)=\cos(x-2\pi)=\cos x$，$x\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，因为 4 个根的最大值为 θ，此时 $f'(x)=-\sin x$，此时切点 $(\theta,\cos\theta)$，切线导数 $k=f'(\theta)=-\sin\theta$，则切线方程为 $y-\cos\theta=-\sin\theta(x-\theta)$，即 $y=-\sin\theta x+\theta\sin\theta+\cos\theta$，又 $y=kx$，所以 $\theta\sin\theta+\cos\theta=0$，即 $\theta\sin\theta=-\cos\theta$，则 $\theta=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{1}{\tan\theta}$，故选 C.

23.【解析】根据 $f(x)=f(2-x)$ 知 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，作出函数 $h(x)=m|x|-2$ 与函数 $f(x)$ 的图象如图：设 $h(x)$ 与 $y=\ln x(x\le 1)$ 相切时的切点为 $P(x_0,\ln x_0)$，则 $\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_0+2}{x_0}$，解得 $x_0=\frac{1}{e}$，此时 $m=\frac{1}{x_0}=e$，当 $h(x)$ 过点 $(2,1)$ 时，$m=\frac{3}{2}$，故 B 选项正确；若 $g(x)$ 恰有 2 个零点，则 $m<0$ 或 $m=e$，故 A 错误；若 $g(x)$ 恰有 4 个零点，则 $0<m\le\frac{3}{2}$，故 C、D 选项错误；故选 B.



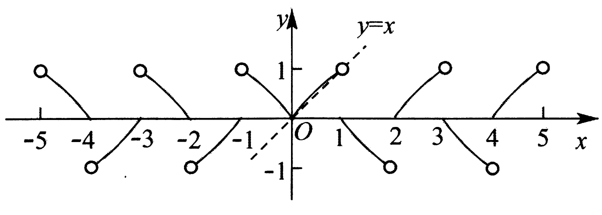
23 题图



24 题图

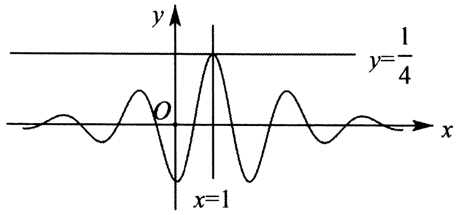
24.【解析】因为函数 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，因为 $f(x)=f(x-4)$，所以 $f(x+4)=f(x)$，可知 $f(x)$ 是周期为 4 的偶函数，$f(x)$ 在三个周期即 $[-6,6]$ 的图象如图：$g(x)=(\frac{1}{2})^{|x|}+a$，可看做由 $y=(\frac{1}{2})^{|x|}$ 的图象上下平移可得 $y=g(x)$ 的图象，当 $g(x)$ 的图象过点 $(1,\frac{5}{2})$，可得 $a=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2$，此时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象有两个交点；当 $g(x)$ 的图象过点 $(3,\frac{5}{2})$，可得 $a=\frac{5}{2}-\frac{1}{8}=\frac{19}{8}$，此时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象有六个交点；因为 $F(x)=f(x)-g(x)$ 恰好有 4 个零点，即 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象有四个交点，可得 $2<a<\frac{19}{8}$，故选 A.

25.【解析】因为 $f(x)$ 为定义在 R 上的偶函数，且当 $x\ge 0$ 时，有 $f(x+1)=-f(x)$，且当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)$，故函数 $f(x)$ 的图象如下图所示：

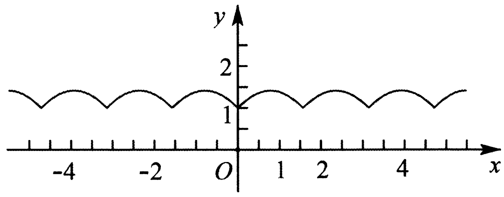


由图可得：$f(2019)+f(-2020)=0+0=0$，故 A 正确；函数 $f(x)$ 在定义域上不是周期函数，故 B 错误；直线 $y=x$ 与函数 $f(x)$ 的图象有 1 个交点，故 C 错误；函数 $f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$，故 D 正确；故选 AD.

26.【解析】$f(x)=\dfrac{\cos(\pi x-\pi)}{2^x+2^{2-x}}=\dfrac{-\cos\pi x}{2^x+2^{2-x}}$．因为 $f(2-x)=\dfrac{-\cos\pi(2-x)}{2^{2-x}+2^x}=\dfrac{-\cos\pi x}{2^x+2^{2-x}}=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 的图象一定关于直线 $x=1$ 对称，故 A 正确；当 $x\to+\infty$ 时，$2^x+2^{2-x}\to+\infty$，则 $f(x)\to0$，所以函数 $f(x)$ 在 R 上不是周期函数，故 B 错误；由 A 知，函数 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，且当 $x>1$ 时，随着 x 的增大，其图象大致形状如图：函数 $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{1}{4}$，故 C 正确；由图可知，在 $x=1$ 右侧附近，连接曲线上两点的斜率小于 0，故 D 错误．故选 AC．



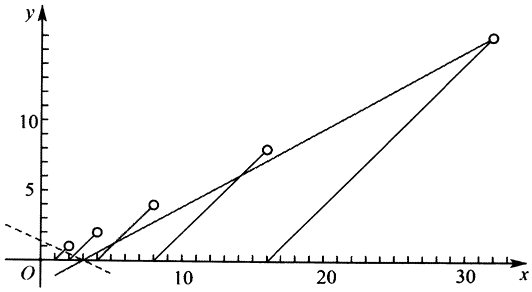
26 题图



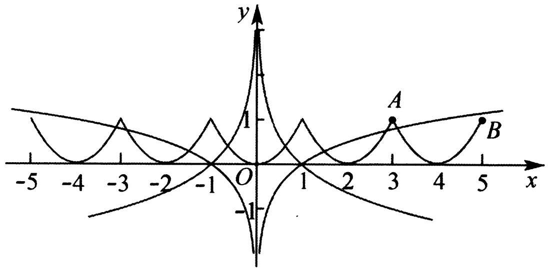
27 题图

27.【解析】由于函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 为偶函数，故 A 正确；画出函数位于 y 轴右侧的图象，如图所示，再根据函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，可得函数 $f(x)$ 在 R 上的图象，如图所示：数形结合可得函数的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$，故 B 不正确，C 正确；由于在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上，$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$，结合它的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$，故该函数单调递增区间为 $[\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}]$，$k\in Z$，故 D 正确，故选 ACD．

28.【解析】根据题意，由函数 $f(x)$ 的解析式，在区间 $[1,2)$，上，$f(x)=x-1$；当 $2\le x<4$ 时，$\dfrac{1}{2}x\in[1,2)$，则区间[2，4)] 上，$f(x)=2f(\dfrac{1}{2}x)=2(\dfrac{1}{2}x-1)=x-2$；当 $4\le x<8$ 时，$\dfrac{1}{2}x\in[2,4)$，则区间 [4，8)] 上，$f(x)=2f(\dfrac{1}{2}x)=2(\dfrac{1}{2}x-2)=x-4$；当 $8\le x<16$ 时，$\dfrac{1}{2}x\in[4,8)$，则区间 [8，16)] 上，$f(x)=2f(\dfrac{1}{2}x)=2(\dfrac{1}{2}x-4)=x-8$；当 $16\le x<32$ 时，$\dfrac{1}{2}x\in[8,16)$，则区间 [16，32)] 上，$f(x)=2f(\dfrac{1}{2}x)=2(\dfrac{1}{2}x-8)=x-16$，…在区间 $[2^{n-1},2^n)$，$f(x)=x-2^{n-1}$，其图象如图：$y=k(x-3)$ 的函数图象是过定点 $(3,0)$ 的直线，若函数 $g(x)=f(x)-k(x-3)$ 恰有 2 个不同的零点，函数 $f(x)$ 与直线 $y=k(x-3)$ 有 2 个交点，当直线经过点 $(2,1)$，可得 $k=-1$，即有 $-1<k<0$，满足题意；当直线经过点 $(16,8)$，可得 $k=\dfrac{8}{13}$；当直线经过点 $(32,16)$，可得 $k=\dfrac{16}{29}$，即有 $\dfrac{16}{29}\le k<\dfrac{8}{13}$，满足题意．综上可得 k 的范围是 $(-1,0)\cup[\dfrac{16}{29},\dfrac{8}{13})$．故答案为 $(-1,0)\cup[\dfrac{16}{29},\dfrac{8}{13})$．



28 题图

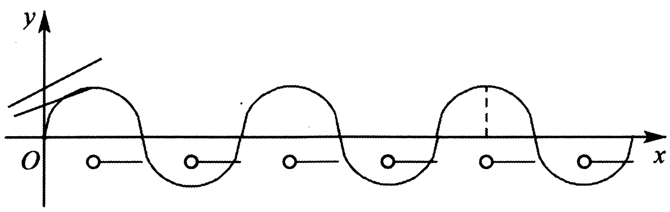


29 题图

29.【解析】函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且满足 $f(-x+1)=f(x+1)$，则 $f(x+1)=f(-x+1)=f(x-1)$，即 $f(x+2)=f(x)$，即函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，因为当 $x\in[-1,0]$ 时，$f(x)=x^2$，所以当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=f(-x)=x^2$，即当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=x^2$，作出函数 $f(x)$ 和 $g(x)=\log_a|x|$ 在 R 上图象，若方程 $f(x)=\log_a|x|$ 在 R 上有且只有 6 个零点，根据偶函数的对称性，则只需要 $x\geq 0$ 时，两个函数有 3 个交点即可，当 $0<a<1$ 时，两个函数只有 2 个交点，不满足条件．则当 $a>1$，要使两个函数在 $x>0$ 时只有 3 个交点，则满足 A 在函数 $g(x)$ 的上方，B 在 $g(x)$ 的下方，即 $\begin{cases}f(3)>g(3)\\f(5)<g(5)\end{cases}$，即 $\begin{cases}1>\log_a 3\\1<\log_a 5\end{cases}$，

得 $\begin{cases}\log_a^a>\log_a^3\\\log_a^a<\log_a^5\end{cases}$，得 $\begin{cases}a>3\\a<5\end{cases}$，即 $3<a<5$，故答案为 $(3,5)$

30.【解析】由 $f(x+2)=-f(x)$，得 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以函数的周期是 4．作出函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象如图，由图可知，函数 $f(x)$ 与 $g(x)=-\frac{1}{2}[0,11]$ 仅有 2 个实数根；要使关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有 8 个不同的实数根，则 $f(x)=\sqrt{-x^2+2x}$，$x\in(0,2]$ 与 $g(x)=k(x+2)$，$x\in(0,1]$ 的图象有 2 个不同交点，由 $(1,0)$ 到直线 $kx-y+2k=0$ 的距离为 1，得 $\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=\frac{\sqrt{2}}{4}(k>0)$，又因为两点 $(-2,0)$，$(1,1)$ 连线的斜率 $k=\frac{1}{3}$，故答案为 $[\frac{1}{3},\frac{\sqrt{2}}{4})$．



31.【解析】由 $f(1-x)=1-f(x)$；令 $x=0$，有 $f(1)=1-f(0)=1$；由 $f(\frac{x}{3})=\frac{1}{2}f(x)$；令 $x=1$，有 $f(\frac{1}{3})=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}$；故 $f(\frac{1}{3})=\frac{1}{2}$；又由 $f(1-x)=1-f(x)$，令 $x=\frac{1}{3}$，有 $f(\frac{2}{3})=1-f(\frac{1}{3})=\frac{1}{2}$；因为当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)\leq f(x_2)$，所以当 $\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{2}{3}$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}$，故 $f(\frac{3}{5})=\frac{1}{2}$；由 $f(\frac{x}{3})=\frac{1}{2}f(x)$，令 $x=\frac{1}{3}$，得 $f(\frac{1}{9})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{3})=\frac{1}{4}$；又由 $f(1-x)=1-f(x)$，令 $x=\frac{1}{9}$，得 $f(\frac{8}{9})=1-f(\frac{1}{9})=\frac{3}{4}$；由上可知 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，由 $f(\frac{x}{3})=\frac{1}{2}f(x)$，令 $x=\frac{1}{3}$，得 $f(\frac{1}{6})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，　又由 $f(1-x)=1-f(x)$，令 $x=\frac{1}{6}$，得 $f(\frac{5}{6})=1-f(\frac{1}{6})=\frac{3}{4}$，

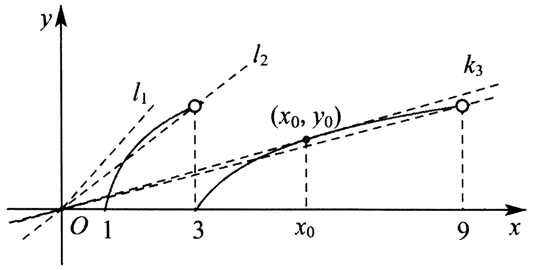
因为当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)\leq f(x_2)$，所以当 $\frac{5}{6}\leq x\leq\frac{8}{9}$ 时，有 $f(x)=\frac{3}{4}$，故 $f(\frac{6}{7})=\frac{3}{4}$．故答案为 $\frac{1}{2}$，$\frac{5}{4}$

32.【解析】因为 $f(x)=f(3x)\Rightarrow f(x)=f(\frac{x}{3})$，当 $x\in[3,9)$ 时，$f(x)=f(\frac{x}{3})=\ln\frac{x}{3}$，所以 $f(x)=\begin{cases}\ln x,1\leq x<3\\\ln\frac{x}{3},3\leq x<9\end{cases}$，

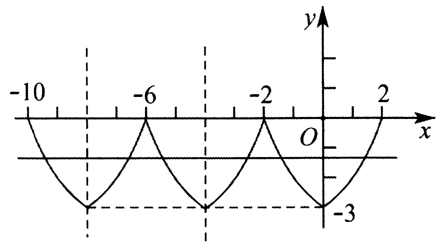
而 $g(x)=f(x)-ax$ 有两个不同的零点 $\Leftrightarrow y=f(x)$ 与 $y=ax$ 有两个不同交点，如图所示，可得直线 $y=ax$ 应在图中虚线 l_1 和 l_2 之间，虚线 l_4 和 x 轴之间（包括直线 l_4 和 x 轴），同时 l_3 也符合题意，而 l_1 的斜率为 $\frac{1}{e}$，

l_2的斜率为$\frac{\ln 3}{3}$，l_3的斜率为$\frac{1}{3e}$，l_4的斜率为$\frac{\ln 3}{9}$；

由临界分析得：$0\le a\le\frac{\ln 3}{9}$或$\frac{\ln 3}{3}<a<\frac{1}{e}$或$a=\frac{1}{3e}$．故答案为$0\le a\le\frac{\ln 3}{9}$或$\frac{\ln 3}{3}<a<\frac{1}{e}$或$a=\frac{1}{3e}$．



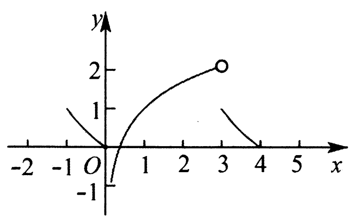
32 题图



33 题图

33．【解析】因为$f(x)$是R上的偶函数，满足$f(x+2)=f(x-2)+f(2)$，所以$f(2)=f(-2)+f(2)$，所以$f(2)=0$．所以$f(x+2)=f(x-2)$，所以$f(x+4)=f(x)$，所以$f(x)$的周期为4．作出$f(x)$在$[-10,2]$上的函数图象如图所示：由图象可知$f(x)$在$[-10,2]$上有3条对称轴$x=-8$，$x=-4$，$x=0$，所以6个零点之和为$2\times(-8)+2\times(-4)+2\times 0=-24$．故答案为$-24$．

34．【解析】因为$f(x+2)=f(x-2)$，所以$f(x)=f(x+4)$，即$f(x)$是以4为周期的函数，若在区间$[0,4]$上函数$g(x)=f(x)-mx$恰有三个不同的零点，则$f(x)$和$y=mx$在$[0,4]$上有3个不同的交点，画出函数函数$f(x)$在$[0,4]$上的图象，如图示：$(3,1)$代入$y=mx$，可得$m=\frac{1}{3}$，$(3,\ln 3+1)$代入$y=mx$，可得$m=\frac{\ln 3+1}{3}$，由$y=\ln x+1$，可得$y'=\frac{1}{x}$，设切点坐标为$(a,\ln a+1)$，则切线方程为$y-\ln a-1=\frac{1}{a}(x-a)$，代入$(0,0)$，可得$a=1$，即$y=x$与$y=\ln x+1$相切，所以若在区间$[0,4]$上函数$g(x)=f(x)-mx$恰有三个不同的零点，则实数$m$的取值范围是$[0,\frac{1}{3}]\cup(\frac{\ln 3+1}{3},1)$．故答案为$[0,\frac{1}{3}]\cup(\frac{\ln 3+1}{3},1)$．



35．【解析】令函数$y=2xf(x)-3=0$，得到方程$f(x)=\frac{3}{2x}$，当$x\in[1,2)$时，函数$f(x)$先增后减，在$x=\frac{3}{2}$时取得最大值1，而$y=\frac{3}{2x}$在$x=\frac{3}{2}$时也有$y=1$；当$x\in[2,2^2)$时，$f(x)=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}x)$，在$x=3$处函数$f(x)$取得最大值$\frac{1}{2}$，而$y=\frac{3}{2x}$在$x=3$时也有$y=\frac{1}{2}$；当$x\in[2^2,2^3)$时，$f(x)=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}x)$，在$x=6$处函数$f(x)$取得最大值$\frac{1}{4}$，而$y=\frac{3}{2x}$在$x=6$时也有$y=\frac{1}{4}$；…；当$x\in[2^{10},2^{11})$时，$f(x)=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}x)$，在$x=1536$处函数$f(x)$取得最大值$\frac{1}{210}$，而$y=\frac{3}{2x}$在$x=1536$时也有$y=\frac{1}{210}$．所以函数$y=2xf(x)-3$在区间$(1,2019)$上的零点个数为11．故答案为11．

36．【解析】对于选项①，根据函数的对应法则，x是有理数时，$f(x)=1$，当x是无理数时，$f(x)=0$故①

正确；对于选项②，因为有理数的相反数还是有理数，无理数的相反数还是无理数，所以对任意 $x\in R$，都有 $f(-x)=f(x)$，故②正确；对于选项③，因为若 x 是有理数，则 $x+T$ 也是有理数；若 x 是无理数，则 $x+T$ 也是无理数，所以根据函数的表达式，任取一个不为零的有理数 T，$f(x+T)=f(x)$ 对 $x\in R$ 恒成立，故③正确，对于选项④，当 x 为有理数时，$f(x)=1$；当 x 为无理数时，$f(x)=0$，当 x 为有理数时，$f(f(x))=f(1)=1$；当 x 为无理数时，$f(f(x))=f(0)=1$，即不管 x 是有理数还是无理数，均有 $f(f(x))=1$，故④正确；故答案为①②③④.

37.【解析】因为当 $x\in[1,3)$ 时，$f(x)=1-|x-2|$，所以 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上的函数图象关于直线 $x=2$ 对称，因为 $f(3x)=3f(x)$，所以 $f(x)$ 在 $(3,9)$ 上的图象关于直线 $x=6$ 对称．同理可得：$f(x)$ 在 $(3^n,3^{n+1})$ 上的图象关于直线 $x=2\cdot 3^n$ 对称，因为 $f(2)=1<a$，$f(6)=3f(2)=3>a$，所以 $F(x)$ 在 $(0,3)$ 上无零点，所以 $x_1+x_2=2\cdot2\cdot3=4\cdot3$，$x_3+x_4=2\cdot2\cdot3^2=4\cdot3^2$，…，$x_{2n-1}+x_{2n}=4\cdot3^n$，

所以 $x_1+x_2+\cdots+x_{2n}=4\times3+4\times3^2+\cdots+4\times3^n=4\times\dfrac{3(1-3^n)}{1-3}=6(3^n-1)$．故答案为 $6(3^n-1)$．

38.【解析】（1）由 $f(2-x)=f(2+x)$，得函数 $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称，则 $-\dfrac{b-1}{2a}=2$，又 $a+b-1+1=0$，解得 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{1}{3}$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x+1$；

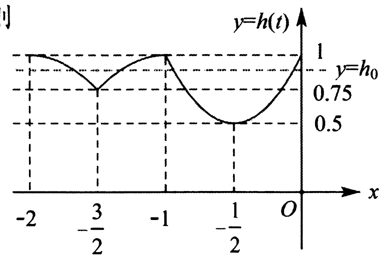
（2）设 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$，$g(x)=-a(x-x_1)(x-x_2)+2(x_2-x)=a(x_2-x)(x-x_1+\dfrac{2}{a})$ 因为 $x\in(x_1,x_2)$，$a\geq2$；所以 $x_2-x>0$，$x-x_1+\dfrac{2}{a}>0$；因为 $\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{1}{a}-x_2=\dfrac{x_1-x_2}{2}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{-2}{2}-\dfrac{1}{a}=1-\dfrac{1}{a}<0$，所以 $\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{1}{a}<x_2$，$\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{1}{a}-x_2=\dfrac{x_1-x_2}{2}-\dfrac{1}{a}=1-\dfrac{1}{a}>1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>0$，所以 $\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{1}{a}>x_1$，所以 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{1}{a}\in(x_1,x_2)$．所以 $g(x)\leq a\cdot(\dfrac{x_2-x_1+\dfrac{2}{a}}{2})^2=a+\dfrac{1}{a}+2$，当 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{-b-1}{2a}$ 时取“=”；所以 $h(a)=a+\dfrac{1}{a}+2$，$a\geq2$；$a\geq2$ 时，$h'(x)=1-\dfrac{1}{a^2}>0$；所以 $h(a)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增；所以 $h(2)=\dfrac{9}{2}$ 是 $h(a)$ 的最小值．

39.【解析】(*I*) 设 $-2\leq x\leq-1$，则 $0\leq x+2\leq1$，所以 $f(x+2)=(x+2)^2=-f(x)$，所以 $f(x)=-(x+2)^2$；设 $-1\leq x\leq0$，则 $0\leq -x\leq1$，所以 $f(-x)=(-x)^2=-f(x)$，所以 $f(x)=-x^2$．综上：当 $-2\leq x\leq0$ 时，$f(x)=\begin{cases}-(x+2)^2,(-2\leq x\leq-1)\\ -x^2,(-1\leq x\leq0)\end{cases}$．

（2）由题：$32\sin\theta\cos\theta=9\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\dfrac{9}{32}$，所以 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{25}{16}$，所以 $\sin\theta+\cos\theta=\pm\dfrac{5}{4}$．因为 $\sin\theta\cos\theta>0$，所以 θ 可能在一、三象限，若 θ 在三象限，则 $\vec{a},\vec{b}$ 反向，与题意矛盾；若 θ 在一象限，则 $\vec{a},\vec{b}$ 同向．综上，θ 只能在一象限．所以 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{5}{4}$，所以 $f(\dfrac{2017}{\sin\theta+\cos\theta})=f(2017\times\dfrac{4}{5})=f(2015\times\dfrac{4}{5}+2\times\dfrac{4}{5})=f(403\times4+\dfrac{8}{5})$，（※）由 $f(x+2)=-f(x)$ 得 $f(x+4)=-f(x+2)=-[-f(x)]=f(x)$，所以（※）式 $=f(\dfrac{8}{5})=-f(\dfrac{8}{5}-2)=-f(-\dfrac{2}{5})=f(\dfrac{2}{5})=(\dfrac{2}{5})^2=\dfrac{4}{25}$（或 0.16)

(3) 先说明对称性：由 (II)：$f(x+4)=f(x)$，再由已知：$f(x)$ 是奇函数且 $f(x+2)=-f(x)$，得 $f(x-2)=-f(x)=f(-x)$，令 x 为 $-x$，得 $f(-2-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关 $x=-1$ 对称.

设 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最大值为 $M(t)$，最小值为 $m(t)$，则 $h(t)=M(t)-m(t)$．显然：区间 $[t,t+1]$ 的中点为 $t+\frac{1}{2}$．所以，如图：



(*i*) 当 $t\ge -2$ 且 $t+\frac{1}{2}\le -1$，即 $-2\le t\le -\frac{3}{2}$ 时，$M(t)=-(t+2)^2$，$m(t)=-1$，所以 $h(t)=M(t)-m(t)=-(t+2)^2+1$；

(*ii*) 当 $t+1\le 0$ 且 $t+\frac{1}{2}\ge -1$，即 $-\frac{3}{2}\le t\le -1$ 时，$M(t)=-(t+1)^2$，$m(t)=-1$，所以 $h(t)=M(t)-m(t)=-(t+1)^2+1$；

(*iii*) 当 $-1\le t\le 0$ 时，$M(t)=(t+1)^2$，$m(t)=-t^2$，所以 $h(t)=M(t)-m(t)=(t+1)^2+t^2=2t^2+2t+1$．

综上：$h(t)=\begin{cases}-(t+2)^2+1,(-2\le t\le -\frac{3}{2})\\ -(t+1)^2+1,(-\frac{3}{2}\le t\le -1)\\ 2t^2+2t+1,(-1\le t\le 0)\end{cases}$．

专题 7 嵌套函数与零点问题

达标训练（适合高一）

1.【解析】法一：由设 x_1，x_2 分别是函数 $f(x)=x-a^{-x}$ 和 $g(x)=x\log_a x-1$ 的零点（其中 $a>1$），可知 x_1 是方程 $a^x=\frac{1}{x}$ 的解；x_2 是方程 $\frac{1}{x}=\log_a x$ 的解；则 x_1，x_2 分别为函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象与函数 $y=y=a^x$ 和函数 $y=\log_a x$ 的图象交点的横坐标；设交点分别为 $A(x_1,\frac{1}{x_1})$，$B(x_2,\frac{1}{x_2})$，由 $a>1$，知 $0<x_1<1$；$x_2>1$；又因为 $y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 以及 $y=\frac{1}{x}$ 的图象均关于直线 $y=x$ 对称，所以两交点一定关于 $y=x$ 对称，由于点 $A(x_1,\frac{1}{x_1})$，关于直线 $y=x$ 的对称点坐标为 $(\frac{1}{x_1},x_1)$，所以 $x_1=\frac{1}{x_2}$，有 $x_1x_2=1$，而 $x_1\ne x_2$ x_1+4x_2，则 $x_1+4x_2=x_1+x_2+3x_2\ge 2\sqrt{x_1x_2}+3x_2>2+3=5$，即 $x_1+4x_2\in(5,+\infty)$，故选 D.

法二：$x_1=a^{-x_1}\Rightarrow x_1a^{x_1}=1\Rightarrow (a^{x_1})^{a^{x_1}}=a$，$x_2\log_a x_2=1\Rightarrow a^{x_2\log_a x_2}=(x_2)^{x_2}=a>1$，所以 $a^{x_1}=x_2=\frac{1}{x_1}$，且 $x_2>1$，$x_1+4x_2=4x_2+\frac{1}{x_2}>5$，故选 D.

2.【解析】根据题意，$f(x)=(\frac{1}{3})^x-\log_2 x$，$(x>0)$ 在函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，若 a 是 $f(x)$ 的零点，则有 $f(a)=0$，若 $0<x_0<a$，则 $f(x_0)>0$，故选 D.

3.【解析】设 $f(x)=t,t\ge 0$，则方程 $f(f(x))=x$ 等价为 $f(t)=x$，即 $\begin{cases}\sqrt{x-a}=t\\ \sqrt{t-a}=x\end{cases}$，所以 $t=x$，即 $f(x)=x$，所以 $\sqrt{x-a}=x$ 在 $x\ge 0$ 时有解，所以 $a=-x^2+x$，设 $g(x)=-x^2+x=-x(x-1)$，则 $a\le g(x)_{\max}=g(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，故选 A.

4.【解析】因为 $f(-x)=\frac{-x}{1+|x|}=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{x}{1+x}=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\in(0,1)$

知当 $x<0$ 时，$f(x)\in(-1,0)$，$x=0$ 时，$f(x)=0$ 所以 $f(x)\in(-1,1)$，即函数的值域为 $(-1,1)$ 故 A 正确；若对任意 $x\in R$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则函数 $f(x)$ 为增函数，因为当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$，则 $y=\frac{1}{x}$

为减函数，$y=1+\frac{1}{x}$ 为减函数，则 $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$，$f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数，故

B 正确，因为 $f_1(x)=f(x)$，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$，$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{\frac{x}{1+|x|}}{1+|\frac{x}{1+|x|}|}=\frac{x}{1+2|x|}$，

$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{\frac{x}{1+2|x|}}{1+|\frac{x}{1+2|x|}|}=\frac{x}{1+3|x|}\ldots$ 所以 $f_n(x)=\frac{x}{1+n|x|}$ 对任意的 $n\in N^*$ 恒成立，即 C 正确；

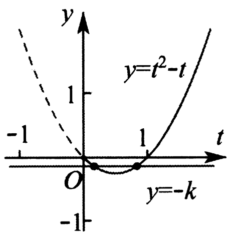
对任意的 $x\in[-1,1]$，$f(x)$ 为增函数，所以函数的最大值为 $f(1)=\frac{1}{2}$，要使函数 $f(x)\le t^2-2at+\frac{1}{2}$ 恒成立，

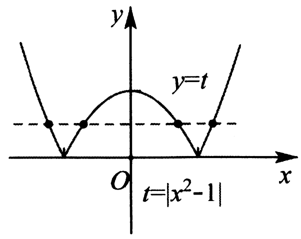
即 $t^2-2at+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}$，即 $t^2-2at\ge 0$，设 $h(a)=-2ta+t^2$，若 $a\in[-1,1]$ 时，则 $\begin{cases}h(1)=-2t+t^2\ge 0\\h(-1)=2t+t^2\ge 0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}t\ge 2或t\le 0\\t\ge 0或t\le -2\end{cases}$，即 $h(1)=-2ta+t^2$，$t\le -2$ 或 $t=0$，故 D 错误，故选 ABC.

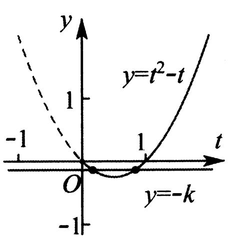
5. 【解析】令 $t=|x^2-1|$，则 $t^2-t=-k(t\ge 0)$，原问题转化为 $y=t^2-t$ 与 $y=-k$ 的图像在 $t\in[0,+\infty)$ 上的交点个数问题．结合图像，分类讨论可知，

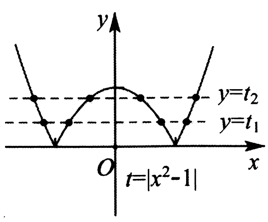
①当 $k=\frac{1}{4}$ 时，$t=\frac{1}{2}$，此时原方程 4 解；



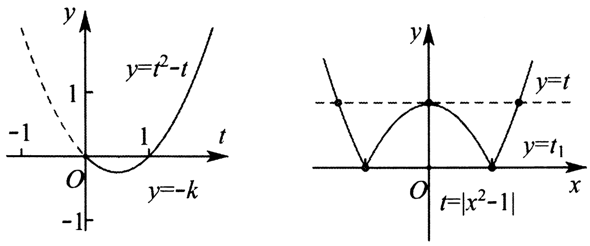


②当 $k\in(0,\frac{1}{4})$ 时，t 有两解，$t_1+t_2=1$，且 $t_1\in(0,\frac{1}{2})$，$t_2\in(\frac{1}{2},1)$，此时原方程8解

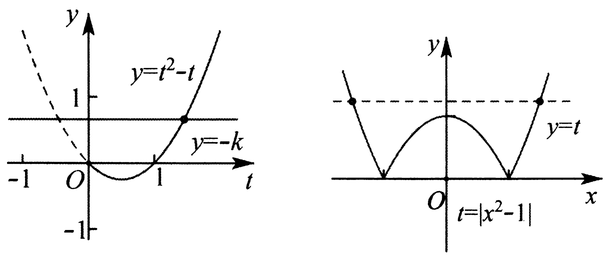




③当 $k=0$ 时，$t=0$ 或 $t=1$，此时原方程5解；



④当 $k\in(-\infty,0)$ 时，t 有一解，且 $t>1$，此时原方程2解.



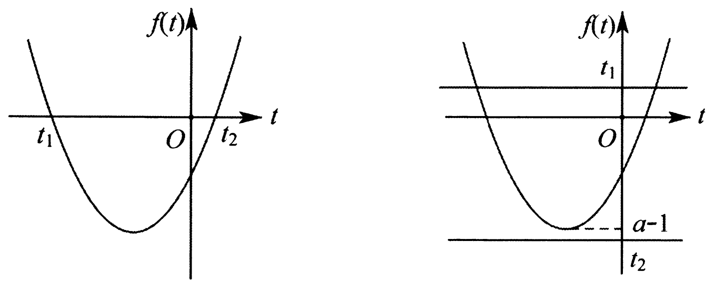
综上可得，原方程有2、4、5、8解．故选A.

6.【解析】法一：x_1 是方程 $xe^x=e^3$，x_2 是方程 $x\ln x=e^3$，所以 $x_1e^{x-1}=e^3=e\cdot e^2$，则 $2<x_1<3$，

$x_2\ln x_2=e^3=e^2\cdot e$，$e^2<x_2<2e^2$，所以 $2e^2<x_1x_2<6e^2$；$e^2\approx 7.29>6$，所以 $e^4=e^2$．$e^2>6e^2$，所以 $2e^2<x_1x_2<e^4$；所以B正确，故选B.

法二 $x_1e^{x_1}=e^3\Rightarrow(e^{x_1})^{e^{x_1}}=e^{e^3}$，$x_2\ln x_2=e^3\Rightarrow(x_2)^{x_2}=e^{e^3}$，所以 $e^{x_1}=x_2=\dfrac{e^3}{x_1}\Rightarrow x_1x_2=e^3$.

7.【解析】由图象知，$y=f(u)$ 的零点有三个，$-2<u_1<-1,u_2=0,1<u_3<2$．因为 $y=f[g(x)]$ 由 $y=f(u),u=g(x)$ 复合，作直线 $u=u_1$，$u=u_2$，$u=u_3$ 分别与函数 $u=g(x)$ 的图象有2个公共点，故 $y=0$ 共对应6个 x，①正确；而 $y=f[f(x)]$ 由 $y=f(u),u=f(x)$ 复合，作直线 $u=u_1$，$u=u_2$，$u=u_3$ 分别与函数 $u=f(x)$ 的图象有1个，3个，1个公共点，故故 $y=0$ 共对应5个 x，③正确；又 $y=g(t)$ 有二个零点，$-2<t_1<-1$，$0<t_2<1$．且 $y=g[f(x)]$ 由 $y=g(t),t=f(x)$ 复合，作直线 $t=t_1$，$t=t_2$ 分别与函数 $t=f(x)$ 的图象有1个，3个公共点，故 $y=0$ 共对应4个 x，故②不正确；函数 $y=g[g(x)]$ 由 $y=g(t),t=g(x)$ 复合，作直线 $t=t_1$，$t=t_2$ 分别与函数 $t=f(x)$ 的图象有2个公共点，故 $y=0$ 共对应4个 x，④正确．因此，正确命题的是①③④.

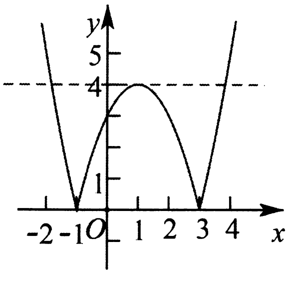


8.【解析】设 $t=f(x)$，则 $t^2+at+b=0$，由 $f(x)=|x^2-2x-3|$ 得图象可知，$t^2+at+b=0$ 有且只有一个正根 $t=4$，否则，原方程不会恰好有三个不等实根，

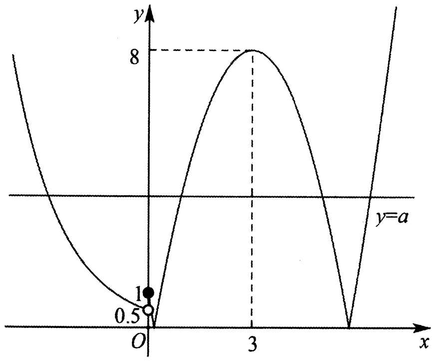
①当 $t^2+at+b=0$ 只有一个根且是 4 时，$\begin{cases}16+4a+b=0\\ \Delta=a^2-4b=0\end{cases}$，解得 $a=-8$；

②当 $t^2+at+b=0$ 有两个根，一个负根，一个正根且是 4 时，$\begin{cases}16+4a+b=0\\ 0+0+b<0\end{cases}$，解得：$a>-4$

综上所述：实数 a 的取值范围时 $a=-8$ 或 $a>-4$，故选 D.



8 题图

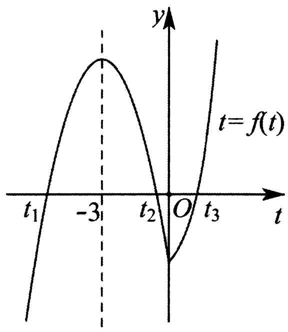


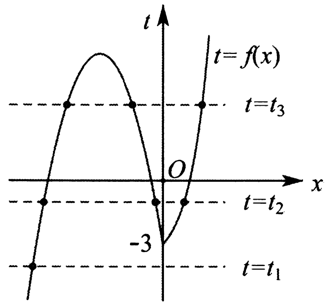
9 题图

9.【解析】因为 $g(x)=|f(x)|-a$ 恰有 4 个零点，所以 $y=f(x)|$ 与 $y=a$ 有 4 个交点，作出 $y=|f(x)|$ 与 $y=a$ 的函数图象如图所示：所以 $0<a\le\frac{1}{2}$ 或 $1<a<8$．故选 D.

10.【解析】因为 $y=f[f(x)]$ 的零点个数 $\Leftrightarrow f[f(x)]=0$ 的根的个数，令 $t=f(x)$，则 $f(t)=0$

$y=f(x)$ 的图象如图所示：





由图可知：$f(t)=0$ 有三个根，$t_1\in(-6,-4)$，$t_2\in(-2,0)$，$t_3\in(0,2)$，所以当 $t_1=f(x)$ 时，由图知方程有且只有一个根；当 $t_2=f(x)$ 时，由图可知方程有三个实根；当 $t_3=f(x)$ 时，由图可知方程有三个根，综上所述：$y=f[f(x)]$ 有 7 个零点．故选 A.

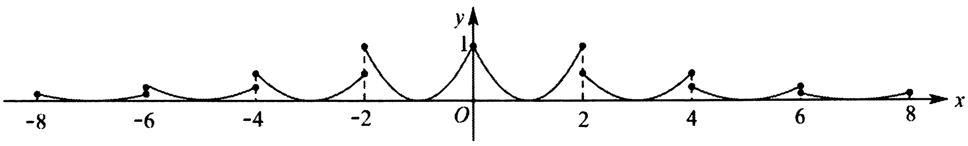
11.【解析】由题意，当 $1<k<2$ 时，方程有四个不同的解，且 $x_1+x_2=-2$，$x_3x_4=1$ 且 $2\le x_4<4$；

故 $2+\frac{1}{2}\le x_3+x_4<4+\frac{1}{4}$，故 $\frac{1}{2}\le x_1+x_2+x_3+x_4<\frac{9}{4}$，即 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 的取值范围是 $[\frac{1}{2},\frac{9}{4})$，故选 B.

12.【解析】当 $x^2+2x-1>0$ 时，$f(x^2+2x-1)=|2x^2+4x-10|+4\ge4$，则当 $4<a<8$ 时，$g(x)$ 有 4 个不同的零点，当 $a=4$ 或 $a\ge8$ 时，$g(x)$ 有 2 个不同的零点，当 $a<4$ 时，$g(x)$ 没有零点，当 $x^2+2x-1\le0$ 时，$f(x^2+2x-1)=(x^2+2x-1)^3+7=a$，设 $t=x^2+2x-1$，则 $-2\le t\le0$，$-8\le t^3\le0$，因为 $t^2=a-7$，所以当 $a>7$ 或 $a<-1$ 时，$g(x)$ 没有零点，当 $a=-1$ 时，$g(x)$ 有 1 个零点，当 $-1<a\le7$ 时，$g(x)$ 有 2 个不同的零点．因为 $g(x)$ 有 6 个不同的零点，所以 $4<a\le7$．故选 A.

13.【解析】因为 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)=(x-1)^2$，又 $f(x)=\frac{1}{2}f(x-2)$，所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，即将 $f(x)$ 在区

间$(0,2]$图象依次向右移2个单位的同时再将纵坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$倍，得到函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上的图象．关于y轴对称得到$(-\infty,0)$的图象．如图所示：



令$g(x)=0$，得$f(x)=\frac{1}{2}$或$f(x)=\frac{1}{4}$，即$y=\frac{1}{2}$与$y=\frac{1}{4}$两条直线截函数$y=f(x)$图象共16个交点，所以函数$g(x)$共有16个零点．故选C．

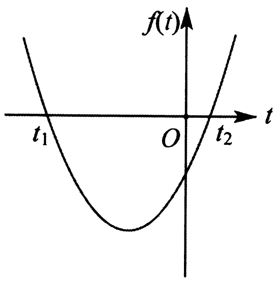
14．【解析】设$t=f(x)-e^x-x$，则$f(x)=e^x+x+t$，则条件等价为$f(t)=e^{-2}-4$，令$x=t$，则$f(t)=e^t+2t=e^{-2}-4$，因为函数$f(x)$为单调递增函数，所以函数为一对一函数，解得$t=-2$，所以$f(x)=e^x+x-2$，因为$f(0)=1+0-2=-1<0$，$f(1)=e+1-2=e-1>0$，所以$f(0)f(1)<0$，所以函数零点所在的区间为$(0,1)$，又$y=f(x)$的零点所在的区间是$(n,n+1)$，则$n=0$，故答案为0

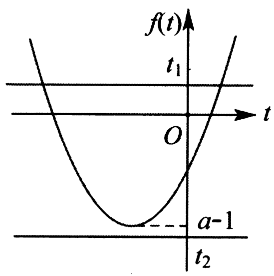
15.【解析】根据题意，得若对任意$x\in(0,+\infty)$，都有$f[f(\frac{1}{x})-x]=2$，得到$f(\frac{1}{x})-x$为一个常数，以t换$\frac{1}{x}$，得$f(t)-\frac{1}{t}=n$，则$f(t)-\frac{1}{t}=n$，$f(n)=2$，所以$f(t)=\frac{1}{t}+n$，所以$f(n)=\frac{1}{n}+n=2$，所以$n=1$，所以$f(x)=1+\frac{1}{x}$，所以$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，所以$f'(\frac{1}{2})=-4$．故答案为-4．

16.【解析】设$f(1)=t$，由题意知$t\neq0$，则代入$f(x)f(f(x)+\frac{1}{x})=1$得：$f(1)f(f(1)+1)=1\Rightarrow f(t+1)=\frac{1}{t}$，令$x=t+1$代入$f(x)f(f(x)+\frac{1}{x})=1$得：$f(t+1)f(f(t+1)+\frac{1}{t+1})=1$，所以$f(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1})=t=f(1)$又在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$为单调函数，所以$\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}=1$　化简得$t^2-t-1=0\Rightarrow t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$．

17.【解析】设$u=f(x)-x^2+x$，由题意知，$f(u)=u$，因为方程$f(x)=x$有且只有一个根，设为x_0，则$f(x_0)=x_0$，所以$u=x_0$，$f(x)-x^2+x=x_0$，所以$f(x_0)-{x_0}^2+x_0=x_0$，即${x_0}^2=x_0$，解得$x_0=0$或$x_0=1$．当$x_0=0$时，$f(x)=x^2-x$，方程$f(x)=x$的解有两个，不合题意；当$x_0=1$时，$f(x)=x^2-x+1$，方程$f(x)=x$的解只有一个．所以$f(x)=x^2-x+1$．故答案为$f(x)=x^2-x+1$．

18.【解析】令$f(x)=t$，则$f(t)=t^2+2t+a=0$有两解t_1,t_2，且$f(x)=t_1$和$f(x)=t_2$共有两解，如图，画出$y=f(t)$和$t=f(x)$的图象，两个图象形状一致，“内横外竖”法

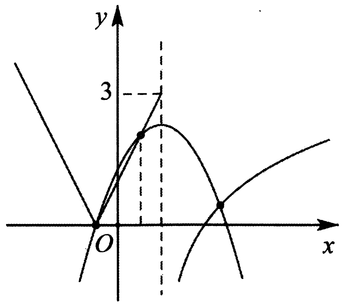




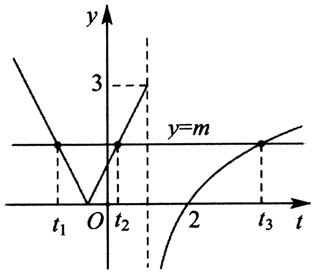
如左图，$y=f(t)$的零点为$t=t_1,t=t_2$，如右图，$t=f(x)$的图象与两根水平线$t=t_1$，$t=t_2$共产生两个交

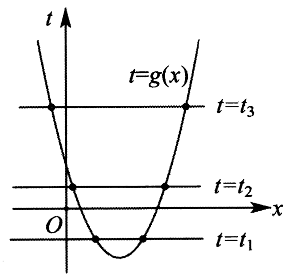
点，所以必有 $t_1 < f_{\min}(x) < t_2$，即 $t_1 < a-1 < t_2$，所以 $f(a-1)<0$，即 $a^2+a-1<0$，解得 $a\in(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$．

19.【解析】对于① $y=f(f(x))=0$，所以 $\log_2(f(x))=0$，或 $|2f(x)|+1|=0$，所以 $f(x)=1$，或 $f(x)=-\frac{1}{2}$，所以 $|2x+1|=1$，或 $\log_2(x-1)=1$ 或 $\log_2(x-1)=-\frac{1}{2}$，解得 $x=0$ 或 $x=-1$．或 $x=3$，或 $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，故函数 $y=f(f(x))$ 有 4 个零点，故正确；对于② $g(x)=x^2-2x+2m-1$，在 $(0,3)$ 有零点，当 $g(x)$ 在 $(0,3)$ 上有一个零点时，所以 $g(0)g(3)<0$，所以 $(2m-1)(9-6+2m-1)<0$，即 $-1<m<\frac{1}{2}$，或 $\Delta=4-4(2m-1)=0$，解得 $m=1$，当 $g(x)$ 在 $(0,3)$ 上有两个零点时，$\begin{cases}\Delta=4-4(2m-1)>0\\ g(0)>0\\ g(3)>0\end{cases}$，解得 $\frac{1}{2}<m<1$，当 $m=\frac{1}{2}$，$g(x)=x^2-2x=0$，解得 $x=2$，综上所述：函数 $y=g(x)$ 在 $(0,3)$ 有零点，则 $-1<m\le 1$，故②正确，对于③，若 $m=-\frac{1}{8}$ 时，分别画出 $y=f(x)$ 与 $y=-g(x)$ 的图象，如图所示，



由图象可知，函数 $y=f(x)+g(x)$ 有 3 个零点，故③不正确．对于④法一：因为函数 $f(x)=\begin{cases}|2x+1|, x<1\\ \log_2(x-1), x>1\end{cases}$，$g(x)=x^2-2x+2m-1$．所以当 $g(x)=(x-1)^2+2m-2<1$ 时，即 $(x-1)^2<3-2m$ 时，则 $y=f(g(x))=|2g(x)+1|=|2(x-1)^2+4m-3|$．当 $g(x)=(x-1)^2+2m-2>1$ 时，即 $(x-1)^2>3-2m$ 时，则 $y=f(g(x))=\log_2[(x-1)^2+2m-3]$．①当 $3-2m\le 0$ 即 $m\ge\frac{3}{2}$ 时，$y=m$ 只与 $y=f(g(x))=\log_2[(x-1)2+2m-3]$ 的图象有两个交点，不满足题意，应该舍去．②当 $m<\frac{3}{2}$ 时，$y=m$ 与 $y=f(g(x))=\log_2[(x-1)2+2m-3]$ 的图象有两个交点，需要直线 $y=m$ 与函数 $y=f(g(x))=|2g(x)+1|=|2(x-1)^2+4m-3|$ 的图象有四个交点时才满足题意．所以 $0<m<3-4m$，又 $m<\frac{3}{2}$，解得 $0<m<\frac{3}{5}$．综上可得：m 的取值范围是 $0<m<\frac{3}{5}$．





法二 令 $g(x)=t$，$y=f(t)$ 与 $y=m$ 的图象最多有3个零点，当有3个零点，则 $0<m<3$，从左到右交点的横坐标依次 $t_1<t_2<t_3$，由于函数 $y=f(g(x))-m$ 有6个零点，$t=g(x)=x^2-2x+2m-1$，则每一个 t 的值对应2个 x 的值，则 t 的值取最小值 t_1 时，必须高于内函数的顶点，函数 $g(x)=x^2-2x+2m-1$ 对称轴 $x=1$，则 t 的最小值为 $1-2+2m-1=2m-2$，由图可知，$2t_1+1=-m$，则 $t_1=\dfrac{-m-1}{2}$，满足 $\dfrac{-m-1}{2}>2m-2$①，又 $0<m<3$②，联立①②得 $0<m<\dfrac{3}{5}$．所以实数 m 的取值范围是 $(0,\dfrac{3}{5})$．故④正确，故答案为①②④．

20.【解析】(1) $f[f(x)-x-\dfrac{2}{x}]=f(x)-x-\dfrac{2}{x}+3$，且 $f(1)=5$，可得 $f[f(1)-1-2]=f(1)-1-2+3$，即为 $f(2)=5$；

(2) 有且仅有一个实数 x_0 满足方程 $2f(x)=x$，即有 $f(x_0)=\dfrac{x_0}{2}$，当 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 时都有

$f[f(x)-x-\dfrac{2}{x}]=f(x)-x-\dfrac{2}{x}+3$，可令 $f(x)-x-\dfrac{2}{x}=-x_0$，即有 $f(x_0)-x_0-\dfrac{2}{x_0}=-x_0$，即有 $x_0=\pm2$，

则 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}+2$ 或 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}-2$，若 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}+2$，可得 $f[f(x)-x-\dfrac{2}{x}]=f(2)=5$，成立；

若 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}-2$，可得 $f[f(x)-x-\dfrac{2}{x}]=f(-2)=-5$，而 $f(x)-x-\dfrac{2}{x}+3=-2+3=1$，不成立，

综上可得 $x_0=-2$，且 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}+2$；

(3) 由 $x_0=-2$，可得 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}+2$，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,\sqrt{2})$ 递减，$(\sqrt{2},6]$ 递增，理由：$f(x)=x+\dfrac{2}{x}+2$ 的导数为 $f'(x)=1-\dfrac{2}{x^2}$，当 $f'(x)>0$，可得 $\sqrt{2}<x<6$；$f'(x)<0$，可得 $1<x<\sqrt{2}$，则 $f(x)$ 的增区间为 $(\sqrt{2},6)$，减区间为 $(1,\sqrt{2})$．

21.【解析】(1) 令 $1\le x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-bx_1-x_2^3+bx_2=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-b)<0$

$x_1^2+x_1x_2+x_2^2-b>0\Rightarrow b<x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ 恒成立 $\Rightarrow b\le1+1+1=3$

(2)（证法一）设 $f(x_0)=m$，由 $f[f(x_0)]=x_0$ 得 $f(m)=x_0$，于是有 $\begin{cases}{x_0}^3-bx_0=m & (1)\\ m^3-bm=x_0 & (2)\end{cases}$

(1)－(2)得：$({x_0}^3-m^3)-b(x_0-m)=m-x_0$，化简可得 $(x_0-m)({x_0}^2+mx_0+m^2+1-b)=0$，因为 $x_0\ge1,f(x_0)=m\ge1$，所以 ${x_0}^2+mx_0+m^2+1-b\ge4-b\ge1>0$，故 $x_0-m=0$，即有 $f(x_0)=x_0$．

（证法二）假设 $f(x_0)\ne x_0$，①若 $f(x_0)>x_0$，则 $f(f(x_0))>f(x_0)$，即 $x_0>f(x_0)$ 与 $f(x_0)>x_0$ 矛盾，故不存在这种情况；②若 $f(x_0)<x_0$，则 $f(f(x_0))<f(x_0)$，即 $x_0<f(x_0)$ 与 $f(x_0)<x_0$ 矛盾，故不存在这种情况；综上，$f(x_0)=x_0$

22.【解析】(1) $f(1-x)=a(1-2|1-x-\dfrac{1}{2}|)=a(1-2|x-\dfrac{1}{2}|)=f(x)$，故函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称．

(2) $f(x)=a(1-2|x-\dfrac{1}{2}|)=\begin{cases}2ax, & x\le\dfrac{1}{2}\\ 2a(1-x), & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$．

i)当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(f(x))=\begin{cases}x, x\le\frac{1}{2}\\1-x, x>\frac{1}{2}\end{cases}$．$f(f(x))=x$ 的解集为 $(-\infty,\frac{1}{2}]$，此时也满足 $f(x)=x$，故 $f(x)$ 不存在二阶周期点;

ii)当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f(f(x))=\begin{cases}4a^2x, x\le\frac{1}{2}\\4a^2(1-x), x>\frac{1}{2}\end{cases}$．$f(f(x))=x$ 的解集为 $\{0\}$．但 $f(0)=0$，故 $f(x)$ 不存在二阶周期点;

iii)当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$f(f(x))=\begin{cases}4a^2x, x\le\frac{1}{4a}\\2a-4a^2x, \frac{1}{4a}<x\le\frac{1}{2}\\2a(1-2a)+4a^2x, \frac{1}{2}<x\le1-\frac{1}{4a}\\4a^2(1-x), x>1-\frac{1}{4a}\end{cases}$．

$f(f(x))=x$ 的解集为 $\left\{0,\frac{2a}{1+4a^2},\frac{2a}{1+2a},\frac{4a^2}{1+4a^2}\right\}$．又 $f(0)=0$，$f(\frac{2a}{1+4a^2})=\frac{4a^2}{1+4a^2}\ne\frac{2a}{1+4a^2}$，$f(\frac{2a}{1+2a})=\frac{2a}{1+2a}$，$f(\frac{4a^2}{1+4a^2})=\frac{2a}{1+4a^2}\ne\frac{4a^2}{1+4a^2}$．故 $f(x)$ 存在两个二阶周期点．综上所述，$a>\frac{1}{2}$．

达标训练（适合高三一轮）

1.【解析】根据题意，对任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f[f(x)-e^x-2\ln x]=e+1$，又由 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的单调函数，则 $f(x)-e^x-2\ln x$ 为定值，设 $t=f(x)-e^x-2\ln x$，则 $f(x)=e^x+2\ln x+t$，又由 $f(t)=e+1$，即 $e^t+2\ln t+t=e+1$，解得 $t=1$，则 $f(x)=1+2\ln x+e^x$，$f'(x)=\frac{2}{x}+e^x>0$，可得 $f(x)$ 在 $x>0$ 递增，$f(\frac{1}{e})=e^{\frac{1}{e}}-2+1>0$，$f(\frac{1}{e^2})=e^{\frac{1}{e^2}}-3<0$，则 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e})$ 有零点．故选 B．

2.【解析】设 $f(1)=t$，由题意知 $t\ne0$，令 $x=1$，代入 $f(x)\cdot f[f(x)+\frac{1}{x}]=1$，得 $f(1)\ f[f(1)+1]=1$，即 $f(t+1)=\frac{1}{t}$，令 $x=t+1$ 代入 $f(x)\cdot f[f(x)+\frac{1}{x}]=1$ 得，$f(t+1)f[f(t+1)+\frac{1}{t+1}]=1$，所以 $f(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1})=t=f(1)$，因为在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 为单调函数，所以 $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}=1$，化简得 $t^2-t-1=0$，解得，$t=\frac{1+\sqrt5}{2}$ 或 $t=\frac{1-\sqrt5}{2}$．因为定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 为增函数，且 $f(x)\cdot f(f(x)+\frac{1}{x})=1$，所以 $f(1)=\frac{1-\sqrt5}{2}$．故选 B．

3.【解析】根据题意，对任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f[f(x)-\log_2x]=3$，又由 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的单调函数，则 $f(x)-\log_2x$ 为定值，设 $t=f(x)-\log_2x$，则 $f(x)=\log_2x+t$，又由 $f(t)=3$，即 $\log_2t+t=3$，解得 $t=2$，则 $f(x)=\log_2x+2$，$f'(x)=\frac{1}{x\ln2}$，将 $f(x)=\log_2x+2$，$f'(x)=\frac{1}{x\ln2}$，代入 $f(x)-f'(x)=2$，

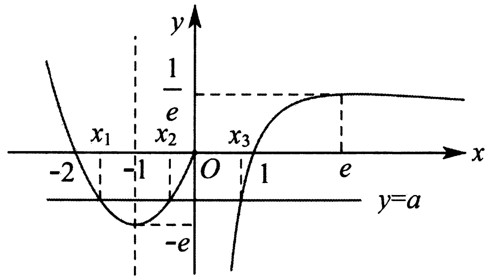
可得 $\log_2 x+2-\frac{1}{x\ln 2}=2$，即 $\log_2 x-\frac{1}{x\ln 2}=0$，令 $h(x)=\log_2 x-\frac{1}{x\ln 2}$，分析易得，$h(1)=\frac{1}{\ln 2}<0$，$h(2)=1-\frac{1}{2\ln 2}>0$，则 $h(x)=\log_2 x-\frac{1}{x\ln 2}$ 的零点在 $(1,2)$ 之间，即 $f(x)-f'(x)=2$ 的解在 $(1,2)$ 之间；故答案为 $(1,2)$

4.【解析】由题意可得 $f(x)$ 在定义域内为增函数，且 $f(x)\ge 0$，因此 $y_0\in[0,1]$，利用 $f(f(x))=x$ 等价于 $f(x)=x$ 有解这个结论：存在 $y_0\in[0,1]$，使得 $f(f(y_0))=y_0$，等价 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 有解，所以 $x=\sqrt{e^x+x-a}$，分离参数可得：$a=e^x-x^2+x=g(x)$，$x\in[0,1]$，所以 $g'(x)=e^x-2x+1\ge 0$，所以 $g(x)$ 单调递增，$g(x)\in[1,e]$，所以若曲线 $y=\sin x$ 上存在点 (x_0,y_0) 使得 $f(f(y_0))=y_0$，则实数 a 的取值范围是 $[1,e]$，故选 A.

5. 解法 1：因为 $x-f(g(x))=0$，得到 $f[g(x)]=x$. 所以 $g[f(g(x))]=g(x)$，把 $g(x)$ 整体换元得 $g[f(x)]=x$. 要使 $g[f(x)]=x$ 有解，依次代入得选项 B 中方程的 $\Delta<0$ 中，无解． 故选 B.

解法 2：不妨令 $g(x)=x$，则 $f(x)=x$，所以 $g[f(x)]=g(x)=x$，依次代入，发现选项 B 中 $x^2+x+\frac{1}{5}=x$，则 $x^2+\frac{1}{5}=0$，显然方程无解，故选 B.

6.【解析】当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，所以当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\le 0$ 时，$f(x)=ex^2+2ex=e(x+1)^2-e$，对称轴为 $x=-1$，画出函数 $f(x)$ 的图象如图，

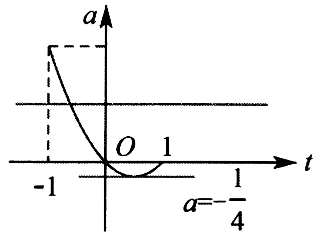


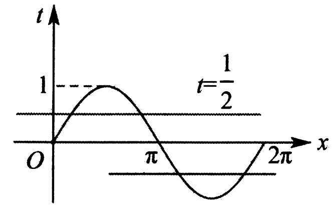
由图，根据二次函数对称性得 $x_1+x_2=-2$，二次函数的最低点处 $f(-1)=-e$，又因为 $f(\frac{1}{e})=\frac{\ln\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}}=-e$，$f(1)=0$，所以 $x_3\in(\frac{1}{e},1]$，所以 $x_1+x_2+x_3\in(-2+\frac{1}{e},-1]$．故答案为 $(-2+\frac{1}{e},-1]$．

7.【解析】令 $f(x)=t$ 关于 x 的方程 $m[f(x)]^2+nf(x)+p=0$ 的解集应满足：$f(x)=t_1$ 或 $f(x)=t_2$，而方程 $m[f(x)]^2+nf(x)+p=0$ 的解集为 x 的值，且满足：$y=f(x)$ 与 $y=t_1$ 图像的交点，或 $y=f(x)$ 与 $y=t_2$ 图像的交点．又由已知：函数 $y=f(x)$ 的零点关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 对称：对于 A，对称轴可以是 $x=\frac{3}{2}$，对于 B，对称轴可以是 $x=\frac{5}{2}$；对于 C，对称轴可以是 $x=\frac{5}{2}$；对于 D，无法找到对应的对称轴．故选 D.

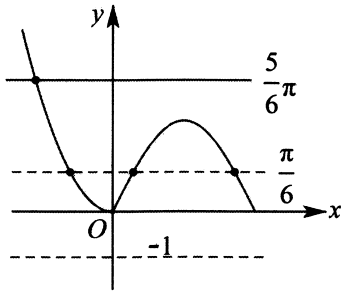
8.【解析】(参变分离+图象法）令 $t=\sin x$，$x\in[0,2\pi)$ 转化为：$a=t^2-t$（$-1\le t\le 1$），当 $a=-\frac{1}{4}$ 时，满足条件；当 $0<a<2$ 时，由图知，对应的 t 唯一且在 $(-1,0)$ 范围内所对应的 x 有两个，也满足条件．故

答案 $a=-\frac{1}{4}$ 或 $0<a<2$





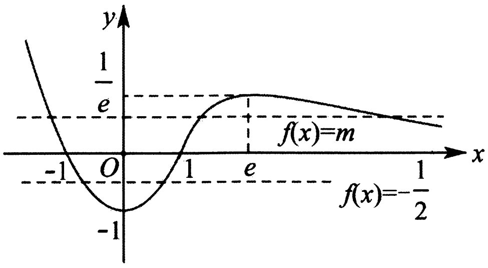
9.【解析】由题可知，当 $f(x)=1$ 时，$x=-1$，或 $x=\frac{\pi}{6}$，或 $x=\frac{5\pi}{6}$，要使 $f[f(x)]=1$，应有内嵌函数 $f(x)=-1$，或 $f(x)=\frac{\pi}{6}$，或 $f(x)=\frac{5\pi}{6}$，数形结合，由图可知原函数有4个零点．故答案4



10.【解析】设 $y=\frac{\ln x}{x}$，则 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$，由 $y'=0$，解得 $x=e$，当 $x\in(0,e)$ 时，$y'>0$，函数为增函数，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$y'<0$，函数为减函数．所以当 $x=e$ 时，函数取得极大值也是最大值为 $f(e)=\frac{1}{e}$．

方程 $2[f(x)]^2+(1-2m)f(x)-m=0$ 化为 $[f(x)-m][2f(x)+1]=0$．解得 $f(x)=m$ 或 $f(x)=-\frac{1}{2}$．

如图画出函数图象：可得 m 的取值范围是 $(0,\frac{1}{e})$．故选 C．



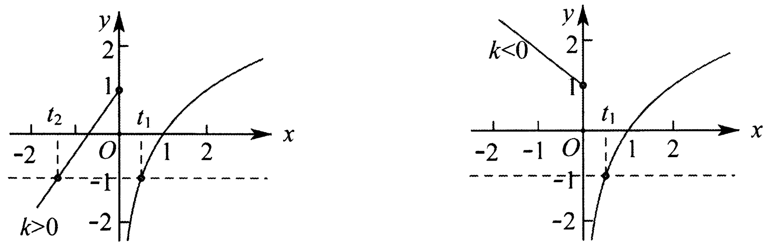
11.【解析】对于 A，$b=0$ 时，$f(x)=\frac{ax}{x^2+c}$，$f(-x)=-\frac{ax}{x^2+c}=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，故 A 正确；对于 B，$f(x)=\frac{a(x-b)}{(x-b)^2+c}$ 是奇函数 $h(x)=\frac{a}{x+\frac{c}{x}}$ 左右平移得到，故 B 正确；对于 C，因为

$f(x)=\frac{a(x-b)}{(x-b)^2+c}$（$a\neq0$，$b\in R$，$c>0$），所以 $y(x-b)^2-a(x-b)+cy=0$ 有实数解，所以

$\Delta=a^2-4cy^2\geq0$，又 $a\neq0$，$c>0$ 所以 $y^2\leq\frac{a^2}{4c}$，所以 $-\frac{|a|}{2\sqrt{c}}\leq y\leq\frac{|a|}{2\sqrt{c}}$．即存在实数 p 和 q，使得

$p\le f(x)\le q$ 对于任意的实数 x 恒成立，故 C 正确；对于 D，关于 x 的方程 $g(x)=0$ 的解 $\Leftrightarrow f(x)=\pm\sqrt{\frac{n}{m}}$ 的解，函数 $f(x)$ 的图象关于 x 轴上某点成中心对称，故解集不可能是 $\{-4,-2,0,3\}$，故 D 错；故选 ABC.

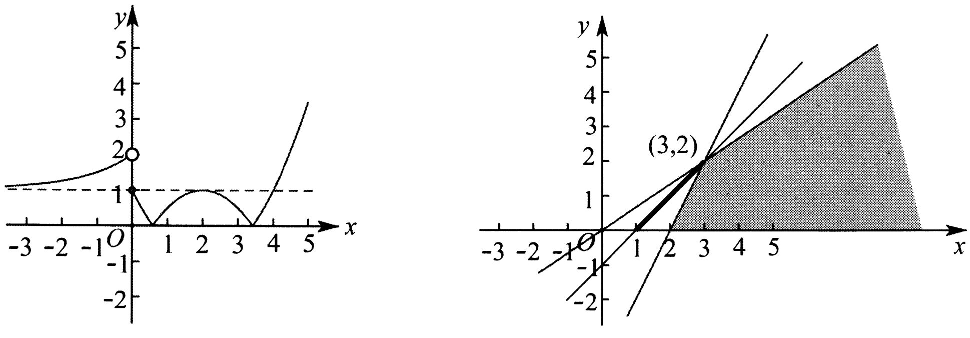
12.【解析】由 $y=f[f(x)]+1=0$，得 $f[f(x)]=-1$，设 $f(x)=t$，则方程 $f[f(x)]=-1$ 等价为 $f(t)=-1$，①若 $k>0$，作出函数 $f(x)$ 的图象如图：因为 $f(t)=-1$，所以此时方程 $f(t)=-1$ 有两个根其中 $t_2<0$，$0<t_1<1$，由 $f(x)=t_2<0$，知此时 x 有两解，由 $f(x)=t_1\in(0,1)$ 知此时 x 有两解，此时共有 4 个解，即函数 $y=f[f(x)]+1$ 有 4 个零点．②若 $k<0$，作出函数 $f(x)$ 的图象如图：因为 $f(t)=-1$，所以此时方程 $f(t)=-1$ 有一个根 t_1，其中 $0<t_1<1$，由 $f(x)=t_1\in(0,1)$ 知此时 x 只有1个解，即函数 $y=f[f(x)]+1$ 有1个零点．故选 CD.



13.【解析】因为关于 x 的方程 $f^2(x)-af(x)+b=0$ 有 5 个不同实数解，令 $t=f(x)$，所以 $t^2-at+b=0$ 有 2 个不同的正实数解，$\Delta=a^2-4b>0$，①其中一个为在 $(0,1)$ 上，一个在 $(2,+\infty)$ 上；所以 $\begin{cases}b>0\\1-a+b<0\\4-2a+b<0\end{cases}$，

②其中一个根为 0，另一个根为 1，所以 $a=1$，$b=0$，③其中一个根为 1，另一根在 $(1,2)$ 上 $\begin{cases}1-a+b=0\\4-2a+b>0\end{cases}$

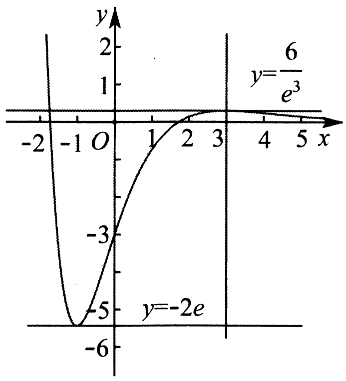
其对应的平面区域如下图所示：则 $\frac{b}{a}$ 表示点 (a,b) 与 $(0,0)$ 连线的斜率，所以 $\frac{b}{a}\in[0,\frac{2}{3})$，故选 B.



14.【解析】设 $f(t)=0$，由 $f(x)$ 的图象可知：$t=t_1\in(-2,-1)$ 或 $t=0$ 或 $t=t_2\in(1,2)$，设 $g(m)=0$，由 $g(x)$ 的图象可知：$m=m_1\in(-1,0)$ 或 $m=0$ 或 $m=m_2\in(0,1)$，$f(f(x))=0$ 的解的个数即 $t=f(x)$ 的图象与直线 $t=t_1\in(-2,-1)$，$t=0$，$t=t_2\in(1,2)$ 的交点个数之和，由图象可得：交点个数之和为3个，即 $a=3$，$f(g(x))=0$ 的解的个数即 $m=f(x)$ 的图象与直线 $m=m_1\in(-1,0)$，$m=0$，$m=m_2\in(0,1)$ 的交点个数之和，由图象可得：交点个数之和为 9 个，即 $b=9$，$g(g(x))=0$ 的解的个数即 $m=g(x)$ 的图象与直线 $m=m_1\in(-1,0)$，$m=0$，$m=m_2\in(0,1)$ 的交点个数之和，由图象可得：交点个数之和为 9 个，即 $c=9$，

$g(f(x))=0$ 的解的个数即 $t=f(x)$ 的图象与直线 $t=t_1\in(-2,-1)$，$t=0$，$t=t_2\in(1,2)$ 的交点个数之和，由图象可得：交点个数之和为 9 个，即 $d=9$，即 $a+b+c+d=3+9+9+9=30$，故答案为 30

15.【解析】函数 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)=\dfrac{2xe^x-(x^2-3)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{2x-x^2+3}{e^x}=\dfrac{-(x^2-2x-3)}{e^x}=\dfrac{-(x+1)(x-3)}{e^x}$，由 $f'(x)>0$，得 $-1<x<3$，$f(x)$ 递增；由 $f'(x)<0$，得 $x>3$ 或 $x<-1$，$f(x)$ 递减．即有 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处

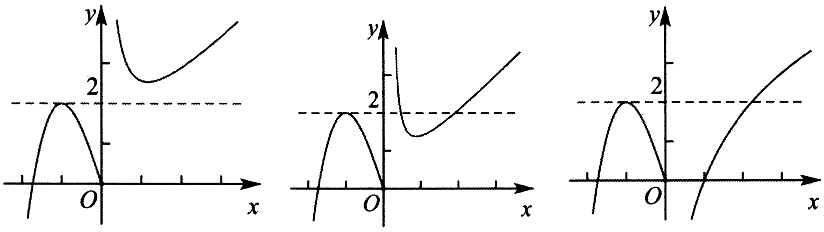


取得极小值 $f(-1)=-2e$；在 $x=3$ 处取得极大值 $f(3)=\dfrac{6}{e^3}$，作出 $f(x)$ 的图象，关于 x 的方程 $[f(x)]^2+tf(x)-\dfrac{12}{e^2}=0(t\in R)$，令 $n=f(x)$，则 $n^2-nt-\dfrac{12}{e^2}=0$，由判别式 $\Delta=t^2+\dfrac{48}{e^2}>0$，方程有两个不等实根，$n_1n_2=-\dfrac{12}{e^2}<0$，则原方程有一正一负实根．而 $-2e\times\dfrac{6}{e^3}==-\dfrac{12}{e^2}$，即当 $n_1=\dfrac{6}{e^3}$，则 $n_2=-2e$，此时 $y=n_1$，和 $f(x)$ 有两个交点，$y=n_2$ 与 $f(x)$ 有 1 个交点，此时共有 3 个交点，当 $n_1>\dfrac{6}{e^3}$，则 $-2e<n_2<0$，此时 $y=n_1$，和 $f(x)$ 有 1 个交点，$y=n_2$ 与 $f(x)$ 有 2 个交点，此时共有 3 个交点，当 $0<n_1<\dfrac{6}{e^3}$ 则 $n_2<-2e$，此时 $y=n_1$ 和 $f(x)$ 有 3 个交点，$y=n_2$ 与 $f(x)$ 有 0 交点，此时共有 3 个交点，当 $-2e<n_1<0$，则或 $n_2>\dfrac{6}{e^3}$，此时 $y=n_1$ 和 $f(x)$ 有 2 个交点，$y=n_2$ 与 $f(x)$ 有 1 个交点，此时共有 3 个交点，当 $n_1=-2e$，则 $n_2=\dfrac{6}{e^3}$，此时 $y=n_1$ 和 $f(x)$ 有 1 个交点，$y=n_2$ 与 $f(x)$ 有 2 个交点，此时共有 3 个交点，当 $n_1<-2e$，则 $0<n_2<\dfrac{6}{e^3}$，此时 $y=n_1$ 和 $f(x)$ 有 0 个交点，$y=n_2$ 与 $f(x)$ 有 3 个交点，此时共有 3 个交点，综上方程 $[f(x)]^2+tf(x)-\dfrac{12}{e^2}=0(t\in R)$ 恒有 3 个不同的实数解，即 $m=3$，即 m 的所有可能的值构成的集合为 $\{3\}$，故选 A．

16.【解析】①当 $a=0$ 时，显然不符合题意，舍去；②当 $a<0$ 时，$f(x)=x-a\ln x$ 为 $(1,+\infty)$ 上的增函数，在区间 $(1,+\infty)$ 上至多有一个零点，与条件矛盾，不合题意，舍去；③当 $a>0$ 时，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上有两个零点，在 $(1,+\infty)$ 上有两个零点．当 $x\le1$ 时，$f(x)=ax^2-ax+1=a(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{4-a}{4}$，由于对称轴是 $x=\dfrac{1}{2}$，$f(0)=f(1)=1>0$，故只要 $f(\dfrac{1}{2})<0$，即 $a>4$；当 $x>1$ 时，$f(x)=x-a\ln x$，$f'(x)=1-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x-a}{x}$，令 $f'(x)=0$，则 $x=a$，当 $0<a\le1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，与条件矛盾，不符合题意，舍去；当 $a>1$ 时，$x\in(1,a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；且根据不同函数的增长率的知识知，必然存在 $x_0\in(a,+\infty)$，使得 $f(x_0)=x_0-a\ln x_0>0$；故 $x=a$ 时

$f(x)$有极小值，要满足条件，只要$f(a)=a-a\ln a<0$，即$a>e$；综上所述，$a>4$且$a>e$，故$a>4$；故选C.

17.【解析】对于$y=x^3-3x$，$x\le 0$，$y'=3x^2-3$，令$y'=0$，可得$x=\pm 1$，故$y=x^3-3x$，在$x=-1$处取最大值2．①当$a>0$时：要取得最少的零点个数，则$a>1$，此时$x+\frac{a}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{a}{x}}=2\sqrt{a}>2$．$(x>0)$此时函数图象如图．故$y=f(f(x))-2=0$有$f(f(x))=2$，故$f(x)=-1$，由图得$y=f(f(x))-2$零点个数为1．故$A$错误．

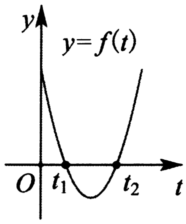


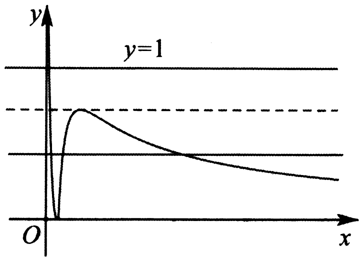
要取得最多的零点个数，则此时$0<a<1$，此时$x+\frac{a}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{a}{x}}=2\sqrt{a}<2$，（$x>0$）．如图，故$y=f(f(x))-2=0$有$f(f(x))=2$，所以$f_1(x)=-1$，$f_2(x)=t_1$，$f_3(x)=t_2$．当$2\sqrt{a}<t_1$，$t_2<2$时，$f_1(x)=-1$有一根，$f_2(x)=t_1$，$f_3(x)=t_2$．均有4根，一共有9个零点．此时$t+\frac{a}{t}=2$即$t^2-2t+a=0$在区间$(2\sqrt{a},2)$上有两根$t_1$，$t_2$，故$\begin{cases}(2\sqrt{a})^2-2\times 2\sqrt{a}+a>0\\2^2-2\times 2+a>0\\(-2)^2-4a>0\end{cases}$．解得$\frac{16}{25}<a<1$．故$B$正确．

②当$a<0$时，函数$y=x+\frac{a}{x}$为增函数，画出图象有，令$y=f(f(x))-2=0$有$f_1(x)=-1$，$f_2(x)=t$，其中$t+\frac{a}{t}=2$即$t^2-2t+a=0$，由图知$t>0$，故$t=1+\sqrt{1-a}>2$．故$f_1(x)=-1$有2个零点，$f_2(x)=t$有一个零点．故一共有3个零点．所以C，D错误．故选B.

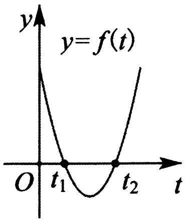
18.【解析】因为$f(x)=\frac{x}{e^x}+\frac{\ln x+1}{x}$，所以$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}-\frac{\ln x}{x^2}$，当$0<x<1$时，$f'(x)>0$，当$x>1$时，$f'(x)<0$，即函数$f(x)$在$(0,1)$为增函数，在$(1,+\infty)$为减函数，设$t=f(x)$，则关于$x$的方程$f^2(x)-mf(x)+m^2-1=0$可化为$t^2-mt+m^2-1=0$，设关于$t$的方程$t^2-mt+m^2-1=0$有两根$t=t_1$，$t=t_2$，则关于$x$的方程$f^2(x)-mf(x)+m^2-1=0$恰好有4个不相等的实根，等价于函数$t=f(x)$的图象与直线$t=t_1$，$t=t_2$的交点个数为4个，函数$t=f(x)$的图象与直线$t=t_1$，$t=t_2$位置关系如图，得：关于$t$的方程$t^2-mt+m^2-1=0$有两不等实根，且$t_1$，$t_2\in(0,\frac{e+1}{e})$，设$g(t)=t^2-mt+m^2-1$，则有：$\begin{cases}m^2-4(m^2-1)>0\\0<\frac{m}{2}<\frac{e+1}{e}\\g(0)>0\\g(\frac{e+1}{e})>0\end{cases}$，解得：$1<m<\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

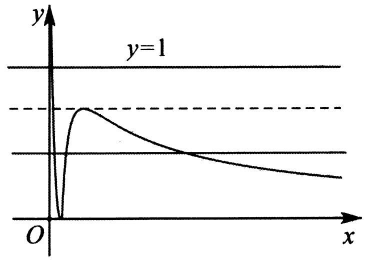
故选C.





20.【解析】由$[f(x)]^2+mf(x)-1-m=0$得$[f(x)-1][f(x)+1+m]=0$，得$f(x)=1$或$f(x)=-1-m$，当$x\geq 1$时，$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，由$f'(x)>0$得$1-\ln x>0$得$\ln x<1$，得$1\leq x<e$，此时$f(x)$为增函数，由$f'(x)<0$得$1-\ln x<0$得$\ln x>1$，得$x>e$，此时$f(x)$为减函数，故当$x=e$时，函数取得极大值极大值为$f(e)=\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e}$，当$x<1$时，$f(x)$为减函数，且$f(x)<0$，作出$f(x)$的图象如图：当$x\to+\infty$时，$f(x)\to 0$，当$f(x)=1$时，方程只有一个解，要使方程$[f(x)]^2+mf(x)-1-m=0$恰好有4个不相等的实数解，则$f(x)=-1-m$恰好有3个不相等的实数解，则$0<-1-m<\dfrac{1}{e}$，得$-1-\dfrac{1}{e}<m<-1$，即实数$m$的取值范围是$(-1-\dfrac{1}{e},-1)$，故选B.





21.【解析】当$x\geq 1$时，$f(x)=\ln x\geq 0$，所以$f(x)+1\geq 1$，所以 $f[f(x)+1]=\ln(f(x)+1)$，

当$x<1$时，$f(x)=1-\dfrac{x}{2}>\dfrac{1}{2}$，所以$f(x)+1>\dfrac{3}{2}$，所以$f[f(x)+1]=\ln(f(x)+1)$，

综上所述：$f[f(x)+1]+m=\ln(f(x)+1)+m=0$，

则$f(x)=e^{-m}-3$有两个根x_1，x_2（不妨设$x_1<x_2$），当$x\geq 1$时，$\ln x_2=e^{-m}-1$，当$x<1$时，$1-\dfrac{x_1}{2}=e^{-m}-1$

令$t=e^{-m}-1>\dfrac{1}{2}$，则$\ln x_2=t$，$x_2=e^t$，$1-\dfrac{x_1}{2}=t$，$x_1=2-2t$，所以$x_1x_2=e^t(2-2t)$，$t>\dfrac{1}{2}$

令$g(t)=e^t(2-2t)$，$t>\dfrac{1}{2}$所以$g'(t)=-2te^t$，$t\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$，$g'(t)<0$，函数$g(t)$单调减，所以当$t=\dfrac{1}{2}$时，$g(t)$有最小值为$\sqrt{e}$，所以$x_1x_2$的取值范围为$[-\infty,\sqrt{e})$.

另【解析】同构，$e^t(2-2t)=-2e\cdot e^{t-1}(t-1)\leq -2e\cdot(-\dfrac{1}{e})=2$，当仅当$x=0$等号成立，由于$t>\dfrac{1}{2}$，所以当$t=\dfrac{1}{2}$时，$g(t)$有最小值为$\sqrt{e}$，所以$x_1x_2$的取值范围为$[-\infty,\sqrt{e})$.

22.【解析】设$i,j\in\{1,2,3\}$，若$f(i)=i$时，显然满足$f(f(x))=f(x)$；若$f(i)=j\neq i$时，由$f(f(i))=f(i)$可得：$f(i)=f(j)=j$. 所以按函数的值域中的元素个数分类:

(1)值域为$\{1,2,3\}$时,应满足$f(i)=i,i\in\{1,2,3\}$,则只有1个函数关系满足;

(2)值域含两个元素时,不妨设为$\{1,2\}$,则$f(i)=i,i\in\{1,2\}$,而$f(3)=1$或2,则满足条件的函数有6个;

(3)值域含单元素集时,不妨设为$\{1\}$,则$f(i)=1,i\in\{1,2,3\}$,则满足条件的函数有3个;

综上所述:满足条件的函数有10个.

23.【解析】因$t\in[0,1]$,则$u=f(t)=3^t\in[1,3]$又因为函数$f(x)=\begin{cases}3^x & x\in[0,1]\\ \frac{9}{2}-\frac{3}{2}x & x\in(1,3]\end{cases}$,

所以$f(f(t))=f(3^t)=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\times 3^t$,或$f(f(t))=f(3^t)=3^{3^t}$,又因为$f(f(t))\in[0,1]$,

所以$0\le\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\times 3^t\le 1$,且$t\in[0,1]$　解得:$\log_3\frac{7}{3}\le t\le 1$,故实数$t$的范围$[\log_3\frac{7}{3},1]$.

24.【解析】$f(x)=e^{x-1}+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\ln x-a\xrightarrow{求导}f'(x)=e^{x-1}+x^2-x-\frac{1}{x}$

令$f'(x)=0\Rightarrow x=1$　所以,$f(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减.

又$f(1)=\frac{5}{6}-a$,所以,$f(x)$的值域为$[\frac{5}{6}-a,+\infty)$.对于函数$f(f(x))$,设$t=f(x)$,则$t\in[\frac{5}{6}-a,+\infty)$

又$f(x)$与函数$f(f(x))$有相同的值域,则$f(x)$的极小值点$1\in 1\in[\frac{5}{6}-a,+\infty)\Rightarrow a\ge-\frac{1}{6}$

25.解析:由题意知,$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\ln x$,由$f'(x)>0$,得$x>1$,由$f'(x)<0$,得$0<x<1$,所以,$f(x)$在$(0,1]$单调递减,在$(1,+\infty)$单调递增,所以,函数$y=f(x)$的值域为$[2a-1,+\infty)$.

对于函数$y=f(f(x))$,令$t=f(x)$,则$t\in[2a-1,+\infty)$,问题等价于:研究函数$y=f(t)$的值域.

为使符合题意,则$2a-1\le 1$,解得$a\le 1$.

26.【解析】法1:由题意,不妨设x_0是函数$y=f(x)$与函数$y=f(f(x))$的一个相同零点,则$\begin{cases}f(x_0)=0\\ f(f(x_0))=0\end{cases}$

那么,$f(0)=0$,所以$c=0$,进而$f(x)=ax^2+bx$($a\ne 0$).

当$b=0$时,$f(x)=ax^2$($a\ne 0$),此时符合函数$y=f(x)$与函数$y=f(f(x))$有相同零点;

当$b\ne 0$时,$f(x)=ax^2+bx$($a\ne 0$)有两个不同零点,分别为0和$-\frac{b}{a}$,

则$y=f(f(x))$有且仅有两个零点0和$-\frac{b}{a}$,因为$f(f(x))=(ax^2+bx)(a^2x^2+abx+b)$

下面考虑方程$g(x)=a^2x^2+abx+b=0$的实根情形.　　若$\Delta=a^2b^2-4a^2b<0$,即$0<b<4$时,该方程无实根,符合题意;　若$\Delta=a^2b^2-4a^2b\ge 0$,即$b<0$或$b\ge 4$时,该方程有实根,为满足题意,有$\begin{cases}\Delta=0\\ g(0)=0\end{cases}$或$\begin{cases}\Delta=0\\ g(-\frac{b}{a})=0\end{cases}$

或$\begin{cases}\Delta>0\\ g(-\frac{b}{a})=0\\ g(0)=0\end{cases}$解之均无解,综上　$b\in[0,4)$.

法2:由题意,不妨设x_0是函数$y=f(x)$与函数$y=f(f(x))$的一个相同零点,则$\begin{cases}f(x_0)=0\\ f(f(x_0))=0\end{cases}$

那么,$f(0)=0$,所以$c=0$,进而$f(x)=ax^2+bx(a\ne 0)$.此时$y=f(x)$的零点为0或$-\frac{b}{a}$.为使函数$y=f(f(x))$

的零点也为0或$-\frac{b}{a}$,则$f(x)=0$或$f(x)=-\frac{b}{a}$的实根仅有0或$-\frac{b}{a}$．方程$f(x)=-\frac{b}{a}$的实根情形应满足:①方程无实根,则$\Delta=a^2b^2-4a^2b<0$,即$0<b<4$;②方程有两相等实根,则$\begin{cases}\Delta=0\\g(0)=0\end{cases}$或$\begin{cases}\Delta=0\\g(-\frac{b}{a})=0\end{cases}$此时$b=0$;③方程有两不等实根,则$\begin{cases}\Delta>0\\g(-\frac{b}{a})=0\\g(0)=0\end{cases}$解得$b\in\varnothing$．综上:$b\in[0,4)$．

27.【解析】令$t=g(x)$，则由$y=f(g(x))$的零点，即$y=f(t)$的根，当$-a+1<0$时，即$a>1$时，$f(t)$有两个零点$t_1=-1,t_2>0$，所以要想$y=g(x)$有4个零点，则必须$y=t_i(i=1,2)$与$y=g(x)$有4个交点，所以$1-2a<-1$，得$a>1$；当$a=1$时，$f(t)$有3个零点$t_1=-1,t_2=0,t_3=2$，则$y=t_i(i=1,2,3)$与$y=g(x)$有5个交点，不符合题意；当$0<a<1$时，则当$\Delta=4a^2+4a-4>0$时，即$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<a<1$时，$f(t)$有两个零点$t_1=-1,t_2>0$,此时$y=t_i(i=1,2)$与$y=g(x)$有4个交点.当$\Delta<0$时,$f(t)$有一个零点,此时$y=t$与$y=g(x)$只有两个交点，不符合题意；当$a\le 0$时，$f(t)$有一个零点$t=-1$，此时$y=t$与$y=g(x)$只有两个交点，不符合题意；综上所述：$a\in(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1)\cup(1,+\infty)$．

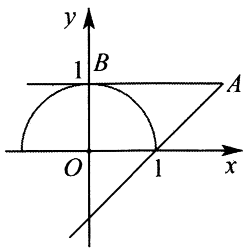
专题8　函数中的隐圆与隐距离

达标训练

1.【解析】令$x=\sin\theta$，$\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，则$y=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$，因为$\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，所以$-\frac{\pi}{4}\le\theta+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$，所以$-1\le\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\le\sqrt{2}$，故选B.

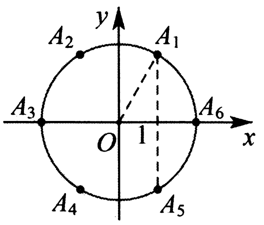
2.【解析】函数$f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$的定义域为$\{x|-1\le x\le 1\}$．当$x=h(t)$时，其：$-1\le h(t)\le 1$，则有：$h(t)=\sin t$:可得：$-1\le\sin t\le 1$，所以$t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$故选C.

3.【解析】由题意可得，$-1\le x\le 1$，令$x=\sin\alpha$，则$f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x-2}$等价于$y=\frac{\sqrt{1-sin^2\alpha}-1}{\sin\alpha-2}=\frac{|\cos\alpha|-1}{\sin\alpha-2}$，设$P(\sin\alpha,|\cos\alpha|)$；则点$P$在圆$x^2+y^2=1$的上半部分，则$\frac{|\cos\alpha|-1}{\sin\alpha-2}$的几何意义是半圆弧上的点与点A$(2,1)$连线的斜率，由图象知，直线AB的斜率最小，此时$k=0$，直线AC的斜率最大，此时$k=\frac{0-1}{1-2}=1$．故$0\le k\le 1$．故函数的值域为$[0,1]$．故选C.

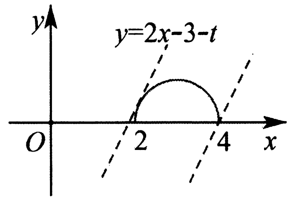


4.【解析】若函数 $f(x)$ 逆时针旋转角 $\frac{\pi}{4}$ 后所得曲线仍是一函数，则函数 $f(x)$ 的图象与任一斜率为1的直线 $y=x+b$ 均不能有两个以上的交点，A 中函数 $y=\sqrt{x^2-1}$ 与直线 $y=x$ 有两个交点，不满足要求；B 中函数 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 有两个交点，不满足要求；C 中函数 $y=(\frac{1}{2})^x$ 与直线 $y=x+b$ 均有且只有一个交点，满足要求；D 中函数 $y=\ln x$ 与直线 $y=x-1$ 有两个交点，不满足要求；故选 A.

5.【解析】由题意可得：问题相当于圆上由6个点为一组，每次绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后与下一个点会重合．设 $f(\pi)$ 处的点为 A_1，因为 $f(x)$ 的图象绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后与原图象重合，所以旋转后 A_1 的对应点 A_2 也在 $f(x)$ 的图象上，同理 A_2 的对应点 A_3 也在图象上，以此类推，$f(x)$ 对应的图象可以为一个圆周上6等分的6个点，当 $f(\pi)=\sqrt{3}\pi$ 时，即 $A_1(\pi,\sqrt{3}\pi)$，当 $f(\pi)=\pi$ 时，即 $A_5(\pi,\sqrt{3}\pi)$，则 $(\pi,\sqrt{3}\pi)$，不符合函数的定义，故 B 错误；故选 B.



5 题图

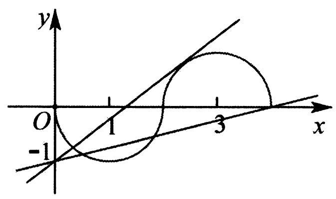


6 题图

6.【解析】$f(x)=2x-3-\sqrt{-x^2+6x-8}=2x-3-\sqrt{1-(x-3)^2}$．由 $-x^2+6x-8\ge 0$，解得 $2\le x\le 4$．

令 $t=2x-3-\sqrt{1-(x-3)^2}$，则 $\sqrt{1-(x-3)^2}=2x-3-t$，即两函数 $y=\sqrt{1-(x-3)^2}$ 与 $y=2x-3-t$ 的图象有交点，如图：由图可知，当直线和半圆相切时，t 最小，当直线过点 $(4,0)$ 时，t 最大．当直线与半圆相切时，由 $\frac{|3-t|}{\sqrt{5}}=1$，得 $t=3+\sqrt{5}$（舍）或 $t=3-\sqrt{5}$；当直线过点 $(4,0)$ 时，$2\times 4-3-t=0$，得 $t=5$．所以函数 $f(x)=2x-3-\sqrt{-x^2+6x-8}$ 的值域是 $[3-\sqrt{5},5]$．故选 A.

7.【解析】由题意，$f(x)$ 的图象由圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的下半部分与圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 的上半部分组成，大致图象如下：



直线 $y=kx-1$ 恒过定点 $(0,-1)$．当直线 $y=kx-1$ 与圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 的上半部分相切时，$k=\frac{3}{4}$；当直线 $y=kx-1$ 经过点 $(4,0)$ 时，$k=\frac{1}{4}$．数形结合可得，$k\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4})$．故选 C.

8.【解析】法一：令 $f(x)=\frac{(1+x)^3}{\sqrt{4-x^2}}+x^2-4$，定义域为 $(-2,2)$，$f'(x)=\frac{3(1+x)^2\sqrt{4-x^2}-(1+x)^3\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}+2x$

$=\dfrac{(1+x)^2[3\sqrt{4-x^2}+\dfrac{x(1+x)}{\sqrt{4-x^2}}]}{4-x^2}+2x$，$x\to-2$ 时，$f'(x)\to+\infty$，$f'(-1)=-2<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上存在极大值，而当 $x\in(-2,-1)$ 时，$\dfrac{(1+x)^3}{\sqrt{4-x^2}}<0$，$x^2-4<0$，所以 $f(x)<0$，所以 $f(x)$ 的极大值小于0，从而在 $(-2,0)$ 上恒小于0，当 $x\geq0$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，而 $f(0)=-\dfrac{15}{4}<0$，$f(1)=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}-3>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有一个零点即方程 $\dfrac{(1+x)^3}{\sqrt{4-x^2}}+x^2-4=0$ 的实根个数为1，故选D.

法二　令 $x=2\cos\alpha(0\leq\alpha\leq\pi)$，则 $\sqrt{4-x^2}=2\sin\alpha$，方程可以转化为 $\dfrac{(1+2\cos\alpha)^3}{2\sin\alpha}=4\sin^2\alpha$，即 $1+2\cos\alpha=2\sin\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，平方可得 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{3}{8}$，故此方程有仅有一解，且 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{7}-1}{4}$ 故选D.

9.【解析】法一：$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4-3x^2+9}-\sqrt{x^4-4x^2+9}}{x}=\dfrac{x^4-3x^2+9-(x^4-4x^2+9)}{x(\sqrt{x^4-3x^2+9}+\sqrt{x^4-4x^2+9})}$

$=\dfrac{x}{\sqrt{x^4-3x^2+9}+\sqrt{x^4-4x^2+9}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+\dfrac{9}{x^2}-3}+\sqrt{x^2+\dfrac{9}{x^2}-4}}$，因为 $x^2+\dfrac{9}{x^2}\geq2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{9}{x^2}}=6$，当且仅当 $x=\sqrt{3}$ 时等号成立，所以 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+\dfrac{9}{x^2}-3}+\sqrt{x^2+\dfrac{9}{x^2}-4}}$，$\leq\dfrac{1}{\sqrt{6-3}+\sqrt{6-4}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，又 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+\dfrac{9}{x^2}-3}+\sqrt{x^2+\dfrac{9}{x^2}-4}}>0$，所以 $f(x)\in(0,\sqrt{3}-\sqrt{2}]$，故选A.

法二 令 $x-\dfrac{3}{x}=t$，即可转化为 $f(t)=\sqrt{t^2+3}-\sqrt{t^2+2}=\sqrt{(t-0)^2+(0-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(t-0)^2+(0-\sqrt{2})^2}$，点 $(t,0)$ 到 $(0,\sqrt{3})$ 和点 $(0,\sqrt{2})$ 距离之差的取值范围，根据距离之差定理，当三点共线时，距离之差取得最大值 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$，最小值时取不到的，在无穷远处，此时转化为两个点到 t 轴的射影之差，而这两点的射影重合，故 $f(t)>0$，所 $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-2x+4}$ 以 $f(x)\in(0,\sqrt{3}-\sqrt{2}]$，故选A.

10.【解析】$f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-2x+4}=\sqrt{x-2}+\sqrt{(x-1)^2+3}$，可得 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 递增，即有：$x=2$ 时，$f(x)$ 取得最小值2，由 $g(x)=\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}(a>0)=\dfrac{2a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}$ 在 $[a,+\infty)$ 递减，可得 $x=a$ 时，$g(x)$ 取得最大值 $\sqrt{2a}$，由题意可得 $2=\sqrt{2a}$，解得 $a=2$，故选C.

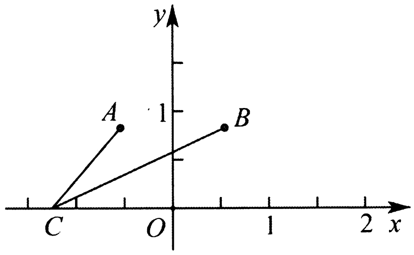
11.【解析】因为 $(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})(y-1+\sqrt{y^2-2y+2})=1$，所以 $(x-1+\sqrt{(x-1)^2+1})(y-1+\sqrt{(y-1)^2+1})=1$，因为 $x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}>0$ 且 $y-1+\sqrt{(y-1)^2+1}>0$，且 $x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}$ 与 $y-1+\sqrt{(y-1)^2+1}$ 范围相同，所以 $x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}=1$ 且 $y-1+\sqrt{(y-1)^2+1}=1$，所以 $\begin{cases}x-1=0\\y-1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，所以 $x+y=2$，故选D.

12.【解析】抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标 $(1,0)$，则 $\sqrt{x^2-6x+y^2-2y+10}+\sqrt{x^2-2x+y^2+1}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，

可知它的几何意义可得：抛物线上的点到 $(1,0)$ 与 $(3,1)$ 的距离的和，由抛物线的定义可知，$M(x,y)$ 到 $F(1,0)$ 转化为 M 到准线的距离，所以 $\sqrt{x^2-6x+y^2-2y+10}+\sqrt{x^2-2x+y^2+1}$ 的最小值为：$1+3=4$ 故选 B．

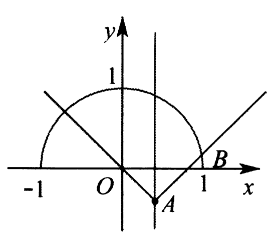
13.【解析】由题意得，$a=\sqrt{9x^2+3x+1}-\sqrt{9x^2-3x+1}=\sqrt{(3x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}-\sqrt{(3x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$；

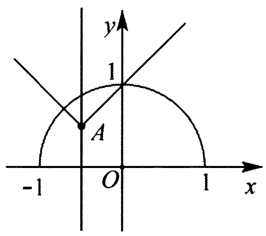
$\sqrt{(3x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$ 表示了点 $A(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 与点 $C(3x,0)$ 的距离，$\sqrt{(3x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$ 表示了点 $B(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 与点 $C(3x,0)$ 的距离，如下图，结合图象可得，



$-|AB|<\sqrt{(3x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}-\sqrt{(3x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}<|AB|$，即 $-1<\sqrt{(3x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}-\sqrt{(3x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}<1$，故实数 a 的取值范围是 $(-1,1)$．故答案为 $(-1,1)$．

14.【解析】$y=\sqrt{1-x^2}$，表示以 O 为圆心，半径为 1 的圆的上半圆，$y=g(x)=|x-a|-a=\begin{cases}x-2a, x\ge a\\ -x, x<a\end{cases}$，图象关于 $x=a$ 对称，顶点为 $A(a,-a)$，若 $a<0$，顶点 A 位于第二象限．要使两个图象有两个交点，则 A 只要在半圆内即可，即 $|OA|<1$，即 $\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}<1$，得 $2a^2<1$ 得 $a^2<\frac{1}{2}$，得 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $a<0$，所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<0$，当 $a=0$ 时，半圆和 $y=|x|$，一定有两个交点，满足条件．当 $a>0$ 时，在 $x\le a$ 时，$y=g(x)=-x$，一定与半圆有一个交点，要使 $g(x)$ 与半圆有两个交点，则只需要当 $x>a$ 时，$g(x)=x-2a$ 与圆的右半圆有一个交点即可，此时顶点 $A(a,-a)$ 一定在第四象限，当 $x\ge a$ 时的直线 $g(x)=x-2a$ 经过 $B(1,0)$ 时，$1-2a=0$，得 $a=\frac{1}{2}$，此时对应的直线 $y=x-1$，要使 $g(x)=x-2a$ 与圆的右半圆有一个交点即可，则满足 $-2a\ge -1$，即 $a\le\frac{1}{2}$，因为 $a>0$，所以 $0<a\le\frac{1}{2}$，综上 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\le\frac{1}{2}$，即实数 a 的取值范围是 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}]$，故答案为 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}]$．

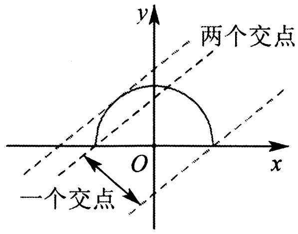




15.【解析】函数 $y=\sqrt{-x^2+2x+3}-\sqrt{3}$（$x\in[0,2]$）的图象是圆 $(x-1)^2+(y+\sqrt{3})^2=4$ 在 x 轴及其上方的部分，考虑圆 $(x-1)^2+(y+\sqrt{3})^2=4$ 在点 $(0,0)$ 处的切线 $y=kx$，由 $\frac{|k+\sqrt{3}|}{\sqrt{k^2+1}}=2\Rightarrow k=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\theta$ 的最大值为

切线 $y=kx$ 逆时针旋转到与 y 轴重合时所转过的角，所以 θ 的范围是 $(0,\dfrac{\pi}{3}]$．故答案为 $(0,\dfrac{\pi}{3}]$．

16.【解析】曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 代表半圆，图象如图所示．当直线与半圆相切时，圆心 $(0,0)$ 到直线 $y=x+b$ 的距离 $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{1+1}}=r=1$，解得 $b=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$（舍去），当直线过 $(-1,0)$ 时，把 $(-1,0)$ 代入直线方程 $y=x+b$ 中解得 $b=1$；当直线过 $(1,0)$ 时，把 $(1,0)$ 代入直线方程 $y=x+b$ 中解得 $b=-1$．根据图象可知直线与圆有交点时，b 的取值范围是：$[-1,\sqrt{2}]$；当有一个交点时，b 的取值范围为：$[-1,1)\cup\{\sqrt{2}\}$；当有两个交点时，b 的取值范围是：$[1,\sqrt{2})$．故答案为 $[-1,\sqrt{2}]$；$[-1,1)\cup\{\sqrt{2}\}$；$[1,\sqrt{2})$



17.【解析】令 $x+1=t$，函数 $y=x-1+\sqrt{x^2+2x+3}=t+\sqrt{t^2+2}-2$，根据距离之差定理，当 t 趋于正无穷大时，y 的值趋于正无穷大，当 t 趋于负无穷大时，y 的值趋于射影之差，即 -2，故函数的值域为 $(-2,+\infty)$．

18.【解析】由题意，$\sqrt{x^2+y^2}$ 的最小值为 $\sqrt{\dfrac{1}{4}+y^2}$，$\sqrt{x^2-2x+2}$ 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，

所以 $f(x,y)_{\min}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+y^2}+\sqrt{y^2-2y+5}+\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ 的最小值，

设 $f(y)=\sqrt{\dfrac{1}{4}+y^2}+\sqrt{y^2-2y+5}=\sqrt{(y-0)^2+(0-\dfrac{1}{2})^2}+\sqrt{(y-1)^2+(0-2)^2}$，表示 $(0,y)$ 与 $(\dfrac{1}{2},0)$，$(2,1)$ 的距离的和，取 $(2,1)$ 关于 y 轴的对称点 $(-2,1)$ 与 $(\dfrac{1}{2},0)$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$，此时 $y=\dfrac{1}{5}$，所以

$f(x,y)_{\min}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}+\dfrac{\sqrt{13}}{2}$．故答案为 $\dfrac{\sqrt{26}}{2}+\dfrac{\sqrt{13}}{2}$．

19.【解析】$y=\sqrt{x^4+3x^2-6x+10}-\sqrt{x^4-3x^2+2x+5}=\sqrt{(x^2+1)^2+(x-3)^2}-\sqrt{(x^2-2)^2+(x+1)^2}$

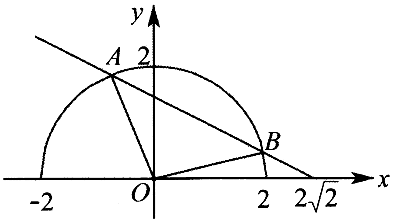
其几何意义是函数 $y=x^2$ 上一点 (x,y) 分别到 $(3,-1)$，$(-1,2)$ 两点的距离之差，求其最大值

函数 $y=x^2$ 和 $(3,-1)$，$(-1,2)$ 两点连线的延长线有交点，在 y 轴左侧，它到两点距离之差必然最大，

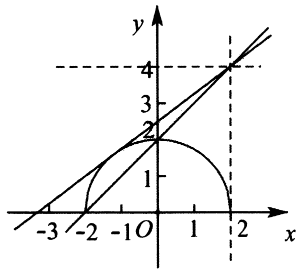
因为两点之间直线最短，故最大值为 $(3,-1)$，$(-1,2)$ 两点距离，即 $\sqrt{(3+1)^2+(-1-2)^2}=5$．故答案为 5

20.【解析】如图：因为 $S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}|OA||OB|\sin\angle AOB=\dfrac{1}{2}\sin\angle AOB\le\dfrac{1}{2}$，当 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$S_{\Delta AOB}$ 面积最大．此时 O 到 AB 的距离 $d=\sqrt{2}$．设 AB 方程为 $y=k(x-2\sqrt{2})$（$k<0$），即 $kx-y-2\sqrt{2}k=0$．由 $d=\dfrac{|2\sqrt{2}k|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$

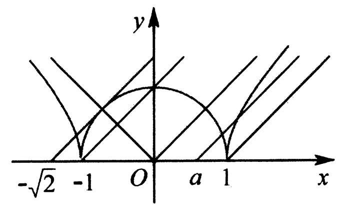
得 $k=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．故答案为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．



21.【解析】将方程$\sqrt{4-x^2}-kx-4+2k=0$转化为：半圆$y=\sqrt{4-x^2}$，与直线$y=kx+4-2k$有两个不同交点，如图所示：



21 题图



22 题图

当直线与半圆相切时，有$\dfrac{|4-2k|}{\sqrt{1+k^2}}=2$，$k=\dfrac{3}{4}$，所以半圆$y=\sqrt{4-x^2}$与直线$y=kx+4-2k$有两个不同交点时．直线$y=kx+4-2k=k(x-2)+4$，一定过$(2,4)$，由图象知直线过$(-2,0)$时直线的斜率$k$取最大值为1，故$k\in(\dfrac{3}{4},1]$，故答案为$(\dfrac{3}{4},1]$．

22.【解析】原方程的解可以视为函数$y=x-a$（$y\geq0$）与函数$y=\sqrt{|1-x^2|}$的图象的交点的横坐标．而函数$y=\sqrt{|1-x^2|}$的图象是由半圆$y^2=1-x^2$（$y\geq0$）和等轴双曲线$x^2-y^2=1$（$y\geq0$）在x轴的上半部分的图象构成．如图所示，当$0<a<1$或$a=-\sqrt{2}$，$a=-1$时，平行直线系$y=x-a$（$y\geq0$）与$y=\sqrt{|1-x^2|}$的图象有两个不同的交点．所以，当$0<a<1$或$a=-\sqrt{2}$，$a=-1$时，原方程有两个不相等的实数根．

23.【解析】(1) 假设存在实数a，$b(a<b)$，使得函数$y=f(x)$的定义域和值域都是$[a,b]$，①当$0<a<b\leqslant1$时，函数$f(x)$单调递减，由$\begin{cases}f(a)=|1-\dfrac{1}{a}|=\dfrac{1}{a}-1=b\\f(b)=|1-\dfrac{1}{b}|=\dfrac{1}{b}-1=a\end{cases}$，可得$a=b$，不合题意；②当$0<a<1<b$时，函数$f(x)$在$(a,1)$单调递减，在$(1,b)$上单调递增，故$f(x)_{\min}=f(1)=0$，$f(x)_{\min}=a>0$，不合题意；③当$1\leq a<b$时，函数$f(x)$在$[a,b]$上单调递增，且$0<f(x)<1$，与$f(x)_{\min}=a\geq1$矛盾．综上，不存在实数$a$，$b(a<b)$，使得函数$y=f(x)$的定义域和值域都是$[a,b]$；

(2) 依题意，$m>0$，

①当$0<a<b\leq1$时，$f(x)$在$[a,b]$上单调递减，则$\begin{cases}f(a)=mb\\f(b)=ma\end{cases}$，即$\begin{cases}\dfrac{1}{a}-1=mb\\\dfrac{1}{b}-1=ma\end{cases}$，得$a=b$，与$a<b$矛盾；

②当$0<a<1<b$时，$f(x)_{\min}=0$，$f(x)_{\min}=ma>0$，不合题意；

③当$1\leq a<b$时，$f(x)$在$[a,b]$上单调递增，则$\begin{cases}f(a)=ma\\f(b)=mb\end{cases}$，即$\begin{cases}1-\dfrac{1}{a}=ma\\1-\dfrac{1}{b}=mb\end{cases}$，故方程$1-\dfrac{1}{x}=mx$，即

$mx^2-x+1=0$存在两个大于1的实数根，满足$\begin{cases}m>0\\ \Delta=1-4m>0\\ \dfrac{1}{2m}>1\end{cases}$，得$0<m<\dfrac{1}{4}$．综上，$m$的取值范围是$(0,\dfrac{1}{4})$．

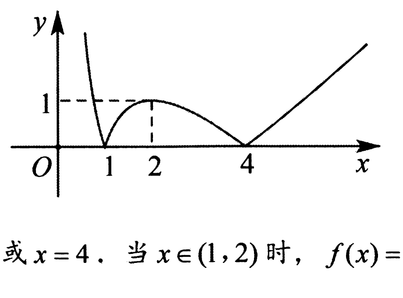
24.【解析】(1) $f(x+1)\cdot f(x)=k(x+1)\cdot kx=k^2(x^2+x)$，所以$(k^2-1)(x^2+x)=0$对一切$x$恒成立，$k^2-1=0$，得$k=\pm1$；故$f(x)=\pm x$； 因$f(x)$为$R$上的增函数，所以$f(x)=x$，则$h(x)=\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1},x\neq1$，而$h(x)$在$(-\infty,1)$和$(1,-\infty)$上是减函数，于是$h(x)$在$[m,m+1]$上单调递减，则$\begin{cases}h(m)=m+1\\h(m+1)=m\end{cases}$解得$m=-1$或$m=2$．

25.【解析】(1)不妨设$m\le x_1<x_2\le n<0$，则$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{a^2}(\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1})=\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}$，因为$m\le x_1<x_2\le n<0$，所以$x_1-x_2<0$， $x_1x_2>0$，则$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，因此，$f(x)$在$[m,n]$上单调递增；

(2) $f(x)$的定义域和值域都是$[m,n]$，且函数$f(x)$递增，所以，$\begin{cases}f(m)=m\\f(n)=n\end{cases}$，即方程$f(x)=x$有两个相异的正实数根$m$，$n$，因此，$2+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2x}=x$，整理得，$a^2x^2-(2a+1)ax+1=0$，$---$①，根据一元二次方程根与系数的关系得，$|m-n|=\dfrac{\sqrt{(2a+1)^2a^2-4a^2}}{a^2}=\sqrt{-3(\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{3})^2+\dfrac{16}{3}}$，当$a=\dfrac{3}{2}$时，$|m-n|_{\max}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，经检验，当$a=\dfrac{3}{2}$时，方程①有两相异正实根，符合题意，因此，$n-m$的最大值为$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$．

26．(1)【解析】因为$x\in(0,+\infty)$，所以$x+\dfrac{4}{x}\ge2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}=4$，当$x=2$时取最小值，且在$(0,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增，要使函数$f(x)=|t(x+\dfrac{4}{x})-5|$分别在区间$(0,2)$，$(2,+\infty)$上单调，则$g(x)=t(x+\dfrac{4}{x})-5\ge0$，即$g(x)_{\min}=4t-5\ge0$，所以$t\ge\dfrac{5}{4}$；

(2) ①证明：当$t=1$时，$f(x)=|(x+\dfrac{4}{x})-5|$，其图象如图，要使$f(x)=m$有4个根，则$0<m<1$，令$g(x)=m$，则$x^2-(5+m)x+4=0$，所以$x_1x_4=4$，令$g(x)=-m$，则$x^2-(5-m)x+4=0$，所以$x_2x_3=4$．所以$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=16$；



②【解析】令$f(x)=0$，解得：$x=1$或$x=4$．当$x\in(1,2)$时，$f(x)=5-(x+\dfrac{4}{x})$，所以

$f(a)=5-(a+\dfrac{4}{a}),f(b)=5-(b+\dfrac{4}{b})$，由$\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{f(b)}{b}=m$，得$5b-ab-\dfrac{4b}{a}=5a-ab-\dfrac{4a}{b}$，即$5ab-4(a+b)=0$，所以$b=\dfrac{4a}{5a-4}$，由$b\in(1,2)$，解得$\dfrac{4}{3}<a<4$．

因为 $a\in(1,2)$，所以 $\frac{4}{3}<a<2$ 由 $m=\frac{f(a)}{a}=\frac{5-a-\frac{4}{a}}{a}=-\frac{4}{a^2}+\frac{5}{a}-1(\frac{4}{3}<a<2)$，可得 $\frac{1}{2}<m\le\frac{9}{16}$；当 $x\in(4,+\infty)$ 时，$f(x)=x+\frac{4}{x}-5$，由 $\frac{f(a)}{a}=\frac{f(b)}{b}=m$，得 $ab+\frac{4b}{a}-5b=ab+\frac{4a}{b}-5a$，整理得：$\frac{5}{4}=\frac{a+b}{ab}$，即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{5}{4}$．因为 $a\ge4$，$b\ge4$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，与 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{5}{4}$ 矛盾，即实数 a，b 不存在；当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=x+\frac{4}{x}-5$，由 $f(a)=mb$，$f(b)=ma$ 可得 $a+b=5$，因为 a，$b\in(0,1)$，矛盾，即实数 a，b 不存在；当 $x\in(2,4)$ 时，$f(x)=5-(x+\frac{4}{x})$，由 $f(a)=mb$，$f(b)=ma$ 可得 $a+b=5$，再由 $f(a)=mb$，得 $m=\frac{5a-a^2-4}{ab}$，把 $b=5-a$ 代入得，$m=1-\frac{4}{5a-a^2}$，因为 $2<a<4$，且 $b>a$，可得 $2<a<\frac{5}{2}$，所以 $m\in(\frac{1}{3},\frac{9}{25})$．综上，存在实数 a，$b\in(1,2)$，使得函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调，且 $f(x)$ 的取值范围为 $[ma,mb]$，此时 m 的范围为 $(\frac{1}{2},\frac{9}{16}]$；或 a，$b\in(2,4)$，使得函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调，且 $f(x)$ 的取值范围为 $[ma,mb]$，此时 m 的范围为 $(\frac{1}{3},\frac{9}{25})$．

达标训练（适合高一优等生或者高二）

1．【解析】因为 $f(x)=\frac{2\sin x}{1-|x|}$ 的定义域为 $\{x|x\in R$ 且 $x\ne\pm1\}$，所以 $f(-x)=\frac{2\sin(-x)}{1-|-x|}=-\frac{2\sin x}{1-|x|}=-f(x)$；所以函数是奇函数，即函数定义域关于原点对称，由此可排除选项 B，D；当 $x\in(0,1)$ 时，$1-|x|>0$，$\sin x>0$，故 $f(x)>0$，由此可排除选项 C；故选 A．

2．【解析】$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{\log_{2019}|2^{-x}-2^{x}|}=-\frac{\sin x}{\log_{2019}|2^{x}-2^{-x}|}=-f(x)$，故函数为奇函数，由此排除 AD，

又 $f(3)=\frac{\sin3}{\log_{2019}|8-\frac{1}{8}|}=\frac{\sin3}{\log_{2019}\frac{63}{8}}>0$，排除 C，故选 B．

3．【解析】根据题意，函数 $f(x)=\frac{1}{e^{x-1}-x}$，有 $e^{x-1}-x\ne0$，则有 $x\ne1$，即函数的定义域为 $\{x|x\ne1\}$，

设 $t=e^{x-1}-x$，其导数 $t'=e^{x-1}-1$，易得在区间 $(-\infty,1)$ 上，$t'<0$，$t=e^{x-1}-x$ 为减函数，在区间 $(1,+\infty)$ 上，$t'>0$，$t=e^{x-1}-x$ 为增函数，则 $t=e^{x-1}-x$ 有最小值 $t_{x=1}=e^0-1=0$，则有 $t\ge0$，

对于 $f(x)=\frac{1}{e^{x-1}-x}$，必有 $f(x)>0$，则函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\ne1\}$ 且 $f(x)>0$，分析选项可得意 D 符合；故选 D．

4．【解答】【解析】$f(x)=x^2-2x-2^{|x-1|}+1=(x-1)^2-2^{|x-1|}$，则函数关于 $x=1$ 对称，排除 A，C，$f(0)=-2+1=-1<0$，排除 D，故选 B．

5．【解析】函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数，图象不对称，排除 C，当 $x\to+\infty$，$f(x)\to+0$，排除 D，$f(x)>0$ 恒成立，排除 A，故选 B．

6．【解析】由 $f(x)=\frac{x^3}{e^x+1}$，可知当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，排除 A，C；当 $x\to+\infty$ 时，由指数爆炸可知

$e^x>x^3$，则 $f(x)=\dfrac{x^3}{e^x+1}\to 0$，排除B．故选D．

7.【解析】若 $x>0$，则 $-x<0$，则 $f(-x)=\dfrac{-x\ln x}{x^2+1}=-f(x)$，若 $x<0$，则 $-x>0$，则 $f(-x)=\dfrac{-x\ln(-x)}{x^2+1}=-f(x)$，综上 $f(-x)=-f(x)$，即 $f(x)$ 是奇函数，图象关于圆的对称，排除C，D，当 $x>0$，且 $x\to 0$ 时，$f(x)<0$，排除B，故选A．

9.【解析】$f(x)$ 为奇函数，图象关于原点对称，排除A，B，当 $x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 时，$f(x)<0$，排除C，故选D．

10.【解析】根据题意，$f(x)=x\cdot\ln\dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}$，则 $f(-x)=(-x)\ln\dfrac{2+\sin x}{2-\sin x}=x\cdot\ln\dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}=f(x)$，

则函数 $f(x)$ 为偶函数，据此排除C、D；在 $(0,\pi)$ 上，$\sin x>0$，则有 $0<\dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}<1$，必有 $\ln\dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}<0$，

则 $f(x)=x\ln\dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}<0$，据此排除B；故选A．

11.【解析】$f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{2^{\cos(-x)}}=\dfrac{-\sin x}{2^{\cos x}}=-f(x)$ 则函数为奇函数，图象关于原点对称，排除A，B．

当 $x>0$ 在0的右侧，当 $x\to 0$，$f(x)>0$，排除D，故选C．

12.【解析】$f(x)=(\dfrac{2}{1+e^x}-1)\sin x=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\cdot\sin x$，则

$f(-x)=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\cdot\sin(-x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\cdot(-\sin x)=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\cdot\sin x=f(x)$，则 $f(x)$ 是偶函数，则图象关于 y 轴对称，

排除B，D，当 $x=1$ 时 $f(1)=\dfrac{1-e}{1+e}\cdot\sin 1<0$，排除A，故选C．

13.【解析】$f(-x)=\dfrac{(-x)^2+\cos(-x)}{-x}=-\dfrac{x^2+\cos x}{x}=-f(x)$，则函数 $f(x)$ 为奇函数，故排除AD，

当 $x=1$ 时，$f(1)=1+\cos 1>0$，故排除B，故选C．

14.【解析】因为 $f(-x)=\dfrac{3\cos(-x)+1}{-x}=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，图象关于原点对称，排除D，

又当 x 小于0趋近于0时，$f(x)<0$，故排除B，又 $f(-\pi)=\dfrac{3\cos(-\pi)+1}{-\pi}=\dfrac{2}{\pi}>0$，据此排除C．

故选A．

15.【解析】因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-\dfrac{1}{2})\cup(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{1}{2},+\infty)$

$f(-x)=\dfrac{-x(e^x-e^{-x})}{4x^2-1}=\dfrac{x(e^{-x}-e^x)}{4x^2-1}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，故排除A，当 $x=0$ 时，$f(1)=\dfrac{\frac{1}{e}-e}{3}<0$，故排除C，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，故排除D，综上所述，只有B符合，故选B．

16.【解析】由题意，$f(-x)=\dfrac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1}\cdot\cos(-x)=-f(x)$，函数是奇函数，排除A，B；

$x\to 0^+$，$f(x)\to+\infty$，排除D．故选C．

17.【解析】当 $x>1$ 时，$f(x)=(x-1)\ln x>0$，故排除C，D，当 $0<x<1$ 时，$x-1<0$，$\ln x<0$，所以 $f(x)=(x-1)\ln x>0$，故排除B，故选A．

18.【解析】令 $f(x)=x\ln|x|$，易知 $f(-x)=-x\ln|-x|=-x\ln|x|=-f(x)$，所以该函数是奇函数，排除选项 B；又 $x>0$ 时，$f(x)=x\ln x$，容易判断，当 $x\to+\infty$ 时，$x\ln x\to+\infty$，排除 D 选项；

令 $f(x)=0$，得 $x\ln x=0$，所以 $x=1$，即 $x>0$ 时，函数图象与 x 轴只有一个交点，所以 C 选项满足题意.故选 C.

19.【解析】函数 $f(x)=x^2-2^{|x|}$ 满足 $f(x)=f(-x)$，所以函数是偶函数，图象关于 y 轴对称，排除 B、D，又当 $x=0$ 时，$y=-1$，所以 C 正确．故选 C.

20.【解析】由于 $f(x)=x+\cos x$，所以 $f(-x)=-x+\cos x$，所以 $f(-x)\neq f(x)$，且 $f(-x)\neq -f(x)$，故此函数是非奇非偶函数，排除 A、C；又当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$x+\cos x=x$，即 $f(x)$ 的图象与直线 $y=x$ 的交点中有一个点的横坐标为 $\dfrac{\pi}{2}$，排除 D．故选 B.

专题 9 函数的综合应用

1.【解析】由题意可得：$y=x(1+2\%)(1-2\%)=0.9996x$．故选 C.

2.【解析】根据表格可知：销售单价每增加1元，日均销售就减少40桶．设每桶水的价格为 $(6+x)$ 元，公司日利润 y 元，则：$y=(6+x-5)(480-40x)-200=-40x^2+440x+280(0<x<13)$，因为 $-40<0$，所以当 $x=5.5$ 时函数 y 有最大值，因此，每桶水的价格为11.5元，公司日利润最大，故选 D.

3.【解析】由题意可得：$(1+10\%)^2(1-10\%)^2=0.99^2\approx0.98<1$．因此该股民这只股票的盈亏情况为：略有亏损．故选 B.

4.【解析】因为这两个月的得分的平均增长率为 x，所以 $A(1+x)^2=A(1+p)(1+q)$，所以 $(1+x)^2=(1+p)(1+q)$，$p>0$，$q>0$．所以 $1+x=\sqrt{(1+p)(1+q)}\leq\dfrac{(1+p)+(1+q)}{2}=1+\dfrac{p+q}{2}$，所以 $x\leq\dfrac{p+q}{2}$，等号在 $1+p=1+q$，即 $p=q$ 时成立．故选 B.

5.【解析】设 $a_1=130.0$，$a_{13}=14.8$，公差 $d=\dfrac{14.8-130.0}{12}=-9.6$，所以 $a_8=a_1+7d=130.0-7\times9.6=62.8$，故清明的晷影长为 62．8 寸．故选 D.

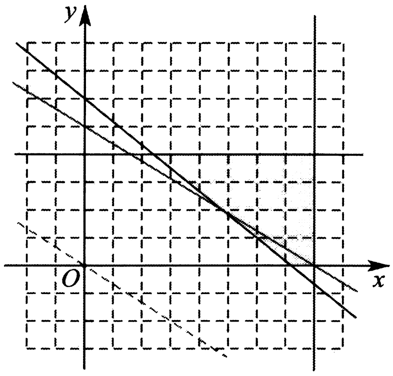
6.【解析】由题意，A_0 纸的长与宽分别为118.9厘米，84.1厘米，则 A_1 纸的长为 $\dfrac{118.9}{\sqrt{2}}$，A_2 纸的长为 $\dfrac{\frac{118.9}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{118.9}{(\sqrt{2})^2}$，$A_3$ 纸的长为 $\dfrac{\frac{118.9}{(\sqrt{2})^2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{118.9}{(\sqrt{2})^3}$，$A_4$ 纸的长为 $\dfrac{\frac{118.9}{(\sqrt{2})^3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{118.9}{(\sqrt{2})^4}=29.7$（厘米）．故选 C.

7.【解析】根据题意，九节竹的每一节容量变化均匀，即其每一节的容量成等差数列，设至下而上各节的容量分别为 a_1，a_2，…，a_n，公差为 d，分析可得：$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=4\\a_6+a_7+a_8+a_9=3\end{cases}$，解可得 $a_1=\dfrac{95}{66}$，$d=-\dfrac{7}{66}$，则 $a_4=\dfrac{95}{66}+3d=\dfrac{74}{66}=1\dfrac{8}{66}$（升），$a_5=\dfrac{95}{66}+4d=\dfrac{67}{66}=1\dfrac{1}{66}$（升）．故选 B.

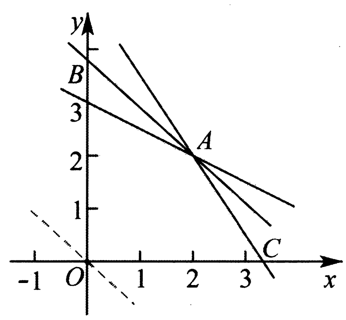
8.【解析】根据题意和图（2）知，两直线平行即票价不变，直线向上平移说明当乘客量为0时，收入是0但是支出的变少了，即说明了此建议是降低成本而保持票价不变；由图（3）看出，当乘客量为0时，支出不变，但是直线的倾斜角变大，即相同的乘客量时收入变大，即票价提高了，即说明了此建议是提高票价而保持成本不变，综上可得①④正确，②③错误．故选 D.

9.【解析】设甲型车x辆，乙型车y辆，根据题意得$\begin{cases}4\times 6x+3\times 10y\geq 180\\0\leq x\leq 8\\0\leq y\leq 4\\x,y\in N^*\end{cases}$，目标函数为$z=320x+504y$，

作出不等式组对应的平面区域如图：四点坐标$(2.5,4)$，$(8,4)$，$(8,0)$，$(7.5,0)$，围成成的梯形及其内部．包含的整点有$(8,0)$，$(7,1)$，$(8,1)$，$(5,2)$，$(6,2)$，$(7,2)$，$(8,2)$，$(4,3)$，$(5,3)$，$(6,3)$
$(7,3)$，$(8,3)$，$(3,4)$，$(4,4)$，$(5,4)$，$(6,4)$，$(7,4)$，$(8,0)$．作直线$320x+504y=0$并平移
由图象知当直线过点$(8,0)$时，z最小．即最小值$z=8\times 320=2560$（元）．故选B．



9题图



10题图

10.【解析】设该企业生产甲产品x吨，乙产品y吨，利润为z万元，则约束条件为$\begin{cases}3x+2y\leq 10\\x+2y\leq 6\end{cases}$，且$x$，$y\geq 0$，

目标函数$z=3x+4y$，作出不等式组对应的平面区域如图：由$z=3x+4y$，得$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{z}{4}$，平移直线$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{z}{4}$，由图象知当直线$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{z}{4}$经过点$A$时，$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{z}{4}$的截距最大，此时$z$最大，由$\begin{cases}3x+2y=10\\x+2y=6\end{cases}$得$\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$，即$A(2,2)$，此时$z=3\times 2+4\times 2=6+8=14$（万元），即该企业生产甲产品2吨，乙产品2吨，利润为14万元，故选D．

11.【解析】将1000元钱存入微信零钱通或者支付宝的余额宝，选择复利的计算方法，则存满5年后的本息和为$1000\times 1.0401^5=1217$，故而共得利息$1217-1000=217$元．将1000元存入银行，不选择复利的计算方法，则存满5年后的利息为$1000\times 0.0225\times 5=112.5$，故可以多获利息$217-112.5=104.5$．故选B．

12.【解析】记每天走的路程里数为$\{a_n\}$，可知$\{a_n\}$是公比$q=\dfrac{1}{2}$的等比数列，由$S_6=378$，得

$S_6=\dfrac{a_1(1-\dfrac{1}{2^6})}{1-\dfrac{1}{2}}=378$，解得：$a_1=192$，所以$a_4=192\times\dfrac{1}{2^3}=24$，$a_5=192\times\dfrac{1}{2^4}=12$，此人第4天和第5天共走了$24+12=36$里．故选C．

13.【解析】设小贩原有柑桔数为x个，第一人所得为：$\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{2}$，第二个人所得为：$\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{x+1}{2})+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{2^2}$，

第二个人所得为：$\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+1}{2^2})+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{2^3}$，……，第六个人所得为：$\dfrac{x+1}{2^6}$，

故：$\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x+1}{2^2}+\dfrac{x+1}{2^3}+\dfrac{x+1}{2^4}+\dfrac{x+1}{2^5}+\dfrac{x+1}{2^6}=x$．解之得：$x=63$．故答案为63．

14.【解析】(1)标价为800元的商品优惠额为：$800\times0.2+80=240$（元），所以优惠率为：$\frac{240}{800}=0.3$.

答：购买一件标价为800元的商品，顾客得到的优惠率是30%.

(2)设购买标价为m元的商品可以得到30%的优惠率. 当$m\in[400,500)$时，$0.8m\in[320,400)$，

优惠率为：$\frac{0.2m+30}{m}=30\%$，解得$m=300$. 因为$300\notin[400,500)$，所以不合题意，舍去. 当$m\in[500,700]$时，$0.8m\in[400,560]$，优惠率为：$\frac{0.2m+50}{m}=30\%$，解得$m=500$. 因为$500\in[500,700]$，符合题意. 答：购买标价为500元的商品可以得到30%的优惠率.

15.【解析】(1)当$0<x<30$时，$y=500x-10x^2-100x-2500=-10x^2+400x-2500$；

当$x\geq30$时，$y=500x-501x-\frac{10000}{x}+4500-2500=2000-(x+\frac{10000}{x})$；

所以$y=\begin{cases}-10x^2+400x-2500, 0<x<30\\ 2000-(x+\frac{1}{x}), x\geq30\end{cases}$；

(2)当$0<x<30$时，$y=-10(x-20)^2+1500$，所以当$x=20$时，$y_{\max}=1500$；

当$x\geq30$时，$y=2000-(x+\frac{10000}{x})\leq2000-2\sqrt{x\cdot\frac{10000}{x}}=2000-200=1800$，

当且仅当$x=\frac{10000}{x}$，即$x=100$时，$y_{\max}=1800>1500$，所以年产量为100百件时，该企业获得利润最大，最大利润为1800万元.

16.【解析】(1)顾客购买得的黄金是大于10克.

原因如下：由于天平两臂不等长，设左臂为a，右臂为b，则$a\neq b$，先称得黄金质量x，后称的黄金质量为y，则$bx=5a$，$ay=5b$，故$x+y=\frac{5b}{a}+\frac{5a}{b}>2\sqrt{\frac{5b}{a}\frac{5a}{b}}=10$，所以，顾客购买得的黄金是大于10克.

(2)设此种商品的价格分别为p_1，p_2（都大于0），第一种方案每次购买这种物品数量为$x>0$；第二种方案每次购买这种物品的钱数为$y>0$. 可得：第一种方案的平均价格为：$\frac{xp_1+xp_2}{2x}=\frac{p_1+p_2}{2}$；第二种方案的平均价格为$\frac{2y}{\frac{y}{p_1}+\frac{y}{p_2}}=\frac{2p_1p_2}{p_1+p_2}\leq\frac{2p_1p_2}{2\sqrt{p_1p_2}}=\sqrt{p_1p_2}\leq\frac{p_1+p_2}{2}$，当且仅当$p_1=p_2$时取等号.

所以第二种购物方式比较经济. 一般地，如果n次购买同一物品，用第二种策略比较经济.

17.【解析】(1)该产品的年销量t万件（生产量与销量相等）与促销费用x万元满足$t=4-\frac{4}{x+2}$.

2020年生产该产品还需投入成本$4+t$万元（不含促销费），促销费x满足当$0\leq x\leq1$，产品销量价格定为5元/件，当$x>1$产品销量价格定为$5+\frac{a}{t}$元/件，依题意将2020年该产品的利润y万元表示为促销费费x万元的函数为：$y=\begin{cases}5t-(4+t)-x=12-\frac{16}{x+2}-x, 0\leq x\leq1\\ t(5+\frac{a}{t})-(4+t)-x=12-\frac{16}{x+2}-x+a, x>1\end{cases}$.

(2)当$0\leq x\leq1$，$y=14-(x+2+\frac{16}{x+2})$为单调减函数，$y_{\max}=11-\frac{16}{3}=\frac{17}{3}$，

当 $x>1$ 时，$y=14-(x+2+\dfrac{16}{x+2})+a$，当且仅当 $x=2$ 时 $y_{\max}=6+a$，又 $a>0$，所以 $6+a>\dfrac{17}{3}$，所以该公司促销费投入2万元时，公司利润最大为 $6+a$ 万元.

18.【解析】设需要这样的玻璃 x 块，则经过 x 块这样的玻璃后光线强度为 $y=k\cdot 0.9^x$，由题意得 $k\cdot 0.9^x<\dfrac{k}{4}$（$k>0$），化得 $0.9^x<\dfrac{1}{4}$，两边同时取常用对数，可得 $x\lg 0.9<\lg\dfrac{1}{4}$，因为 $\lg 0.9<0$，所以

$x>\dfrac{\lg\frac{1}{4}}{\lg 0.9}=\dfrac{-2\lg 2}{2\lg 3-1}\approx\dfrac{-0.602}{-0.046}\approx 13.09$，则至少通过14块玻璃，故选C.

19.【解析】因为在 $t=0\min$ 和 $t=1\min$ 测得该物质的浓度分别为 $124mg/L$ 和 $64mg/L$，所以 $\begin{cases}a+24=124\\ ar+24=64\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}a=100\\ r=\dfrac{2}{5}\end{cases}$，所以函数关系为 $M(t)=100\times(\dfrac{2}{5})^t+24$，所以在 $t=4\min$ 时，该物质的浓度为：

$100\times(\dfrac{2}{5})^4+24=26.56\ mg/L$；若该物质的浓度小于 $24.001mg/L$，则 $100\times(\dfrac{2}{5})^t+24<24.001$，即 $(\dfrac{2}{5})^t<10^{-5}$，

两边同时取以10为底的对数得：$t\lg\dfrac{2}{5}<-5$，所以 $t(\lg 2-\lg 5)<-5$，所以 $t[\lg 2-(1-\lg 2)]<-5$，所以

$t(2\lg 2-1)<-5$，所以 $t>\dfrac{-5}{2\lg 2-1}\approx 12.56$，所以整数 t 的最小值为13，故答案为26.56，13.

20.【解析】因为 $N=N_0\cdot 2^{\frac{-T}{5730}}$，所以当 $T=5730$ 时，$N=N_0\cdot 2^{-1}=\dfrac{1}{2}N_0$，所以经过5730年后，碳14的质量变为原来的 $\dfrac{1}{2}$，由题意可知：$2^{\frac{-T}{5730}}>\frac{3}{7}$，两边同时取以2为底的对数得：$\log_2 2^{\frac{-T}{5730}}>\log_2\dfrac{3}{7}$，所以

$\dfrac{-T}{5730}>\dfrac{\lg\frac{3}{7}}{\lg 2}=\dfrac{\lg 3-\lg 7}{\lg 2}\approx 1.2$，所以 $T<6876$，所以推测良渚古城存在的时期距今约在5730年到6876年之间.

21.【解析】地震时释放出的能量 E（单位：焦耳）与地震里氏震级 M 之间的关系为 $\lg E=4.8+1.5M$.

2008年5月汶川发生里氏8.0级地震，它释放出来的能量满足：$\lg E_1=4.8+1.5\times 8.0$，

2019年6月四川长宁发生里氏6．0级地震释放出来能量满足：$\lg E_2=4.8+1.5\times 6.0$.

所以 $\lg E_1-\lg E_2=3$，解得：$\dfrac{E_1}{E_2}=10^3=1000$. 故答案为1000.

22.【解析】由题意，初始温度 $T_0=90^\circ\mathrm{C}$，室温 $T_\alpha=10^\circ\mathrm{C}$，代入公式，可得 $T=10+(90-10)\cdot 2^{-kt}=10+80\cdot 2^{-kt}$，因为当 $T=50^\circ\mathrm{C}$ 时，$t=30$ 分钟，所以 $10+80\cdot 2^{-k\cdot 30}=50$，即 $2^{-k\cdot 30}=2^{-1}$，所以 $-k\cdot 30=-1$，解得 $k=\dfrac{1}{30}$.

所以 $T=10+80\cdot 2^{-\frac{1}{30}t}$，所以当 $T=20^\circ\mathrm{C}$ 时，$10+80\cdot 2^{-\frac{1}{30}t}=20$，即，$2^{-\frac{1}{30}t}=2^{-3}$，所以 $-\dfrac{1}{30}t=-3$，解得 $t=90$.

故答案为90.

23.【解析】由函数的表格可知，函数的解析式应该是指数函数类型与二次函数的类型，选项 C 不正确；当 $x=2.01$ 时，$y=2^{x+1}-1>4$；$y=x^2-1\approx 3$，$y=x^3>7$，当 $x=3$ 时，$y=2^{x+1}-1=15$；$y=x^2-1\approx 8$，$y=x^3=27$，故选B.

24.【解析】(1) 由题意物体温度的变化与实验室和物体温度差成正比（比例系数为k），
可知物体温度的变化 $t_{n+1}-t_n$ 与实验室和物体温度差 $30-t_n$ 成正比（比例系数为 k），故合理模型为 $t_{n+1}-t_n=k(30-t_n)$，选②；

(2) 由 $t_{n+1}-t_n=k(30-t_n)$ 可知，当 t_n 逐渐增大，$k(30-t_n)$ 随之减小，$t_{n+1}-t_n$ 随之减小，即随着时间增加，物体温度变化越小，即变化相等温度，随着时间的增加，用时越来越少，所以物体温度从 $5^\circ C$ 上升到 $10^\circ C$ 所需时间为 $a\min$，从 $10^\circ C$ 上升到 $15^\circ C$ 所需时间为 $b\min$，则 $a<b$，故答案为②，<.

24.【解析】(1) 最适合的函数模型是：$f(x)=ax+b$，理由如下：

若模型为 $f(x)=)=a\times 2^x+b$，把点 $(1,4)$，$(3,7)$ 代入可求 $a=\frac{1}{2}$，$b=3$，所以 $f(x)=2^{x-1}+3$，当 $x=4$ 时，$f(4)=11$，与已知相差太大，不符合，若模型为 $f(x)=\log_{0.5}x+a$，则 $f(x)$ 是减函数，与已知不符合，由已知得：$\begin{cases}a+b=4\\3a+b=7\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\b=\frac{5}{2}\end{cases}$，所以 $f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$；

(2) 2020年的预计年产量为 $f(6)=11.5$，所以2020年的实际年产量为：$11.5\times(1-0.3)=8.05$.

25.【解析】(1) 由题意可知，符合本题的函数模型必须满足定义域为 $[0,120]$，且在 $[0,120]$ 上为增函数；

函数 $F(v)=(\frac{1}{2})^v+a$ 在 $[0,120]$ 是减函数，所以不符合题意；

而函数 $F(v)=k\log_a v+b$ 的 $v\neq 0$，即定义域不可能为 $[0,120]$，也不符合题意；

所以选择函数 $F(v)=av^3+bv^2+cv$.

由已知数据得：$40(40^2a+40b+c)=\frac{20}{3}$，$60(60^2a+60b+c)=\frac{65}{8}$，$80(80^2a+80b+c)=10$，

解得 $a=\frac{1}{38400}$，$b=-\frac{1}{240}$，$c=\frac{7}{24}$. 所以，$F(v)=\frac{1}{38400}v^3-\frac{1}{240}v^2+\frac{7}{24}v$（$0\le v\le 120$）.

(2) 设这辆车在该测试路段的总耗油量为 y，行驶时间为 t，由题意得：

$y=F\cdot t=(\frac{1}{38400}v^3-\frac{1}{240}v^2+\frac{7}{24}v)\cdot\frac{240}{v}=\frac{1}{160}v^2-v+70=\frac{1}{160}(v-80)^2+30$，

因为 $0\le v\le 120$，所以，当 $v=80$ 时，y 有最小值30.

所以，这辆车在该测试路段上以80 km/h 的速度行驶时总耗油量最少，最少为30 L.

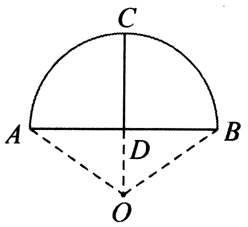
26.【解析】(1) 由题意符合公司要求的函数 $f(x)$ 在 $[3000,9000]$ 为增函数，在且对 $\forall x\in[3000,9000]$，恒有 $f(x)\ge 100$ 且 $f(x)\le\frac{x}{5}$. ①对于函数 $f(x)=0.03x+8$，当 $x=3000$ 时，$f(3000)=98<100$，不符合要求；②对于函数 $f(x)=0.8^x+200$ 为减函数，不符合要求；③对于函数 $f(x)=100\log_{20}x+50$ 在 $[3000,10000]$，显然 $f(x)$ 为增函数，且当 $x=3000$ 时，$f(3000)>100\log_{20}20+50\ge 100$；又因为 $f(x)\le f(9000)=100\log_{20}9000+50<100\log_{20}160000+50=450$；而 $\frac{x}{5}\ge\frac{3000}{5}=600$，所以当 $x\in[3000,9000]$ 时，$f(x)_{\max}\le(\frac{x}{5})_{\min}$. 所以 $f(x)\ge\frac{x}{5}$ 恒成立；因此，$f(x)=100\log_{20}x+50$ 为满足条件的函数模型.

(2) 由 $100\log_{20}x+50\ge 350$ 得：$\log_{20}x\ge 3$，所以 $x\ge 8000$，所以公司的投资收益至少要达到8000万元.

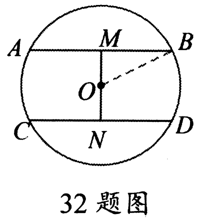
28.【解析】设 $BC=xm$（$x>0$），则 $AB=\frac{1000}{x}m$，所以矩形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积 $S=(x+10)(\frac{1000}{x}+4)$
$=1000+400+4x+\frac{10000}{x}\ge 1400+2\sqrt{4x\cdot\frac{10000}{x}}=1800$. 当且仅当 $4x=\frac{10000}{x}$，即 $x=50$ 时上式取等号. 所以

当整个项目占地 $A_1B_1C_1D_1$ 面积最小时，则核心喷泉区 BC 的长度为 $50m$．故选 B.

29.【解析】如图，由题意可得：$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$，$OA=4$，在 Rt△AOD 中，可得：$\angle AOD=\frac{\pi}{3}$，$\angle DAO=\frac{\pi}{6}$，$OD=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}\times 4=2$，可得：矢 $=4-2=2$，由 $AD=AO\cdot\sin\frac{\pi}{3}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，可得：弦 $=2AD=4\sqrt{3}$，所以：弧田面积 $=\frac{1}{2}$（弦 × 矢 + 矢 ²）$=\frac{1}{2}(4\sqrt{3}\times 2+2^2)=4\sqrt{3}+2\approx 9$ 平方米．故选 B.



29 题图



32 题图

30.【解析】由题意，长方形截面面积 $S=2R\cos\alpha\cdot R\sin\alpha=R^2\sin 2\alpha$，所以 $\sin 2\alpha=1$，$\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，长方形截面面积最大，故选 A.

31.【解析】设圆的圆心为 O，由对称性可知，O 为 MN 的中点，设 $OM=x$（$0<x<50$），则 $AB=CD=2\sqrt{100-x^2}$，所以栈道长度 $y=2x+4\sqrt{100-x^2}$．令 $x=100\cos\theta$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $y=200\cos\theta+400\sin\theta=200\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)$，$\tan\varphi=\frac{1}{2}$．所以当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时，y 取最大值为 $200\sqrt{5}$ 米．故答案为 $200\sqrt{5}$．

32.【解析】(1) 连接 OF，如图所示：因为 $GC=GF$，所以 $\angle GOF=\angle GOC$，易证 $\Delta GOF\cong\Delta GOC$，所以 $\angle MGF=\angle MGC$，因为 $GC=GF$，所以 $GM\perp CF$，所以 $GM=R-OM=R-R\cos\theta$，$MC=R\sin\theta$，所以 $S=\frac{1}{2}FC\bullet GM=R^2\sin\theta(1-\cos\theta)\quad(0<\theta<\frac{\pi}{3})$；

(2) 因为 $ON=\frac{\sqrt{3}}{3}ND=\frac{\sqrt{3}}{3}MC=\frac{\sqrt{3}}{3}R\sin\theta$，所以 $MN=OM-ON=R\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}R\sin\theta$，

所以 $S_{矩形CDEF}=FC\cdot MN=2R^2(sin\theta cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}sin^2\theta)=2R^2[\frac{1}{2}sin2\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}(1-cos2\theta)]$

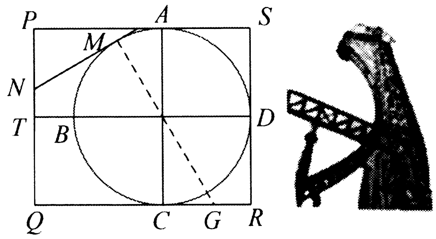
$=R^2[\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})-\frac{\sqrt{3}}{3}]$，因为 $2\theta+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$，所以当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，$S_{矩形CDEF}$ 最大，故矩形花坛的最高造价是 $R^2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times 300=17320$ 元.

33.【解析】(1) 如图所示，作 $ME//TO$，垂足为 E 点，作 $NF\perp ME$，垂足为 F 点.

$TE=70-60\cos\alpha$，$NM=\frac{70-60\cos\alpha}{\sin\alpha}$．$l(\alpha)=\frac{70-60\cos\alpha}{\sin\alpha}+60(\frac{\pi}{2}-\alpha)+60+\frac{60}{\sin\alpha}+60-\frac{60}{\tan\alpha}$

$=120+\frac{130-120\cos\alpha}{\sin\alpha}+30\pi-60\alpha$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$．

(2) $l'(\alpha)=\frac{120-130\cos\alpha}{sin^2\alpha}-60=0$，解得 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$．所以 l 最小时 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$．



34.【解析】(1) 当 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 时，则 $AD=OA=OD=2$，$\angle DOC=\dfrac{2}{3}\pi$，$AB=\sqrt{DB^2-AD^2}=2\sqrt{3}$，所以所划区域的面积 $S=\dfrac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi}\cdot\pi\cdot OM^2+\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot AB+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot BC^2=3\pi+2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\pi+3\sqrt{3}$；

(2) 由图可知，$\angle COD=2\theta$，$OM=3$，$NB=1+4=5$，$AD=4\cos\theta$，$AB=4\sin\theta$

$W=2\sqrt{2}\cdot\dfrac{2\theta}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot OM+3[2NB+2(AD+AB)]=12\sqrt{2}\theta+30+24\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})$，$\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，

则令 $W'=12\sqrt{2}+24\sqrt{2}\cos(\theta+\dfrac{\pi}{4})=0$，因为 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，得 $\theta=\dfrac{5\pi}{12}$，$x\in(0,\dfrac{5\pi}{12})$，$W'>0$，W 单调递增，$x\in(\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{\pi}{2})$，$W'<0$，$W$ 单调递减，故 $\theta=\dfrac{5\pi}{12}$，收入 W 最大.

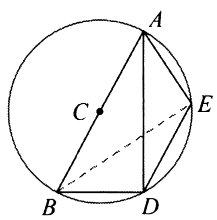
35．【解析】(1) 因为 $S=\dfrac{1}{2}(AB+CD)\times CP=200$，$CP=10$，所以 $AB+CD=40$，又因为 $L(\theta)=AB+CD-MN+2BC$，且 $MN=BP=\dfrac{CP}{\tan\theta}=\dfrac{10}{\tan\theta}$，$BC=\dfrac{CP}{\sin\theta}=\dfrac{10}{\sin\theta}$，所以 $L(\theta)=40-\dfrac{10}{\tan\theta}+\dfrac{20}{\sin\theta}=40+\dfrac{20-10\cos\theta}{\sin\theta}$（$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$）；

(2) 令 $L'(\theta)=\dfrac{10-20\cos\theta}{sin^2\theta}=0$，解得 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，且当 $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ 时，$L'(\theta)<0$，$L(\theta)$ 单调递减，当 $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$L'(\theta)>0$，$L(\theta)$ 单调递增，所以当 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$L(\theta)$ 取最小值，此时最小值为 $L(\dfrac{\pi}{3})=40+10\sqrt{3}$.

36.【解析】(1)连接 BE，根据条件可知 $\angle AEB=90^\circ$，$\angle BED=\angle EBD=\angle BAD=\dfrac{\theta}{2}$，且 $AE=AB\bullet\cos\theta=r\cos\theta$，$BE=AB\bullet\sin\theta=r\sin\theta$，$BD=AB\cdot\sin\dfrac{\theta}{2}=r\sin\dfrac{\theta}{2}$，所以 $f(\theta)=S_{\Delta ABE}+S_{\Delta BDE}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AE\sin\theta+\dfrac{1}{2}BE\cdot BD\sin\dfrac{\theta}{2}$

$=2r^2\sin\theta\cos\theta+2r^2\sin\theta\sin^2\dfrac{\theta}{2}=r^2\sin\theta(1+\cos\theta)=r^2(\sin\theta+\dfrac{\sin 2\theta}{2})$，$\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$；

(2) 由 (1) 令 $f'(\theta)=r^2(\cos\theta+\cos 2\theta)=r^2(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)=0$，解得 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos\theta=-1$（舍），所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，且当 $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ 时，$f'(\theta)>0$，$f(\theta)$ 单调递增，当 $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'(\theta)<0$，$f(\theta)$ 单调递减，所以当 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$f(\theta)$ 取极大值也是最大值，最大值为 $f(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{4}r^2$.



37.【解析】(1) $AO=OB=2\sqrt{3}$，$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$，由余弦定理得 $AB=6$，在 ΔBDO 中，由正弦定理得

$\frac{BD}{\sin\angle BOD}=\frac{BO}{\sin\angle BDO}$，所以 $\frac{BD}{\sin(\theta-\frac{\pi}{6})}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\theta}$，所以 $BD=\frac{2\sqrt{3}\sin(\theta-\frac{\pi}{6})}{\sin\theta}$，$AD=2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}\sin(\theta-\frac{\pi}{6})}{\sin\theta}$，

所以蜂巢区面积：$S=S_{\Delta AOD}+S_{\Delta CDB}=S_{\Delta AOD}+S_{扇形COB}-S_{\Delta BDO}=\frac{1}{2}\cdot AO\cdot AD\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\theta-\frac{\pi}{6}}{2\pi}\pi\cdot AO^2-\frac{1}{2}\cdot BO\cdot BD\cdot\sin\frac{\pi}{6}$，

整理，得 S 关于 θ 的函数关系式为：$S=6\theta+\frac{3}{\tan\theta}-\pi$，$\theta\in(\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi)$.

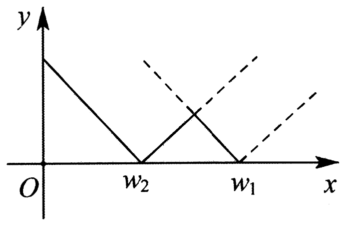
(2) 对 $S=6\theta+\frac{3}{\tan\theta}-\pi$ 求导，得 $S'=6-\frac{3}{sin^2\theta}$，令 $S'=0$，解得 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\frac{3\pi}{4}$，

当 $\theta\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$ 时，$S'<0$，S 递减，当 $\theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ 时，$S'>0$，S 递增，当 $\theta\in(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6})$ 时，$S'<0$，S 递减，综上所述，S 的最小值只可有在 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 或 θ 趋近 $\frac{5\pi}{6}$ 时取得，当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$S=\frac{\pi}{2}+3$，当 $\theta=\frac{5\pi}{6}$ 时，$S=4\pi-3\sqrt{3}>\frac{\pi}{2}+3$，所以当 θ 为 $\frac{\pi}{4}$ 时，蜂巢区的面积 S 最小，S 的最小值为 $\frac{\pi}{2}+3$.

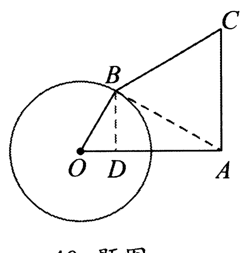
38.【解析】(1) 投放点 $\omega_1(120,0)$，$\omega_2(60,0)$，$f_{60}(10)$ 表示与 $B(10,0)$ 距离最近的投放点（即 ω_2）的距离，所以 $f_{60}(10)=|60-10|=50$，同理分析，$f_{60}(80)=|60-80|=20$，$f_{60}(95)=|120-95|=25$，

由题意得，$f_{60}(x)=\{|60-x|,|120-x|\}_{\min}$，，则当 $|60-x|\le|120-x|$，即 $x\le 90$ 时，$f_{60}(x)=|60-x|$；当 $|60-x|>|120-x|$，即 $x>90$ 时，$f_{60}(x)=|120-x|$；综上 $f_{60}(x)=\begin{cases}|60-x|,x\le 90\\|120-x|,x>90\end{cases}$；

(3) 由题意得 $f_t(x)=\{|t-x|，|120-x|\}_{min}$，所以 $f_t(x)=\begin{cases}|t-x|,x\le 0.5(120+t)\\|120-x|,x>0.5(120+t)\end{cases}$，则 $f_t(x)$ 与坐标轴围成的面积如阴影部分所示，所以 $S=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}(120-t)^2=\frac{3}{4}t^2-60t+3600$，由题意，$S<S(60)$，即 $\frac{3}{4}t^2-60t+3600<2700$，解得 $20<t<60$，即垃圾投放点 ω_2 建在 $(20,0)$ 与 $(60,0)$ 之间时，比建在中点时更加便利.



39 题图



40 题图

40.【解析】(1) 作 $BD\perp AO$ 交 AO 于点 D，则在 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{OBD}$ 中，$BD=\sin\theta$，$OD=\cos\theta$，在 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ADB}$ 中，$AD=2-\cos\theta$，所以 $AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=\sqrt{5-4\cos\theta}$，则 $\sin\angle OAB=\frac{BD}{AB}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$，$\cos\angle OAB=\frac{AD}{AB}=\frac{2-\cos\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$；(2) 根据三角形三边关系可知 $OC<OB+BC$，则当 O、B、C 三点共线时 OC 最长，此时 $OC=OB+BC=1+AB=1+\sqrt{5-4\cos\theta}$，即 $f(\theta)=1+\sqrt{5-4\cos\theta}$，则 $f'(\theta)=\frac{4\sin\theta}{2\sqrt{5-4\cos\theta}}=0$

时，$\theta=\frac{\pi}{2}$，且 $f(\theta)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上单调递减，所以当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时 $f(\theta)$ 取最大值，即有 OC 的最大值为 $f(\frac{\pi}{2})=1+\sqrt{5}$．

专题 10　导数的三板斧之切线

达标训练

1.【解析】法一　由 $y=x^2-2\ln(x+1)$，得 $y'=2x-\frac{2}{x+1}$，$y'|_{x=0}=-2$，则曲线 $y=x^2-2\ln(x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=-2x$．故选：A．

法二　根据切线求和原理，$\ln(x+1)\le x$，$x^2\ge 0$，故曲线在点 $A(0,0)$ 处的切线方程为 $y=-2x$．故选：A

2.【解析】法一　由 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$，得 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}$，设直线 $y=-x+3$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切于 $(x_0,\ln x_0+\frac{a}{x_0})$，

则 $\begin{cases}\frac{1}{x_0}-\frac{a}{{x_0}^2}=-1\\ \ln x_0+\frac{a}{x_0}=-x_0+3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_0=1\\ a=2\end{cases}$．故选：$B$．

法二　根据切线求和原理，$\ln x\le x-1$，$\frac{a}{x}\ge 2a-ax$，必要探路，令曲线在点 $A(1,a)$ 处的切线方程满足 $y=(1-a)x+2a-1=-x+3$．$a=2$ 故选：A．

注意：在 $x=n$ 时，切线方程为 $\ln nx\le nx-1\Leftrightarrow \ln x\le nx-\ln n-1$，$\frac{a}{x}\ge\frac{2a}{n}-\frac{ax}{n^2}$，$\ln n$ 必为有理数，只有 $n=1$ 满足题意．

3.【解析】函数 $f(x)=xe^x$ 的导数为 $f'(x)=(x+1)e^x$，可得函数 $f(x)=xe^x$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 $k=2e$，切点为 $(1,e)$，则切线方程为 $y-e=2e(x-1)$，化为 $y=2ex-e$．即 $2ex-y-e=0$．故选 A．

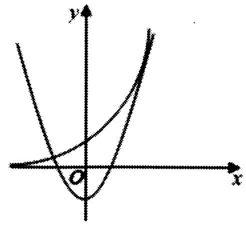
4.【解析】法一：$f(x)\le 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，$\ln x-ax\le 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，故 $a\ge\frac{\ln x}{x}$ 对任意 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$，解得 $x=e$，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，即函数 $g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 递减，当 $x\in[1,e)$ 时，$g'(x)>0$，即函数 $g(x)$ 在 $[1,e)$ 递增，故 $g(x)\le g(1)=\frac{1}{e}$，则 $a\ge\frac{1}{e}$，故 a 的范围是 $[\frac{1}{e},+\infty)$．故选 C．

法二　由 $\ln x\le x-1\Leftrightarrow \ln ax\le ax-1\Leftrightarrow \ln x\le ax-1-\ln a\Leftrightarrow -1-\ln a=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{e}$，此时 $ax=1\Leftrightarrow x=e$，故 a 的范围是 $[\frac{1}{e},+\infty)$．故选 C．

5.【解析】法一：由 $f(x)=ae^x(a>0)$，$g(x)=x^2-m(m>0)$，得 $f'(x)=ae^x$，$g'(x)=2x$，设 $f(x)=ae^x(a>0)$ 与曲线 $g(x)=x^2-m(m>0)$ 的公共点为 (s,t)，则 $f'(s)=ae^s$，$g'(s)=2s$，两曲线在切点处的切线方程分别为 $y-ae^s=ae^s(x-s)$ 与 $y-s^2+m=2s(x-s)$，即 $y=ae^sx+ae^s-sae^s$ 与 $y=2sx-s^2-m$．则

$\begin{cases}2s=ae^s\\ ae^s-sae^s=-s^2-m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=s^2-2s\\ a=\frac{2s}{e^s}\end{cases}$，由 $m=s^2-2s$ 且 $m>0$，得 $s<0$ 或 $s>2$，如右图，当 $s<0$ 时，两

曲线无公共切线，则 $s>2$；由 $a=\dfrac{2s}{e^s}$ 得，$a=\dfrac{2s}{e^s}(s>2)$，令 $h(s)=\dfrac{2s}{e^s}(s>2)$，则 $h'(s)=\dfrac{2(1-s)}{e^s}<0$，函数 $h(s)$ 在 $(2,+\infty)$ 上为单调减函数，$h(s)<h(2)=\dfrac{4}{e^2}$，又当 $s\to+\infty$ 时，$h(s)\to0$，实数 a 的取值范围是 $(0,\dfrac{4}{e^2})$．故选 A.



法二 此题考虑极限分析，公切线存在时，两个凹函数一定要有交点（参考秒 1），当 $m\to0$ 时，$ae^x<x^2$，$e^x\ge ex\Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}}\ge\dfrac{ex}{2}\Leftrightarrow e^x\ge\dfrac{e^2}{4}x^2$，故 $x^2>ae^x\ge a\cdot\dfrac{e^2}{4}x^2\Leftrightarrow a<\dfrac{4}{e^2}$．故选 A.

6.【解析】法一 $y'=e^x+\cos x$，切线的斜率 $k=y'|_{x=0}=2$，切线方程为 $y-1=2(x-0)$．故选 C．

法二 根据切线求和原理，$e^x\ge x+1$，$\sin x\le x$，曲线在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1+x=2x+1$．故选 C．

7.【解析】因为 $f'(x)=2e^x+(2x-a)e^x=(2x+2-a)e^x$，所以 $f'(1)=(4-a)e=3e$，解得 $a=1$，即 $f(x)=(2x-1)e^x$，$f(0)=-1$，则 $f'(x)=(2x+1)e^x$，所以 $f'(0)=1$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处的切线方程为 $y+1=1\times(x-0)$，即 $x-y-1=0$．故选 B．

法二 易求得 $a=1$，$f(x)=(2x-1)e^x=2xe^x-e^x\ge2x-(x+1)=x-1$．故选 B．

8.【解析】法一 $y=ae^x+x\ln x$，$y'=ae^x+\ln x+1$，由在点 $(1,ae)$ 处的切线方程为 $y=2x+b$，可得 $ae+1+0=2$，解得 $a=e^{-1}$，又切点为 $(1,1)$，可得 $1=2+b$，即 $b=-1$．故选 B．

法二 切线求和原理，$y=ae^x+x\ln x\ge aex+x-1=2x+b\Leftrightarrow a=e^{-1}$，$b=-1$．故选 B．

9.【解析】法一：$f(x)=\ln x-kx^2$，$x\in(0,+\infty)$，$f(x)$ 在定义域内不大于 0，$f(x)\le0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $\ln x-kx^2\le0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，$k\ge\dfrac{\ln x}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立设 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$，$x\in(0,+\infty)$，

$g'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot2x}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$，令 $g'(x)=0$ 得，$x=\sqrt{e}$，当 $x\in(0,\sqrt{e})$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x\in(\sqrt{e},+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x=\sqrt{e}$ 时，函数 $g(x)$ 取到极大值，也是最大值，最大值为 $g(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}$，$k\ge\dfrac{1}{2e}$，故选 A．

法二 $f(x)=\ln x-kx^2\le0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\ln x^2\le kx^2$，令 $x^2=t$，则 $\dfrac{1}{2}t\le k\ln t\Leftrightarrow\dfrac{1}{2k}t\le\ln t\le\dfrac{1}{e}t\Leftrightarrow k\ge\dfrac{1}{2e}$，故选 A．

10.【解析】法一 函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的导数为 $y'=x$，在点 $(x_0,\dfrac{1}{2}x_0^2)$ 处的切线的斜率为 $k=x_0$，切线方程为 $y-\dfrac{1}{2}x_0^2=x_0(x-x_0)$，设切线与 $y=\ln x$ 相切的切点为 $(m,\ln m)$，$0<m<1$，即有 $y=\ln x$ 的导数为 $y'=\dfrac{1}{x}$，可得 $x_0=\dfrac{1}{m}$，切线方程为 $y-\ln m=\dfrac{1}{m}(x-m)$，令 $x=0$，可得 $y=\ln m-1=-\dfrac{1}{2}x_0^2$，由 $0<m<1$，可得 $x_0>1$，

且$x_0^2>2$，解得$x_0>\sqrt{2}$，由$m=\dfrac{1}{x_0}$，可得$x_0^2-2\ln x_0-2=0$，令$f(x)=x^2-2\ln x-2$，$x>\sqrt{2}$，

$f'(x)=2x-\dfrac{2}{x}>0$，$f(x)$在$(\sqrt{2},+\infty)$上递增，且$f(\sqrt{3})=3-\ln\sqrt{3}-2<0$，$f(2)=4-\ln 2-2>0$，则有$x_0^2-2\ln x_0-2=0$的根$x_0\in(\sqrt{3},2)$．故选$D$．

法二 由于l与$y=\ln x$切点位于区间$(0,1)$，故令$a>1$，切点为$(\dfrac{1}{a},-\ln a)$，$\ln x\le x-1\Leftrightarrow \ln ax\le ax-1$，

即切线方程为$y=ax-\ln a-1$，与$y=\dfrac{1}{2}x^2\ge\dfrac{1}{2}(2x_0x-{x_0}^2)=x_0x-\dfrac{1}{2}{x_0}^2$，联立得：$\begin{cases}a=x_0\\-1-\ln a=-\dfrac{1}{2}{x_0}^2\end{cases}$，即

${x_0}^2=2\ln x_0+2$，令$t=x_0^2$，则$t=\ln t+2$的根的范围，$h(t)=t-\ln t-2$，$h(3)=1-\ln 3<0$，$h(4)=2-\ln 4>0$，故$x_0\in(\sqrt{3},2)$．故选D．

11.【解析】由题意得$[f(x)-g(x)](x-x_0)>0$，$x\in[0,1]$；当$x>x_0$时，$f(x)>g(x)$；当$x<x_0$时，$f(x)<g(x)$；$f(x)$是一个不凸不凹的函数，满足$f''(x)=0$；$f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}ax^2-2x$，$f''(x)=e^x-a=0$，解得$x=\ln a$，$f(x)$的定义域为区间$[0,1]$，$0\le\ln a\le 1$，解得$a\in[1,e]$．故选$B$．

12.【解析】法一 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+a$，$g'(x)=2x$，设与$g(x)=x^2$相切的切点为$(s,t)(s>0)$ $(s>0)$，与曲线$f(x)=\ln x+ax$相切的切点为$(m,n)(m>0)$，则有公共切线斜率为$2s=\dfrac{1}{m}+a=\dfrac{n-t}{m-s}$，又$t=s^2$，$n=\ln m+am$，可得$n-t=2sm-2s^2=1+am-2s^2=1+am-2t$，即有$n=1+am-t=\ln m+am$，即$t=1-\ln m=s^2$，即$\ln m=1-s^2$，可得$m=e^{1-s^2}$，$a=2s-\dfrac{1}{m}=2s-e^{s^2-1}$，$s>0$，设$h(s)=2s-e^{s^2-1}$，$s>0$，$h'(s)=2-2se^{s^2-1}$，由$se^{s^2-1}=1$，且$l(s)=se^{s^2-1}$在$s>0$递增，且$l(1)=1$，可得$s=1$，$s>1$，$h(s)$递减；$0<s<1$时，$h(s)$递增，可得$s=1$处$h(s)$取得极大值，且为最大值1，则$a\le 1$．故选$C$．

法二 显然两个函数为一凹一凸，则两个函数要么外切（共切点），要么无交点，当它们外切时，设切点为$x=m$，$x^2\ge 2mx-m^2\ge\ln x+ax$，且$\ln mx\le mx-1\Leftrightarrow\ln x\le mx-1-\ln m\Leftrightarrow\ln x+ax\le(m+a)x-1-\ln m$即$\begin{cases}m+a=2m\\-1-\ln m=-m^2\end{cases}$即$a^2=\ln ea$有解，$a=1$，当$a<1$时，$\ln x\le x^2-x<x^2-ax$恒成立．故选$C$．

13.【解析】法一 $f(x)=ax-\ln x\ (x>0)$，$f'(x)=a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-1}{x}\quad(x>0)$，

①$a\le 0$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在$(0,e]$上为减函数，此时$f(x)_{\min}=f(e)=ae-1=3$，解得$a=\dfrac{4}{e}>0$（舍）

②$a>0$时，当$0<x<\dfrac{1}{a}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,\dfrac{1}{a})$上为减函数，当$x\ge\dfrac{1}{a}$时，$f'(x)\ge 0$，$f(x)$在$[\dfrac{1}{a},+\infty)$上为增函数．当$0<\dfrac{1}{a}\le e$时，即$a\ge\dfrac{1}{e}$时，$x=\dfrac{1}{a}$为$f(x)$在$(0,e]$上上的极小值点也是最小值点且最小值为$f(\dfrac{1}{a})=1-\ln\dfrac{1}{a}=3$，解得$a=e^2$，当$\dfrac{1}{a}>e$时，即$a<\dfrac{1}{e}$，此时$f(x)$在$(0,e]$上为减函数，$f(x)_{\min}=f(e)=ae-1=3$，解得$a=\dfrac{4}{e}>\dfrac{1}{e}$（舍去），综上所述：$a=e^2$，故选$A$．

法二 同构，$f(x)=ax-\ln x\ge 3\Leftrightarrow a\ge\dfrac{3+\ln x}{x}=e^3\dfrac{\ln e^3x}{e^3x}\ge e^3\dfrac{1}{e}=e^2$，当$e^3x=e$，即$x=e^{-2}$时等号成立，$a=e^2$，

故选 A.

14.【解析】$f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$ 的导数为 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}$，设切点为 (m,n)，可得切线的斜率为 $k=\frac{1}{m}-\frac{a}{m^2}$，由题意可得 $\frac{1}{m}-\frac{a}{m^2}=\frac{\ln m+\frac{a}{m}}{m}$ 有两个不等实根，化为 $2a=m(1-\ln m)$ 有两个不等实根，同构，令 $h(x)=x\ln x$，显然 $-2a=m\ln\frac{m}{e}=e\frac{m}{e}\ln\frac{m}{e}=eh(\frac{m}{e})$，当 $e\cdot(-\frac{1}{e})<-2a<0$ 有两解，$0<2a<1$，即 $0<a<\frac{1}{2}$，故选 A.

15.【解析】法一 设切点为 (m,n)，$f(x)=e^x+b$ 的导数为 $f'(x)=e^x$，可得 $e^m=a$，$a(m+1)=e^m+b$，化为 $b=a\ln a$，可得 $ab=a^2\ln a$，设 $g(a)=a^2\ln a$，$g'(a)=2a\ln a+a=a(2\ln a+1)$，由 $a>\frac{1}{\sqrt{e}}$ 时，$g'(a)>0$，$g(a)$ 递增；当 $0<a<\frac{1}{\sqrt{e}}$ 时，$g'(a)<0$，$g(a)$ 递减，可得 $a=\frac{1}{\sqrt{e}}$ 时，$g(a)$ 取得最小值 $-\frac{1}{2e}$．故选：B.

法二 $e^x+b\geq a(x+1)\Leftrightarrow e^{x-\ln a}+\frac{b}{a}\geq x-\ln a+1+\frac{b}{a}=x+1\Leftrightarrow b=a\ln a$，$ab=a^2\ln a=\frac{1}{2}a^2\ln a^2\geq-\frac{1}{2e}$．故选 B.

16.【解析】法一 设 $f(x)-e^x+x=t$，则 $f(t)=e$，所以 $f(x)=e^x-x+t$，令 $x=t$ 得 $f(t)=e^t-t+t=e$，解得 $t=1$，所以 $f(x)=e^x-x+1$，由题意可知，$e^x-x+1+e^x-1\geq ax$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 $a\leq\frac{2e^x}{x}-1$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，令 $g(x)=\frac{2e^x}{x}-1$，则 $g'(x)=\frac{2e^x(x-1)}{x^2}$，易知 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数，在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，所以 $g(x)_{\min}=g(1)=2e-1$，则 $a\leq 2e-1$，故选 D.

法二 设 $f(x)=e^x-x+m$，$f(m)=e^m-m+m=e\Rightarrow m=1$，由题意可知，$e^x-x+1+e^x-1\geq ax$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 $e^x\geq\frac{(a+1)x}{2}\Leftrightarrow e^x\geq ex\geq\frac{(a+1)x}{2}\Leftrightarrow a\leq 2e-1$，故选 D.

17.【解析】$f'(x)=ae^x-1$，既是函数 $f(x)=ae^x-x-ka(a,k\in R)$ 的一个零点也是一个极值点，

$\begin{cases}ae^{x_0}-x_0-ka=0\\ae^{x_0}-1=0\end{cases}$，$a=e^{-x_0}$，$k=e^{x_0}(1-x_0)$，令函数 $k(x)=e^x(1-x)$，$k'(x)=e^x(-x)$，由 $k'(x)=0$ 得，$x=0$，当 $x>0$ 时，$k'(x)<0$，函数 $k(x)$ 单调递减；当 $x<0$ 时，$k'(x)>0$，函数 $k(x)$ 单调递增，$k(x)\leq k(1)=e^0(1-0)=1$，即 $k\leq 1$，故选 A.

18.【解析】函数 $f(x)=xe^{-ax}-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点，方程 $xe^{-ax}-\frac{1}{x}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个根，方程 $xe^{-ax}-\frac{1}{x}=0$ 可化为方程 $xe^{-ax}=\frac{1}{x}$，即 $e^{-ax}=\frac{1}{x^2}$，再化为 $-ax=\ln\frac{1}{x^2}$，$a=\frac{\ln x^2}{x}$，设函数 $g(x)=\frac{\ln x^2}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，方程 $xe^{-ax}-\frac{1}{x}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个根转化为：函数 $y=a$ 与函数 $g(x)=\frac{\ln x^2}{x}=\frac{2\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个交点，得 $0<a<\frac{2}{e}$，故选 B.

19.【解析】设 $f(x)=3e\ln x$，$g(x)=\frac{2x^3+e^3}{ex}$；当 $x=e$ 时，$f(e)=g(e)=3e$；故 $P(e,3e)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的公共点；可猜测 $y=kx+b$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象在点 P 处的公切线；由 $f(x)=3e\ln x$，可得 $f'(x)=\frac{3e}{x}$，

则 $f'(e)=3$，所以 $f(x)=3e\ln x$ 在点 P 处的切线为 $y=3(x-e)+3e$，即 $y=3x$；同理可得 $g(x)=\dfrac{2x^3+e^3}{ex}$ 在点 P 处的切线为：$y=3x$；下面证明：$3e\ln x\le 3x\le \dfrac{2x^3+e^3}{ex}$；设 $h(x)=3x-3e\ln x$，则 $h'(x)=3-\dfrac{3e}{x}=\dfrac{3(x-e)}{x}$；可知 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递减，在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)\ge h(e)=0$，即 $3e\ln x\le 3x$ 对任意 $x>0$ 恒成立；同理可证 $3x\le\dfrac{2x^3+e^3}{ex}$ 对任意 $x>0$ 恒成立，所以 $k=3$，$b=0$；即 $k+b=3$；故选 C．

20．【解析】法一：设切点 (x_1,kx_1+b)，(x_2,kx_2+b)，由题意得 $k=\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{x_2+1}$，所以 $x_1=x_2+1$，切线方程分别可以表示为：$y=\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)+\ln 2x_1=\dfrac{1}{x_1}\cdot x+\ln 2x_1-1$，$y=\dfrac{1}{x_2+1}(x-x_2)+\ln(x_2+1)=\dfrac{1}{x_1}\cdot x+\ln x_1-\dfrac{x_1-1}{x_1}$，所以有 $\ln 2x_1-1=\ln x_1-\dfrac{x_1-1}{x_1}$，解得 $\dfrac{1}{x_1}=\ln 2$，即 $k=\ln 2$．故选 A．

法二 $kx+b\le\ln 2x=\ln 2+\ln x\Leftrightarrow \ln x\le kx+b-\ln 2\Leftrightarrow \ln(x+1)\le kx+k+b-\ln 2=kx+b\Leftrightarrow k=\ln 2$．故选 A．

21．【解析】法一 函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}+\ln x-1$，$f'(x)=-\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-a}{x^2}$，$x>0$，当 $a\le 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{x-a}{x^2}>0$ 恒成立，$f(x)$ 是增函数，$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，$f(1)=a-1<0$，函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}+\ln x-1$ 有且仅有一个零点；当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得：$x>a$，令 $f'(x)<0$，解得：$x<a$，故 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 递减，在 $(a,+\infty)$ 递增，故只需 $f(x)_{\min}=f(a)=\ln a=0$，解得 $a=1$，综上：实数 a 的取值范围为 $(-\infty,0]\cup\{1\}$．故选 A．

法二：$a=x(1-\ln x)\Leftrightarrow -a=x\ln\dfrac{x}{e}=e\cdot\dfrac{x}{e}\ln\dfrac{x}{e}$，同构，$h(x)=x\ln x$，$-a=e\cdot h(\dfrac{x}{e})$，故 $-a=-1$，或者 $-a>0$ 时 $-a=eh(\dfrac{x}{e})$ 是一一对应，a 的取值范围为 $(-\infty,0]\cup\{1\}$．故选：A．

22．【解析】法一 函数 $f'(x)=x+2a$，$g'(x)=\dfrac{3a^2}{x}$，由 $f'(x)=x+2a=3a$，$g'(x)=\dfrac{3a^2}{x}=3a$，得对应切点横坐标 $x=a$，$f(a)=\dfrac{5}{2}a^2-2b$，$g(a)=3a^2\ln a$，则直线 l 与 $f(x)$ 相切的切线方程为 $y-(\dfrac{5}{2}a^2-2b)=3a(x-a)$，即 $y=3a(x-a)+(\dfrac{5}{2}a^2-2b)$，直线 l 与 $g(x)$ 相切的切线方程为 $y-(3a^2\ln a)=3a(x-a)$，即 $y=3a(x-a)+(3a^2\ln a)$，则切线相同即 $\dfrac{5}{2}a^2-2b=3a^2\ln a$，即 $2b=\dfrac{5}{2}a^2-3a^2\ln a$，得 $b=\dfrac{5}{4}a^2-\dfrac{3}{2}a^2\ln a$，$a>0$，设 $h(a)=\dfrac{5}{4}a^2-\dfrac{3}{2}a^2\ln a$，$a>0$，则 $h'(a)=\dfrac{5}{2}a-\dfrac{3}{2}(2a\ln a+\dfrac{a^2}{a})=\dfrac{5}{2}a-3a\ln a-\dfrac{3}{2}a=a-3a\ln a=a(1-3\ln a)$，由 $h'(a)=a(1-3\ln a)=0$ 得 $1-3\ln a=0$，得 $\ln a=\dfrac{1}{3}$，即 $a=e^{\frac{1}{3}}$，此时函数 $h(a)$ 取得极大值，$h(e^{\frac{1}{3}})=\dfrac{5}{4}(e^{\frac{1}{3}})^2+\dfrac{3}{2}(e^{\frac{1}{3}})^2\ln e^{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}e^{\frac{2}{3}}$，即 $b\le\dfrac{3}{4}e^{\frac{2}{3}}$，故选 A．

法二 根据 $x^2\ge 2ax-a^2$，切点为 $x=a$，根据切线求和定理，满足斜率为 $3a(a>0)$ 的直线 l 与 $f(x)$ 相切时，$\dfrac{1}{2}x^2+2ax-2b\ge\dfrac{1}{2}(2ax-a^2)+2ax-2b=3ax-\dfrac{a^2}{2}-2b\ge 3a^2\ln x\Leftrightarrow\dfrac{x}{a}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{2b}{3a^2}\ge\ln\dfrac{x}{a}+\dfrac{5}{6}-\dfrac{2b}{3a^2}=\ln x$，故

$2b=\frac{5}{2}a^2-3a^2\ln a\Leftrightarrow -\frac{4}{3}b=-\frac{5}{3}a^2+a^2\ln a^2=a^2\ln\frac{a^2}{e^{\frac{5}{3}}}$，同构，$h(x)=x\ln x\ge h(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$恒成立，

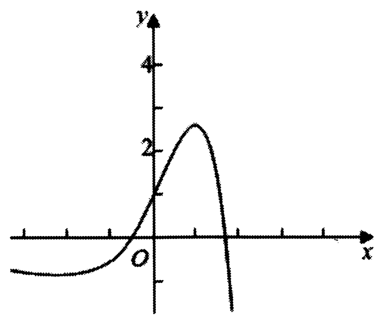
$-\frac{4}{3}b=a^2\ln\frac{a^2}{\sqrt[3]{e^5}}=\sqrt[3]{e^5}\cdot\frac{a^2}{\sqrt[3]{e^5}}\ln\frac{a^2}{\sqrt[3]{e^5}}=\sqrt[3]{e^5}h(\frac{a^2}{\sqrt[3]{e^5}})\ge\sqrt[3]{e^5}\cdot(-\frac{1}{e})=-e^{\frac{2}{3}}$，故$b\le\frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}}$，故选$A$．

23.【解析】①当$a=0$时，$f(x)=e^x>0\ge0$，满足题意，②当$a<0$时，$e^x-a>0$，$\exists x_0\in(-\frac{1}{ae},+\infty)$，$ax+\frac{1}{e}<0$，故$f(x)\ge0(x\in R)$不恒成立，③当$a>0$时，设$g(x)=e^x-a$，$h(x)=ax+\frac{1}{e}$，令$g(x)=e^x-a=0$，得$x=\ln a$，$h(x)=ax+\frac{1}{e}=0$，得$x=-\frac{1}{ae}$，下面考查 方程$\ln a=-\frac{1}{ae}$的解的个数，$a\ln a=-\frac{1}{e}$有一解，又$g(x)=e^x-a$，$h(x)=ax+\frac{1}{e}$均为增函数，所以存在1个$a$使得$f(x)\ge0(x\in R)$成立，综合①②③得：满足条件的$a$的个数是2个，故选$C$．

24.【解析】法一：$y=2a\ln x$的导数为$y'=\frac{2a}{x}$，由于直线$y=2x+b$是曲线$y=2a\ln x$的切线，设切点为(m,n)，则$\frac{2a}{m}=2$，$m=a$，又$2m+b=2a\ln m$，$b=2a\ln a-2a(a>0)$，$b'=2(\ln a+1)-2=2\ln a$，当$a>1$时，$b'>0$，函数b递增，当$0<a<1$时，$b'<0$，函数b递减，$a=1$为极小值点，也为最小值点，b的最小值为：$2\ln1-2=-2$．故选D．

法二 $2x+b\ge2a\ln x\Leftrightarrow\frac{x}{a}+\frac{b}{2a}\ge\ln\frac{x}{a}+1+\frac{b}{2a}=\ln x\Leftrightarrow b=2a(\ln a-1)=2e\cdot\frac{a}{e}\ln\frac{a}{e}\ge2e\cdot(-\frac{1}{e})=-2$．故选$D$．

25.【解析】设直线$y=ax+b$与曲线$y=xe^x$相切于$M(m,me^m)$，由$y=xe^x$导数为$y'=(x+1)e^x$，可得切线的斜率为$(m+1)e^m=a$，又$am+b=me^m$，可得$b=me^m-am=-m^2e^m$，$a+b=e^m(m+1-m^2)$，由$f(m)=e^m(m+1-m^2)$，$f'(m)=e^m(2-m-m^2)$，当$m>1$或$m<-2$时，$f'(m)<0$，$f(m)$递减；当$-2<m<1$时，$f'(m)>0$，$f(m)$递增．即有$f(m)$在$m=-2$处取得极小值$-5e^{-2}$，由图象得$m=1$处取得最大值e．则$a+b\le e$．故选D．



26.【解析】法一 函数$f(x)=ae^x$，$g(x)=ea\ln x+b$，$f'(x)=ae^x$，$g'(x)=\frac{ae}{x}$，设切点分别为(t,ae^t)，$(m,ae\ln m+b)$，与$f(x)$，$y=g(x)$相切的直线方程为$y-ae^t=ae^t(x-t)$，$y-ae\ln m-b=\frac{ae}{m}(x-m)$，由题意存在一条直线与曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$均相切可得$ae^t=\frac{ae}{m}$，且$b=(1-t)ae^t-ae\ln m+ae$，$ae^t=\frac{ae}{m}$，

已知$a\ne0$，$\frac{b}{a}=(1-t)e^t-e\ln m+e=(1-t)e^t-e(1-t)+e=e^t+et-te^t$，令

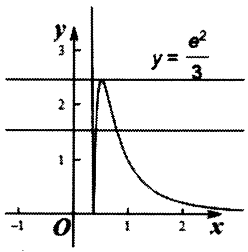
$h(t)=(1-t)e^t-e\ln m+e=(1-t)e^t-e(1-t)=e^t+et-te^t$，$h'(t)=-te^t+e$，当$t=1$时，$h'(t)=-te^t+e=0$，

当 $t<1$ 时，$h'(t)=-te^t+e>0$，$h(t)$ 是单调递增函数．当 $t>1$ 时，$h'(t)=-te^t+e<0$，$h(t)$ 是单调递减函数．$h(t)=e^t+et-te^t$ 在当 $t=1$ 时取得最大值为 $h(1)=e^t+et-te^t=e$，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围：$\dfrac{b}{a}\le e$，故选：A．

法二 根据两函数一凹一凸，故两函数只能外切或者没有交点，即满足 $ae^x\ge ea\ln x+b\Leftrightarrow e^x\ge e\ln x+\dfrac{b}{a}$，即 $e^x-\dfrac{b}{a}\ge e\ln x$，零点比大小（参考秒 1）当 $b>0$ 时，$x_1=\ln\dfrac{b}{a}\le x_2=1\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}\le e$，当 $b\le 0$ 时也成立，故选 A．

27.【解析】法一：函数的定义域为 $(0,+\infty)$，由函数 $y=|\dfrac{\ln x+1}{ax^2}|-ax$ 有三个零点，得 $\dfrac{|\ln x+1|}{|a|x^2}=ax$，有三个根，则必有 $a>0$，即 $\dfrac{|1+\ln x|}{ax^2}=ax$，则 $\dfrac{|1+\ln x|}{x^3}=a^2$，有三个根，设 $h(x)=\dfrac{|1+\ln x|}{x^3}=\begin{cases}\dfrac{1+\ln x}{x^3}, & x\ge\dfrac{1}{e}\\ -\dfrac{1+\ln x}{x^3}, & 0<x<\dfrac{1}{e}\end{cases}$，

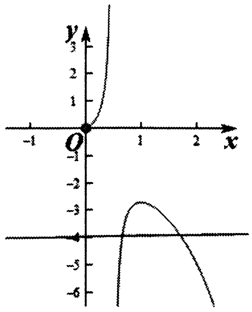
则 $x\ge\dfrac{1}{e}$ 时，$h'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x^3-(1+\ln x)\cdot 3x^2}{x^6}=\dfrac{1-3-3\ln x}{x^4}=\dfrac{-2-3\ln x}{x^4}$，由 $h'(x)>0$ 得 $-2-3\ln x>0$ 得 $\ln x<-\dfrac{2}{3}$，得 $\dfrac{1}{e}\le x<e^{-\frac{2}{3}}$，此时为增函数，由 $h'(x)<0$ 得 $-2-3\ln x<0$ 得 $\ln x>-\dfrac{2}{3}$，得 $x>e^{-\frac{2}{3}}$，此时为减函数，此时 $x=e^{-\frac{2}{3}}$ 取得极大值，极大值为 $h(e^{-\frac{2}{3}})=\dfrac{1+\ln e^{-\frac{2}{3}}}{(e^{-\frac{2}{3}})^3}=\dfrac{1-\frac{2}{3}}{e^{-2}}=\dfrac{e^2}{3}$，当 $x\to+\infty$，$f(x)\to 0$，$h(\dfrac{1}{e})=0$，当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$h(x)=-\dfrac{1+\ln x}{x^3}$，则 $h'(x)=-\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x^3-(1+\ln x)\cdot 3x^2}{x^6}=-\dfrac{1-3-3\ln x}{x^4}=-(\dfrac{-2-3\ln x}{x^4})=\dfrac{2+3\ln x}{x^4}$，当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$lnx<-1$，则 $2+3\ln x<2-3=-1<0$，即此时 $h'(x)<0$，且 $h(\dfrac{1}{e})=0$，作出函数 $h(x)$ 的图象如图：要使 $\dfrac{|1+\ln x|}{x^3}=a^2$，有三个根，即 $h(x)=\dfrac{|1+\ln x|}{x^3}$，与 $y=a^2$，有三个不同的交点，则满足 $0<a^2<\dfrac{e^2}{3}$，即 $0<a<\dfrac{\sqrt{3}e}{3}$，即实数 a 的取值范围是 $(0,\dfrac{\sqrt{3}e}{3})$．故选 D．



法二 $y=|\dfrac{\ln x+1}{ax^2}|-ax=0\Leftrightarrow|\dfrac{\ln x+1}{x^3}|=a^2\Leftrightarrow|\dfrac{\ln ex}{x^3}|=\dfrac{e^3}{3}|\dfrac{\ln e^3x^3}{e^3x^3}|=a^2$，同构，易知 $h(x)=\left|\dfrac{\ln x}{x}\right|\in(0,\dfrac{1}{e})$ 时，有三个零点，故 $a^2=\dfrac{e^3}{3}h(e^3x^3)\in(0,\dfrac{e^2}{3})$ 时，即 $0<a<\dfrac{\sqrt{3}e}{3}$，故选 D．

28.【解析】法一 函数的导数 $f'(x)=e^x-\dfrac{m+1}{x}+2(m+1)$，$x>0$，因为函数 $f(x)$ 恰有两个极值点，所以函

数 $f'(x)$ 有两个不同的零点．令 $f'(x)=e^x-\dfrac{m+1}{x}+2(m+1)=0$，得 $\dfrac{xe^x}{1-2x}=m+1$ 有两个不同的实数根，记：$h(x)=\dfrac{xe^x}{1-2x}$，所以 $h'(x)=\dfrac{(xe^x)'(1-2x)-xe^x(1-2x)'}{(1-2x)^2}=-\dfrac{e^x(2x+1)(x-1)}{(1-2x)^2}$，当 $x\in(0,\dfrac{1}{2})$ 时，$h'(x)>0$，此时函数 $h(x)$ 在此区间上递增，当 $x\in(\dfrac{1}{2},1)$ 时，$h'(x)>0$，此时函数 $h(x)$ 在此区间上递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，此时函数 $h(x)$ 在此区间上递减，即当 $x=1$ 时，$h(x)$ 取得极大值 $h(1)=-e$，作出 $h(x)$ 的简图如下：要使得 $h(x)=m+1$ 有两个不同的实数根，则 $m+1<-e$，即 $m<-e-1$．故选 D．



法二 令 $f'(x)=e^x-\dfrac{m+1}{x}+2(m+1)=0$，$xe^x=-2(m+1)x+(m+1)=-(m+1)(2x-1)$ 有两个不同的实数根，根据 $y=xe^x$ 在 $x=1$ 处切线式 $xe^x\geq 2ex-e=e(2x-1)$，故 $-(m+1)(2x-1)\geq e(2x-1)\Leftrightarrow m<-e-1$ 时，有两个交点．故选 D．

30.【解析】法一：函数的导数 $f'(x)=(e-a)e^x+1$，若 $e-a\geq 0$，可得 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 为增函数，当 $x\to+\infty$，$f(x)\to+\infty$，不满足 $f(x)\leq 0$ 对任意 $x\in R$ 恒成立；若 $e-a<0$，由 $f'(x)=0$，得 $e^x=\dfrac{1}{a-e}$，则 $x=\ln\dfrac{1}{a-e}$，当 $x<\ln\dfrac{1}{a-e}$，时，$f'(x)>0$，当 $x>\ln\dfrac{1}{a-e}$ 时，$f'(x)<0$，

$f(x)_{\max}=f(\ln\dfrac{1}{a-e})=(e-a)e^{\ln\frac{1}{a-e}}-ma+\ln\dfrac{1}{a-e}=-1-ma+\ln\dfrac{1}{a-e}$，若 $f(x)\leq 0$ 对任意 $x\in R$ 恒成立，则 $-1-ma+\ln\dfrac{1}{a-e}\leq 0$ $(a>e)$ 恒成立，若存在实数 a，使得 $-1-ma+\ln\dfrac{1}{a-e}\leq 0$ 成立，则 $ma\geq -1+\ln\dfrac{1}{a-e}$，

$m\geq -\dfrac{1}{a}-\dfrac{\ln(a-e)}{a}$，$(a>e)$，令 $F(a)=-\dfrac{1}{a}-\dfrac{\ln(a-e)}{a}$，则 $F'(a)=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{\dfrac{a}{a-e}-\ln(a-e)}{a^2}=\dfrac{(a-e)\ln(a-e)-e}{a^2(a-e)}$．

当 $a<2e$ 时，$F'(a)<0$，当 $a>2e$ 时，$F'(a)>0$，则 $F(a)_{\min}=F(2e)=-\dfrac{1}{e}$．$m\geq -\dfrac{1}{e}$．则实数 m 的取值范围是 $[-\dfrac{1}{e},+\infty)$．故选 A．

法二显然 $a>0$，否则 $e^{x+1}+x\leq 0$ 不可能恒成立，利用逆否命题，若对于任意实数 $a>0$，存在 $x\in R$ 使 $f(x)>0$ 成立，构造 $g(a)=x+e^{x+1}-a(e^x+m)>0$，则 $\begin{cases}e^x+m<0\\x+e^{x+1}>0\end{cases}$ 恒成立，故 $\begin{cases}x>-1\\m<-e^{-1}\end{cases}$，由于此命题和原命题互为逆否命题，故原命题需要满足：$m\geq -\dfrac{1}{e}$．故选 A．

31．【解析】设直线 $y=ax+b$ 与曲线 $f(x)=\ln x-(n-2)$ 相切于点 (x_0,y_0)．$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$(x>0)$．

则 $f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}=a$，$ax_0+b=\ln x_0-(n-2)$．可得：$b=-\ln a-n+1$．$ab=-a\ln a+a(1-n)$，

令 $g(a)=-a\ln a+a(1-n)$．$n\in N_+$，$a>0$．$g'(a)=-\ln a-n$，可得 $a=e^{-n}$ 时，函数 $g(a)$ 取得极大值即最大值，$g(e^{-n})=\dfrac{1}{e^n}=c_n$，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{\frac{1}{e}(1-\frac{1}{e^n})}{1-\frac{1}{e}}=\dfrac{1-\frac{1}{e^n}}{e-1}<\dfrac{1}{e-1}$，$S_3=\dfrac{1-\frac{1}{e^3}}{e-1}=\dfrac{1+e+e^2}{e^3}$，可知 A，B，D 错误．因此只有 C 正确．故选 C．

32.【解析】当 $x\geq 0$ 及 $m>0$ 时，$x+m>x$，由不等式 $f(x+m)<f(x)$ 恒成立，得 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减；又 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，$f(x)$ 在 R 上单调性一致，是减函数；由不等式 $f(2e^x-ax)-f(e^x+b)\leq 0$，得 $f(2e^x-ax)\leq f(e^x+b)$，即 $2e^x-ax\geq e^x+b$，所以 $e^x\geq ax+b\Leftrightarrow e^{x-\ln a}\geq x-\ln a+1=x+\dfrac{b}{a}\Leftrightarrow b=a(1-\ln a)$，则 $ab=-a^2\ln\dfrac{a}{e}=-\dfrac{e^2}{2}\dfrac{a^2}{e^2}\ln\dfrac{a^2}{e^2}\leq\dfrac{e}{2}$，当 $a=\sqrt{e}$ 时，取得最大值为 $\dfrac{e}{2}$，故选 C．

33.【解析】法一：$\ln(x+1)+e^x\geq ax+b$ 对任意的 $x\geq 0$ 恒成立，若 $a=0$，$b=2$ 可得 $\ln(x+1)+e^x\geq 2$，当 $x=0$ 时，$1\geq 2$ 不成立；若 $a=1$，$b=2$ 可得 $\ln(x+1)+e^x\geq x+2$，当 $x=0$ 时，$1\geq 2$ 不成立；若 $a=3$，$b=1$ 可得 $\ln(x+1)+e^x\geq 3x+1$，当 $x=1$ 时，$ln2+e\geq 4$ 不成立；若 $a=2$，$b=1$ 可得 $\ln(x+1)+e^x\geq 2x+1$，设 $f(x)=\ln(x+1)+e^x-2x-1$，$x\geq 0$，可得 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+e^x-2$，$f''(x)=e^x-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ 在 $x\geq 0$ 递增，可得 $f''(x)\geq 0$，即 $f'(x)$ 递增，可得 $f'(x)\geq 0$，$f(x)$ 递增，即 $f(x)\geq f(0)=0$，则 $a=2$，$b=1$ 成立．故选 D．

法二　$\ln(x+1)+e^x\geq ax+b\Leftrightarrow e^x-x-1-x+\ln(x+1)+(2-a)x+1-b\geq 0$，切线同构 $h(x)=e^x-x-1\geq 0$，且 $x\geq\ln(x+1)$，$e^x-x-1-x+\ln(x+1)+(2-a)x+1-b=h(x)-h(\ln(x+1))+(2-a)x+1-b\geq 0$，故 $a=2$，$b=1$ 成立．故选 D．

34.【解析】法一：设切点 $P(x_0,y_0)$，则 $y_0=x_0$，$y_0=2\ln(x_0+m)$，又 $y'|_{x=x_0}=\dfrac{2}{x_0+m}=1$，$x_0+m=2$，$y_0=2\ln 2$，$x_0=2\ln 2$，$m=2-2\ln 2$．故答案为：$2-2\ln 2$．

法二　$x\geq 2\ln(x+m)\Leftrightarrow\dfrac{x}{2}\geq\ln(x+m)\Leftrightarrow\dfrac{x-m}{2}\geq\ln x\Leftrightarrow\dfrac{x}{2}-\dfrac{m}{2}\geq\ln\dfrac{x}{2}+1-\dfrac{m}{2}=\ln x\Leftrightarrow-\ln 2+1=\dfrac{m}{2}$．

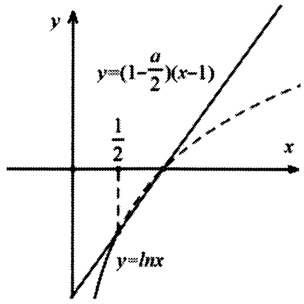
35.【解析】法一：求导函数，$y'=\ln x+1$，当 $x=e$ 时，$y'=2$，曲线 $y=x\ln x$ 在点 (e,e) 处的切线方程为 $y-e=2(x-e)$，即 $y=2x-e$，故答案为：$y=2x-e$．

法二　$x\ln x\geq x-1\Leftrightarrow\dfrac{x}{e}\ln\dfrac{x}{e}\geq\dfrac{x}{e}-1\Leftrightarrow x(\ln x-1)\geq x-e\Leftrightarrow x\ln x\geq 2x-e$．

36.【解析】法一：因为函数 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上无零点即 $f(x)<0$ 或 $f(x)>0$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上恒成立，但是 $f(x)<0$ 恒成立不可能，故只有 $f(x)=(2-a)(x-1)-2\ln x>0$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上恒成立，即 $a>2-\dfrac{2\ln x}{x-1}$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上恒成立；令 $h(x)=2-\dfrac{2\ln x}{x-1}$，$x\in(0,\dfrac{1}{2})$，则 $h'(x)=\dfrac{2\ln x+\frac{2}{x}-2}{(x-1)^2}$，令 $m(x)=2\ln x-2+\dfrac{2}{x}$，$x\in(0,\dfrac{1}{2})$，则 $m'(x)=\dfrac{-2(1-x)}{x^2}$，易得，$m(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上单调递减，则可得 $m(x)>m(\dfrac{1}{2})=-2\ln 2+2>0$，即 $h'(x)>0$，

$h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递增，$h(x)<h(\frac{1}{2})=2-4\ln 2$，故 $a\ge 2-4\ln 2$，即 a 的最小值 $2-4\ln 2$．故答案为：$2-4\ln 2$．

法二 $f(x)>0$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上恒成立，即 $(1-\frac{a}{2})(x-1)>\ln x$，如图，过点 $(1,0)$ 直线始终在 $y=\ln x(x\in(0,\frac{1}{2}))$ 上方，即 $x=\frac{1}{2}$ 为零界点，$(1-\frac{a}{2})(\frac{1}{2}-1)>\ln\frac{1}{2}$，即 a 的最小值 $2-4\ln 2$．故答案为 $2-4\ln 2$．



37.【解析】法一 $f(x)=\ln x$ 的导数为 $f'(x)=\frac{1}{x}$，$g(x)=ax^2-x$ 的导数为 $g'(x)=2ax-1$，设 $P(x_0,y_0)$，则 $lnx_0=ax_0^2-x_0$①，$f'(x_0)=g'(x_0)$，即 $\frac{1}{x_0}=2ax_0-1$，化简得 $1=2ax_0^2-x_0$②，联立①②消 a 得，$\ln x_0=\frac{1-x_0}{2}$，令 $\varphi(x)=\ln x-\frac{1-x}{2}$，$\varphi'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}>0$，易知 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $\varphi(1)=0$，所以 $\varphi(x)=\ln x-\frac{1-x}{2}$ 有唯一解 1，即 $x_0=1$，则 $y_0=f(1)=0$，$a=1$．故 $P(1,0)$，切线的斜率为 1，切线的方程为 $y=x-1$．故答案为：$y=x-1$．

法二 $\ln x=ax^2-x\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}\le x-1=ax-1\Leftrightarrow a=1$，切线的方程为 $y=x-1$．故答案为 $y=x-1$．

38.【解析】法一 令 $f(x_1)=g(x_2)=t$，则 $e^{x_1}=a\sqrt{x_2}=t$，$x_1=\ln t$，$x_2=\frac{t^2}{a^2}$，令 $h(t)=x_2-x_1=\ln t-\frac{t^2}{a^2}$，则 $h'(t)=\frac{2t}{a^2}-\frac{1}{t}$，令 $h'(t)=0$，则 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}a$；$h(t)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a)$ 内单调递减，在 $(\frac{\sqrt{2}}{2}a,+\infty)$ 内单调递增；$h(t)_{\min}=h(\frac{\sqrt{2}}{2}a)=\frac{1}{2}-\ln(\frac{\sqrt{2}a}{2})=\frac{\ln 2}{2}$，$a=\sqrt{e}$；故答案为：$\sqrt{e}$．

法二 反函数构造，$x_2-x_1=g^{-1}(x)-f^{-1}(x)=\frac{x^2}{a^2}-\ln x\ge\frac{\ln 2}{2}$，令 $t=x^2$，则 $\frac{2t}{a^2}-\ln 2\ge\ln\frac{2t}{a^2}+1-\ln 2=\ln t$，即 $\ln a^2=1$，$a=\sqrt{e}$；故答案为：$\sqrt{e}$．

39.【解析】法一 恰有两条不同的直线与曲线 $y=e^{x-2}$ 和 $x^2=2py$ 都相切，可得 $y=e^{x-2}$ 和 $x^2=2py$ 在第一象限有两个不同的交点，即为 $2p=\frac{x^2}{e^{x-2}}$，设 $f(x)=\frac{x^2}{e^{x-2}}$，$f'(x)=\frac{x(2-x)}{e^{x-2}}$，可得 $0<x<2$ 时，$f(x)$ 递减；$x>2$ 或 $x<0$ 时，$f(x)$ 递增，即有 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=0$，极大值为 $f(2)=4$，则 $0<2p<4$，可得 $0<p<2$．故答案为：$0<p<2$．

法二 显然 $p>0$，根据题意可得，两个凹函数有两条公切线，则 $e^{x-2}=\frac{x^2}{2p}$ 有两个交点，$e^x\ge\frac{e^2}{4}x^2$，故 $\frac{x^2}{2p}\cdot e^2>\frac{e^2}{4}x^2\Leftrightarrow p<2$，故答案为：$0<p<2$．

40.【解析】$f(x)=e^x-lnx-2$，$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$设$g(x)=xe^x-1$，$x\in(0,+\infty)$，$g'(x)=e^x+xe^x>0$恒成立，函数$g(x)=xe^x-1$，在$(0,+\infty)$上单调递增，又$g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\times e^{\frac{1}{2}}-1=\frac{\sqrt{e}}{2}-1<0$，$g(1)=e-1>0$，存在唯一$x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得$g(x_0)=0$，$f(x)$有且仅有一个极值点，当$x\in(\frac{1}{2},x_0)$时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减；当$x\in(x_0,1)$时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，$x_0$是$f(x)$的极小值点，且满足$x_0\in(\frac{1}{2},1)$，$g(x_0)=x_0e^{x_0}-1=0$，$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$x_0=\ln\frac{1}{x_0}=-\ln x_0$，$f(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=\frac{1}{x_0}+x_0-2$，对勾函数$y=x+\frac{1}{x}$在$(\frac{1}{2},1)$上单调递减，$2<x_0+\frac{1}{x_0}<2+\frac{1}{2}$，$0<f(x_0)<\frac{1}{2}$，函数$f(x)$恒大于0，无零点，综上所述：正确的是①③.

41.【解析】(1)设直线$y=x$和$y=f(x)$相切于点$P(x_0,2\ln(ax_0+b))$，$f'(x)=\frac{2a}{ax+b}$，则$f'(x_0)=\frac{2a}{ax_0+b}=1$，故$ax_0+b=2a(a>0)$，又$P$在切线$y=x$上，故$2\ln(ax_0+b)=x_0$，故$x_0=2\ln(ax_0+b)=2\ln 2a$，$b=2a-ax_0=2a-2a\ln 2a$，故$ab=2a^2-2a^2\ln 2a(a>0)$，设$g(a)=2a^2-2a^2\ln 2a(a>0)$，则由$g'(a)=2a(1-2\ln 2a)>0$，解得：$0<a<\frac{\sqrt{e}}{2}$，故$g(a)$在$(0,\frac{\sqrt{e}}{2})$递增，在$(\frac{\sqrt{e}}{2},+\infty)$递减，故$g(a)_{\max}=g(\frac{\sqrt{e}}{2})=\frac{e}{4}$，故$ab$的最大值是$\frac{e}{4}$；(同构方法请读者自己去完成吧)

(2)法一：原方程即为$2\ln(ax+1)=(ax+1)^2+a(ax+1)$，设$ax+1=t$，则上述方程等价于$2\ln t=t^2+at(t>0)$，设$p(t)=2\ln t-t^2-at(t>0)$，则函数$p(t)$要有2个不同的零点，$p'(t)=\frac{2}{t}-2t-a$在$(0,+\infty)$递减，且$p'(t)=0$在$(0,+\infty)$上存在唯一实根$t_0$，即$p'(t_0)=0$，即$at_0=2-2t_0^{\ 2}$，故当$t\in(0,t_0)$时，$p'(t)>0$，当$t\in(t_0,+\infty)$时，$p'(t)<0$，故$p(t)$在$t\in(0,t_0)$递增，在$(t_0,+\infty)$递减，若$a>0$，则$t_0\in(0,1)$，$p(t)\le p(t_0)=2\ln t_0-t_0^{\ 2}-(2-2t_0^{\ 2})=2\ln t_0+t_0^{\ 2}-2<0$，不合题意，舍，

若$a<0$，则$t_0\in(1,+\infty)$，当$t\in(0,1)$时，则$p(t)=2\ln t-t^2-at<2\ln t+|a|$，取$t_1=e^{-\frac{|a|}{2}}$，则$p(t_1)<0$，当$t\in(1,+\infty)$时，则$p(t)=2\ln t-t^2-at<2(t-1)-t^2-at<-t^2+(2-a)t$，取$t_2=2+|a|$，则$p(t_2)<0$，由此$t_1<t_0<t_2$，且$p(t_1)<0$，$p(t_2)<0$，要使函数$p(t)=2\ln t-t^2-at(t>0)$有2个不同的零点，则只需$p(t_0)=2\ln t_0-t_0^{\ 2}-at_0>0$，故只需$p((t_0)=2\ln t_0-t_0^{\ 2}-(2-2t_0^{\ 2})=t_0^{\ 2}+2\ln t_0-2>0$，$p(t_0)=t_0^{\ 2}+2\ln t_0-2$是关于$t_0$的增函数，且$p(1)=-1<0$，$p(\frac{5}{4})=2\ln\frac{5}{4}-\frac{7}{16}>0$，故存在$m\in(1,\frac{5}{4})$使得$p(m)=0$，故当$t_0>m$时，$p(t_0)>0$，$a=\frac{2}{t_0}-2t_0$是关于$t_0$的减函数，故$a=\frac{2}{t_0}-2t_0<\frac{2}{m}-2m$，又$\frac{2}{m}-2m\in(-\frac{9}{10},0)$，故$a$的最大整数值是$-1$.

法二　$2\ln t=t^2+at(t>0)$，要有2个不同的零点，即$h(t)=\frac{\ln t}{t}=\frac{t+a}{2}$有两个交点，由于$h(1)=0$，故$a\le -1$时，$y=\frac{t+a}{2}$与$h(t)$一定有两个交点，当$a\ge 0$时，$\frac{t+a}{2}\ge\frac{t}{2}$，构造$F(x)=\frac{h(t)}{\frac{t}{2}}=2\frac{\ln t}{t^2}=\frac{\ln t^2}{t^2}\le\frac{1}{e}$，故$h(t)=\frac{t}{2}$

无交点，故 a 的最大整数值是 -1.

42.【解析】(1) 设过点 $P(0,-1)$ 的直线与曲线 $f(x)$ 相切于点 $(x_0,\ln x_0)$，因为 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，所以在 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程为 $y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，将 $p(0,-1)$ 代入切线方程得 $\ln x_0=0$，所以 $x_0=1$，所以切线方程为 $y=x-1$.

(2) 假设存在实数 $k\neq1$，使得只有唯一的正数 a，当 $x>0$ 时，不等式 $f(x+\dfrac{1}{a})g(x)\leq k(x+\dfrac{1}{a})$ 恒成立，

即 $(a+\dfrac{1}{x})\ln(x+\dfrac{1}{a}))\leq k(x+\dfrac{1}{a})$ 恒成立，取 $x=1$，可知 $k>0$，因为 $x>0$，$a>0$，所以 $\dfrac{kx}{a}-\ln(x+\dfrac{1}{a})\geq0$，

令 $m(x)=\dfrac{kx}{a}-\ln(x+\dfrac{1}{a})(x>0)$，则 $m'(x)=\dfrac{k}{a}-\dfrac{a}{ax+1}=\dfrac{akx-a^2+k}{a(ax+1)}$ 由 $m'(x_0)=0$，得 $x_0=\dfrac{a^2-k}{ak}$

$(1°)$ 当 $0<k<a^2$ 时，$x\in(0,x_0)$ 时，$m'(x_0)<0$，则 $m(x)$ 在 $(\dfrac{1}{a},x_0)$ 上为减函数，

$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$m'(x_0)>0$，则 $m(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上为增函数，则 $m(x)_{\min}=m(x_0)=1-\dfrac{k}{a^2}-\ln\dfrac{a}{k}\geq0$，

即 $\dfrac{k}{a^2}+\ln\dfrac{a}{k}\leq1$，令 $h(a)=\dfrac{k}{a^2}+\ln\dfrac{a}{k}(a>\sqrt{k})$，则 $h'(a)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{2k}{a^3}=\dfrac{a^2-2k}{a^3}$，由 $h'(a_0)=0$，得 $a_0=\sqrt{2k}(a>\sqrt{k})$，$a\in(\sqrt{k},a_0)$ 时，$h'(a)<0$，则 $h(a)$ 在区间 $(\sqrt{k},a_0)$ 上为减函数，$a\in(a_0,+\infty)$ 时，$h'(a)>0$，则 $h(a)$ 在区间 $(a_0,+\infty)$ 上为增函数，因此存在唯一的正数 $a>\sqrt{k}$，使得 $h(a)\leq1$，故只能 $h(a)_{\min}=1$，所以 $h(a)_{\min}=h(a_0)=\dfrac{1}{2}+ln\sqrt{\dfrac{2}{k}}=1$，所以 $k=\dfrac{2}{e}$，此时 a 只有唯一值 $\dfrac{2\sqrt{e}}{e}$.

$(2°)$ 当 $k\geq a^2$ 时，$m'(x_0)>0$，所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}m(x)=\ln a\geq0$，则 $a\geq1$，故 $k>1$，所以满足 $1\leq a\leq\sqrt{k}$ 的 a 不唯一，综上，存在实数 $k=\dfrac{2}{e}$，a 只有唯一值 $\dfrac{2\sqrt{e}}{e}$，当 $x>0$ 时，恒有原式成立.

（同构法+切线放缩法参考例题）

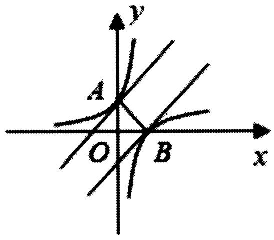
43.(1)【解析】由 $f(x)=e^x$，得 $f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线为 $y=x+1$，又 $g(x)=\ln x$，则 $g(x)$ 在点 $(1,0)$ 的切线为 $y=x-1$，由于 $f(x)=e^x$ 与 $g(x)=\ln x$ 互为反函数，即函数图象关于 $y=x$ 对称，如图，故而 A，B 两点间的距离的最小值即为 $(0,1)$ 与 $(1,0)$ 之同的距离，A，B 两点间的距离的最小值为 $\sqrt{2}$；

(2) 证明：设 $A(x_1,e^{x_1})$，$B(x_2,\ln x_2)$，则 $f(x)$ 在 $A(x_1,e^{x_1})$ 处的切线为 $y-e^{x_1}=e^{x_1}(x-x_1)$，即 $y=e^{x_1}x+e^{x_1}(1-x_1)$；$g(x)$ 在 $B(x_2,\ln x_2)$ 处的切线为 $y-\ln x_2=\dfrac{1}{x_2}(x-x_2)$，即 $y=\dfrac{1}{x_2}x+\ln x_2-1$.

$\begin{cases}e^{x_1}=\dfrac{1}{x_2}\\e^{x_1}(1-x_1)=\ln x_2-1\end{cases}$，则 $1+x_2=(x_2-1)\ln x_2$，要证这样的点 B 有且仅有两个，需证上式有且有两个解，

令 $h(x)=(x-1)\ln x-x-1$，下面证 $h(x)=0$，有且有两个解. 由 $h'(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$，$y=\ln x$ 单调递增，$y=\dfrac{1}{x}$ 单调递减，$h'(x)$ 单调递增，又 $h'(1)=-1<0$，$h'(2)=\ln2-\dfrac{1}{2}>0$，故存在唯一的 $x_0\in(1,2)$，使得 $h'(x_0)=0$，故而 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x_0)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x_0)>0$，$h(x)$ 单调递增. 又 $h(x_0)<h(1)=-2$，$h(e^2)=e^2-3>0$，$h(x)=0$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上有唯一的根. 记 $h(\alpha)=0$，由 $\alpha>x_0>1$，则

$\frac{1}{\alpha}<1<x_0$，又 $h(\frac{1}{\alpha})=(\frac{1}{\alpha}-1)\ln(\frac{1}{\alpha})-\frac{1}{\alpha}-1=\frac{h(\alpha)}{\alpha}=0$，故 $\frac{1}{\alpha}$ 是 $h(x)=0$ 在 $(0,x_0)$ 上有唯一的根，$h(x)=0$，有且仅有两个解．综上所述，这样的点 B 有且仅有两个，且满足条件的两个点 B 的横坐标互为倒数．



44.【解析】(1) 设 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}$，由 $F'(x)=0$，得 $x=3$，当 $0<x<3$ 时，$F'(x)<0$，当 $x>3$ 时 $F'(x)>0$，$F(x)$ 在区间 $(0,3)$ 单调递减，在区间 $(3,+\infty)$ 单调递增，所以 $F(x)$ 取得最小值为 $F(3)=\ln 3-1>0$，$F(x)>0$，即 $f(x)>g(x)$

(2) 假设曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公切线，切点分别为 $P(x_0,\ln x_0)$ 和 $Q(x_1,2-\frac{3}{x_1})$．因为 $f'(x)=\frac{1}{x}$，$g'(x)=\frac{3}{x^2}$，所以分别以 $P(x_0,\ln x_0)$ 和 $Q(x_1,2-\frac{3}{x_1})$ 为切线的切线方程为 $y=\frac{x}{x_0}+\ln x_0-1$，$y=\frac{3x}{x_1^2}+2-\frac{6}{x_1}$．

(3) 令 $\begin{cases}\frac{1}{x_0}=\frac{3}{x_1^2}\\ \ln x_0-1=2-\frac{6}{x_1}\end{cases}$，即 $2\ln x_1+\frac{6}{x_1}-(3+\ln 3)=0$．令 $h(x)=2\ln x_1+\frac{6}{x_1}-(3+\ln 3)$．

所以由 $h'(x)=\frac{2}{x_1}-\frac{6}{x_1^2}=0$，得 $x_1=3$．显然，当 $0<x_1<3$ 时，$h'(x)<0$，当 $x_1>3$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)_{\min}=\ln 3-1>0$，所以方程 $2\ln x_1+\frac{6}{x_1}-(3+\ln 3)=0$．无解，故二者没有公切线，所以曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 不存在公切线．

45.【解析】(1) 由 $f(x)=ae^x$，得 $f'(x)=ae^x$．又 $f(1)=ae$，故在 $x=1$ 的切线方程为 $y-ae=ae(x-1)$，带入 $(3,3)$，得 $a=\frac{1}{e}$，$f(x)=e^{x-1}$．从而，$h(x)=xe^{x-1}+m(x^2+2x-1)$，$h'(x)=(x+1)(e^{x-1}+2m)$，

①当 $m\geq 0$ 时，$h'(x)>0$，$x\in(0,+\infty)$．故 $h(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$；

②当 $1+\ln(-2m)\leq 0$，即 $-\frac{1}{2e}\leq m<0$ 时，$h'(x)\geq 0$，$x\in(0,+\infty)$．故 $h(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$；

③当 $1+\ln(-2m)>0$，即 $m<-\frac{1}{2e}$ 时，由 $h'(x)>0$ 得 $x>1+\ln(-2m)$，故 $h(x)$ 的单调增区间为 $(1+\ln(-2m),+\infty)$．综上，当 $m\geq-\frac{1}{2e}$ 时，$h(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$；当 $m<-\frac{1}{2e}$ 时，$h(x)$ 的单调增区间为 $(1+\ln(-2m),+\infty)$．

(2) 设 $f(x)=ae^x$ 的切点横坐标为 $x=x_1$，$f'(x)=ae^x$，切线方程为 $y-ae^{x_1}=ae^{x_1}(x-x_1)$……①

设 $g(x)=\ln(ax)+\frac{5}{2}$ 的切点横坐标为 $x=x_2$，$g'(x)=\frac{1}{x}$，切线方程为 $y-\ln(ax_2)-\frac{5}{2}=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$……②

联立①②，得$\begin{cases} ae^{x_1}=\dfrac{1}{x_2} \\ ae^{x_1}(1-x_1)=\ln(ax_2)+\dfrac{3}{2} \end{cases}$，消去$x_2$得$a=\dfrac{1}{e^{x_1}}\cdot\dfrac{x_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}(x_1\neq 1)$，考虑函数$\varphi(x)=\dfrac{1}{e^x}\cdot\dfrac{x-\frac{3}{2}}{x-1}$，

$\varphi'(x)=-\dfrac{1}{e^x}\cdot\dfrac{(2x-1)(x-2)}{2(x-1)^2}$．令$\varphi'(x)=0$，得$x=\dfrac{1}{2}$或2．当$x<\dfrac{1}{2}$或$x>2$时，$\varphi'(x)<0$，函数$y=\varphi(x)$在区间$(-\infty,\dfrac{1}{2})$，$(2,+\infty)$上单调递减；当$\dfrac{1}{2}<x<2$且$x\neq 1$时，$\varphi'(x)>0$，函数$y=\varphi(x)$在区间$(\dfrac{1}{2},1)$和$(1,2)$上单调递增；$\varphi(\dfrac{1}{2})=\dfrac{2}{\sqrt{e}}$，$\varphi(2)=\dfrac{1}{2e^2}$．故当$a\in(0,\dfrac{1}{2e^2}]\cup[\dfrac{2}{\sqrt{e}},+\infty)$时，方程$a=\dfrac{1}{e^{x_1}}\cdot\dfrac{x_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}$有解，从而函数$f(x)=ae^x$与$g(x)=\ln(ax)+\dfrac{5}{2}$存在公切线．

专题 11　导数的三板斧之分而治之

达标训练

1.【解析】法一　求导得$f'(x)=1+\ln x+ae^x$，由题意，$f'(x)=1+\ln x+ae^x=0$有两个不同的实根，即$y=-a$和$y=\dfrac{1+\ln x}{e^x}$在$(0,+\infty)$上有两个交点，令$g(x)=\dfrac{1+\ln x}{e^x}$，$g'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{e^x}$，记$h(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x-1$，$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，且$h(1)=0$，所以当$x\in(0,1]$时，$h(x)\geq 0$，$g'(x)\geq 0$，所以$g(x)$在$(0,1]$上单调递增；当$x\in(1,+\infty)$时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，故$g(x)_{\max}=g(1)=\dfrac{1}{e}$．当$x\to 0$时，$g(x)\to-\infty$；当$x\to+\infty$时，$g(x)\to 0$，当$0<-a<\dfrac{1}{e}$，即$-\dfrac{1}{e}<a<0$时，$y=-a$和$y=\dfrac{1+\ln x}{e^x}$在$(0,+\infty)$上有两个交点，故选$D$．

法二：求导得$f'(x)=1+\ln x+ae^x$，由题意，$f'(x)=1+\ln x+ae^x=0$有两个不同的实根，根据图像显然$a<0$，$-ae^x=\ln x+1$，即$\dfrac{-a}{e}\cdot\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{\ln ex}{ex}\Leftrightarrow\dfrac{-a}{e}\cdot e<\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow a>-\dfrac{1}{e}$，故选$D$．

2.【解析】法一：（同构）函数$f(x)=e^x-a\ln(ax-a)+a>0(a>0)$恒成立，即$\dfrac{e^x}{a}>\ln(x-1)+\ln a-1$，同构得$e^{x-\ln a}+x-\ln a>\ln(x-1)+x-1$，即$e^{x-\ln a}+x-\ln a>e^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)$，令$g(x)=e^x+x$，易得$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，则$x-\ln a>\ln(x-1)$，即$-\ln a>\ln(x-1)-x$，得$\ln(x-1)-x\leq x-2-x=-2$，得$-\ln a>-2$，得$0<a<e^2$，实数$a$的取值范围为$(0,e^2)$．故选$B$．

法二：（分而治之）变形得$\dfrac{e^x}{a}>\ln\dfrac{a(x-1)}{e}\Leftrightarrow\dfrac{e\cdot e^{x-1}}{a(x-1)}>\dfrac{a}{e}\cdot\dfrac{\ln\frac{a(x-1)}{e}}{\frac{a(x-1)}{e}}\Leftrightarrow\dfrac{e}{a}\cdot e>\dfrac{a}{e}\cdot\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow a<e^2$．故选$B$．

3.【解析】函数的定义域为$(0,+\infty)$，则$f(x)<0$即$(\dfrac{e^{x-m}}{x}-a)(\dfrac{\ln x}{x}-a)<0$，设$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$，则$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，令$g'(x)=0$，解得$x=e$，易知当$x\in(0,e)$时，$g(x)$单调递增，当$x\in(e,+\infty)$时，$g(x)$

单调递减，故 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$，设 $h(x)=\frac{e^{x-m}}{x}(x>0)$，由题意，$h(x)>\frac{1}{e}$ 恒成立，即 $e^{x-m}-\frac{1}{e}x>0$ 对任意 $x>0$ 恒成立，设 $q(x)=e^{x-m}-\frac{1}{e}x(x>0)$，则 $q'(x)=e^{x-m}-\frac{1}{e}$，令 $q'(x)=0$，则 $x=m-1$，当 $m-1\le 0$，即 $m\le 1$ 时，$q'(x)>0$，则函数 $q(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $q(x)_{\min}=q(0)=e^{-m}>0$ 恒成立，故 $m\le 1$ 符合题意；当 $m-1>0$，即 $m>1$ 时，当 $x\in(0,m-1)$ 时，$q'(x)<0$，$q(x)$ 单调递减，当 $x\in(m-1,+\infty)$ 时，$q'(x)>0$，$q(x)$ 单调递增，则 $q(x)_{\min}=q(m-1)=\frac{1}{e}-\frac{1}{e}(m-1)>0$，解得 $1<m<2$，综上，实数 m 的取值范围为 $(-\infty,2)$．故选 D．

4.【解析】法一：若 $f(x)>x$ 恒成立，即 $m>-x^2+2ex+\frac{\ln x}{x}+1$，$m'=-2x+2e+\frac{1-\ln x}{x^2}=-2(x-e)+\frac{-(\ln x-lne)}{x^2}$，当 $x\in(0,e)$ 时，$m'>0$，m 为关于 x 的增函数；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$m'<0$，m 为关于 x 的减函数．

故函数 $y=-x^2+2ex+\frac{\ln x}{x}+1$ 的最大值为：$e^2+\frac{1}{e}+1$，即 $m>e^2+\frac{1}{e}+1$，故选 A．

法二（分而治之）变形得 $x^2-2ex+m-1>\frac{\ln x}{x}\Leftrightarrow -e^2+m-1>\frac{1}{e}$，即 $m>e^2+\frac{1}{e}+1$，故选：A．

5.【解析】（1）函数的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<e$，令 $f'(x)<0$，解 $x>e$，函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0,e)$，减区间为 $(e,+\infty)$；

（2）证明 $\ln x<\frac{2x}{e}-\frac{x^2}{e^x}$ 等价于 $\frac{\ln x}{x}<\frac{2}{e}-\frac{x}{e^x}$，即证 $f(x)<\frac{2}{e}-\frac{x}{e^x}$，由（1）知，$f(x)\le f(e)=\frac{1}{e}$，当 $x=e$ 时取等号，令 $m(x)=\frac{2}{e}-\frac{x}{e^x}$，则 $m'(x)=\frac{x-1}{e^x}$，易知函数 $m(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增，$m(x)\ge m(1)=\frac{1}{e}$，当 $x=1$ 时取等号，$f(x)<m(x)$ 对一切 $x\in(0,+\infty)$ 都成立，则对一切 $x\in(0,+\infty)$，都有 $\ln x<\frac{2x}{e}-\frac{x^2}{e^x}$ 成立．

6.【解析】（1）根据题意求导得 $f'(x)=\frac{a}{x}-e^x=\frac{a-xe^x}{x}(x>0)$，当 $a\le 0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $y=f(x)$ 是减函数，无极值点；当 $a>0$ 时，令 $f(x)=0$，得 $a-xe^x=0$，即 $xe^x=a$，又 $y=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在一解，不妨设为 x_0，所以函数 $y=f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上是单调递增的，在 $(x_0,+\infty)$ 上是单调递减的；所以函数 $y=f(x)$ 有一个极大值点，无极小值点；总之：当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 无极值点；当 $a>0$ 时，函数 $y=f(x)$ 有一个极大值点，无极小值点；

（2）法一：证明：$a=2$ 时，函数 $f(x)=2\ln x-e^x$，求导 $f'(x)=\frac{2-xe^x}{x}(x>0)$，由（1）可知 $f(x)$ 有极大值 $f(x_0)$，且 x_0 满足 $x_0e^{x_0}=2$①，又 $y=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，且 $0<2<e$，所以 $x_0\in(0,1)$，又知：$f(x)_{\min}=f(x_0)=2lnx_0-e^{x_0}$ ②；由①可得 $e^{x_0}=\frac{2}{x_0}$，代入②得 $f(x)_{\min}=f(x_0)=2\ln x_0-\frac{2}{x_0}$，令 $g(x)=2\ln x-\frac{2}{x}$，则 $g'(x)=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}=\frac{2(x+1)}{x^2}>0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，所以 $g(x_0)<g(1)=-2<0$，即 $g(x_0)<0$，所以 $f(x)<0$．

法二 分而治之：变形得 $e^x>2\ln x\Leftrightarrow\frac{e^x}{x}\ge e>\frac{2}{e}\ge\frac{2\ln x}{x}$．

7.【解析】(1) 求导得 $f'(x)=e^x-2ax=x(\frac{e^x}{x}-2a)$，令 $H(x)=\frac{e^x}{x}$，则 $H'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$H'(x)<0$，$H(x)$ 单调递减，且 $x\to 0$ 时，$H(x)\to+\infty$，当 $x>1$ 时，$H'(x)>0$，$H(x)$ 单调递增，且 $x\to+\infty$ 时，$H(x)\to+\infty$，$H(x)_{\min}=H(1)=e$，

①当 $2a\le e$ 即 $a\le\frac{1}{2}e$ 时，$f'(x)\ge 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，没有极值，②当 $a>\frac{1}{2}e$ 时，存在 $0<x_1<1<x_2$，使得 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，当 $x\in(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，x_2 是 $f(x)$ 的极小值，综上可得，$a>\frac{1}{2}e$

(2) 法一 要证 $f(x)>ax(\ln x-x)$，即证 $e^x>ax\ln x$，①当 $0<x\le 1$ 时，$e^x>1$，$ax\ln x\le 0$，显然成立；②当 $x>1$ 时，$x\ln x>0$，结合已知 $0<a\le\frac{1}{2}e^2$ 可得，$0<ax\ln x\le\frac{1}{2}e^2x\ln x$，于是问题转化为 $e^x>\frac{1}{2}e^2x\ln x$，

即证 $\frac{2e^{x-2}}{x}-\ln x>0$，令 $g(x)=\frac{2e^{x-2}}{x}-\ln x$，则 $g'(x)=\frac{2e^{x-2}(x-1)-x}{x^2}$，令 $h(x)=2e^{x-2}(x-1)-x$，

则 $h'(x)=2xe^{x-2}-1$，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$h'(1)=\frac{2}{e}-1<0$，$h'(2)=3>0$，存在 $x_0\in(1,2)$ 使得 $h(x_0)=0$，即 $2x_0e^{x_0-2}=1$，$h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，又 $h(1)=-1<0$，$h(2)=0$，故当 $x\in(1,2)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$g(x)\ge g(2)=1-\ln 2>0$，故 $g(x)>0$，得证.

法二 分而治之：变形 $e^x>ax\ln x\Leftrightarrow\frac{e^x}{x^2}\ge\frac{e^2}{4}>a\frac{1}{e}\ge a\frac{\ln x}{x}$，由于 $0<a\le\frac{e^2}{2}$，故只需满足 $\frac{e^2}{4}>\frac{e}{2}$，命题得证.

8. (1)【解析】$a=e$ 时，函数 $f(x)=e^x-e\ln x$．$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=e^x-\frac{e}{x}=\frac{xe^x-e}{x}$，令 $g(x)=xe^x$，则 $g'(x)=(x+1)e^x>0$，函数 $g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $g(1)=e$，$x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，此时单调递减；$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，此时单调递增，函数 $f(x)$ 的单调递减为 $(0,1)$；单调递增为 $(1,+\infty)$.

(2) 法一 证明：$f'(x)=e^x-\frac{a}{x}=\frac{xe^x-a}{x}$．由 (1) 可知：$f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上必有唯一零点，设为 x_0，则 $x_0e^{x_0}=a$．当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，此时单调递减；$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，此时单调递增.

由 $f(x)\ge f(x_0)=e^{x_0}-alnx_0$．又 $x_0e^{x_0}=a$，可得：$e^{x_0}=\frac{a}{x_0}$，$\ln x_0+x_0=\ln a$．则

$f(x)\ge f(x_0)=\frac{a}{x_0}+ax_0-a\ln a\ge 2a-a\ln a$，故 $f(x)\ge a(2-\ln a)$.

法二 (分而治之) 要证 $f(x)\ge 2a-a\ln a$，只需 $e^x\ge a(\ln x+2-\ln a)=a\ln\frac{e^2x}{a}$，

只需 $\frac{e^x}{x}\ge e^2\frac{a}{e^2x}\ln\frac{e^2x}{a}$，同构，令 $g(x)=\frac{e^x}{x}$，求导后易知 $g(x)_{\min}=g(1)=e$，$h(x)=\frac{\ln x}{x}$，易知

$h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$，故 $\frac{e^x}{x}\ge e$，当仅当 $x=1$ 时等号成立；$e^2\frac{a}{e^2x}\ln\frac{e^2x}{a}=e^2h(\frac{e^2x}{a})\le e^2\cdot\frac{1}{e}=e$ 恒成立，故

$e^x>a(\ln x+2-\ln a)$ 恒成立，当仅当 $\frac{e^2x}{a}=e\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\a=e\end{cases}$ 时，$e^x\ge a(\ln x+2-\ln a)$ 取得等号；$f(x)\ge a(2-\ln a)$.

10.【解析】(1) 求导得 $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=xe^x(2+x)$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-2$ 或 $x=0$，则 x，$f'(x)$，

$f(x)$ 在 $[-5,-1]$ 的变化情况如下表：

x	-5	$(-5,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\dfrac{25}{e^5}$	单增	极大值 $\dfrac{4}{e^2}$	递减	$\dfrac{1}{e}$

故函数 $f(x)$ 在 $[-5,-1]$ 上的最大值为 $\dfrac{4}{e^2}$，最小值为 $\dfrac{25}{e^5}$；

（2）证明：要证 $g(x)$ 无零点，即证 $\dfrac{x^2e^x}{x+1}-a\ln x=0$ 无解，即证 $\dfrac{x^2}{\ln x}=\dfrac{a(x+1)}{e^x}$ 无解，

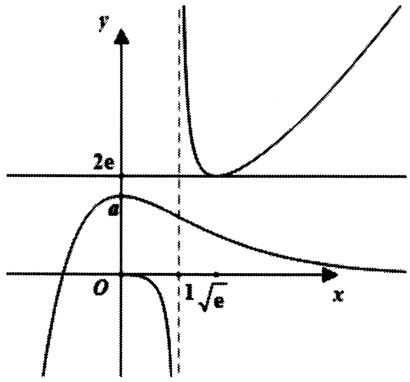
设 $p(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}(x>0且x\neq 1)$，$q(x)=\dfrac{a(x+1)}{e^x}(x>0，0<a<2e)$，则即证函数 $p(x)$ 与函数 $q(x)$ 没有交点；①

先研究 $p(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}(x>0且x\neq 1)$，$p'(x)=\dfrac{x(2\ln x-1)}{(\ln x)^2}$，令 $p'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{e}$，

且当 $x\in(0,1)$ 及 $x\in(1,\sqrt{e})$ 时，$p'(x)<0$，函数 $p(x)$ 递减；当 $x\in(\sqrt{e},+\infty)$ 时，$p'(x)>0$，函数 $p(x)$ 递增，且当 $x\to 0$ 时，$p(x)\to 0$，当 $x\to 1^-$ 时，$p(x)\to-\infty$，当 $x\to 1^+$ 时，$p(x)\to+\infty$，$p(x)_{极小值}=p\left(\sqrt{e}\right)=2e$；

②再研究函数 $q(x)=\dfrac{a(x+1)}{e^x}(x>0，0<a<2e)$，$q'(x)=\dfrac{-ax}{e^x}<0$，则函数 $q(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单减，

故 $q(x)<q(0)=a$，且当 $x\to+\infty$ 时，$q(x)\to 0$，作函数 $p(x)$ 与函数 $q(x)$ 的图象如图所示，



显然，当 $a\in(0,2e)$ 时，函数 $p(x)$ 与函数 $q(x)$ 没有交点，即当 $a\in(0,2e)$ 时，函数 $g(x)$ 无零点.

11.【解析】（1）函数 $g(x)=f'(x)-ax^2=1+\ln x-ax^2$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax=\dfrac{1-2ax}{x}$，$(x>0)$

当 $a\le 0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$g(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$，无单调减区间；

当 $a>0$ 时，$g'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{\sqrt{2a}}{2a}$，当 $x\in(0,\dfrac{\sqrt{2a}}{2a})$，$g'(x)>0$；所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\dfrac{\sqrt{2a}}{2a})$，

当 $x\in(\dfrac{\sqrt{2a}}{2a},+\infty)$，$g'(x)<0$，单调递减区间为 $(\dfrac{\sqrt{2a}}{2a},+\infty)$.

（3）证：$\ln x<\dfrac{2e^{x-2}}{x}\Leftrightarrow\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{2e^{x-2}}{x^2}$，令 $h(x)=\dfrac{2e^{x-2}}{x^2}=\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x}{x^2}(x>0)$，$h'(x)=\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$，

当 $0<x<2$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x>2$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；所以 $h(x)$ 的最小值为 $h(2)=\dfrac{1}{2}$，令 $k(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $k'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<e$ 时，$k'(x)>0$，$k(x)$ 单调递增；当 $x>e$ 时，$k'(x)<0$，$k(x)$ 单调递减；所以 $k(x)$ 的最大值为 $k(e)=\dfrac{1}{e}$，因为 $\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{2}$，所以 $k(x)<h(x)$，即 $lnx<\dfrac{2e^{x-2}}{x}$.

12.（1）【解析】由已知得 $f'(x)=e^x(a\ln x-bx+\dfrac{a}{x}-b)(x\neq 0)$，因为 $\begin{cases}f(1)=-2\\f'(1)=e-4\end{cases}$，所以 $\begin{cases}a=1\\b=\dfrac{2}{e}\end{cases}$；

（2）证明：由（1）知 $f(x)=e^x\ln x-2xe^{x-1}$，所以 $f(x)+x^2<0\Leftrightarrow\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{2}{e}-\dfrac{x}{e^x}$，设 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$h(x)=\dfrac{2}{e}-\dfrac{x}{e^x}$，要证 $f(x)+x^2<0$，即要证 $g(x)<h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立．因为 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}(x\neq 0)$，所以 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 上为增函数，在 $[e,+\infty)$ 上为减函数，所以 $g(x)\le g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{e}$．① 又 $h'(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数，在 $[1,+\infty)$ 上为增函数，所以 $h(x)\ge h(1)=\dfrac{1}{e}$．② 由于不等于①和②不能同时取等号，故 $g(x)\neq h(x)$，所以 $f(x)+x^2<0$ 成立．

13.【解析】(1) 求导得 $f'(x)=2x(\ln x-1)+x=2x\ln x-x$，$f'(1)=-1$，又 $f(1)=-1$，所以切线方程为 $x+y=0$；

（2）由于函数 $y=f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，所以 $mf(x)+e^x\ge 0\Leftrightarrow mx^2(\ln x-1)+e^x\ge 0\Leftrightarrow mx(\ln x-1)\ge-\dfrac{e^x}{x}$

令 $g(x)=mx(\ln x-1)$ 则 $g'(x)=m\ln x$，可得当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=-m$，令 $h(x)=-\dfrac{e^x}{x}$，则 $h'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$，可得当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)_{\max}=h(1)=-\mathrm{e}$，因此，由 $-m\ge-e$ 得，$m\le e$，所以，m 的取值范围为 $(0,e)$．

14.【解析】(1) 由条件可得，$a=1$，$b=1$，$f(x)=e^{x-1}-\ln xf'(x)=\dfrac{xe^{x-1}-1}{x}$，$x>0$，令 $t(x)=xe^{x-1}-1$，$t'(x)=(x+1)e^{x-1}$，当 $x>0$ 时，$t'(x)>0$，$t(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 单调增函数，又 $t(1)=0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$t(x)<0$，$f'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$t(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 的单调增区间为 $(1,+\infty)$，减区间为 $(0,1)$；

(2) 法一：当 $b=0$ 时，$f(x)>0$，符合题意，当 $0<b\le e$ 时，$f'(x)=e^{x-1}-\dfrac{b}{x}=\dfrac{xe^{x-1}-b}{x}$，

令 $h(x)=xe^{x-1}-b$，又 $h(0)=-b<0$，$h(2)=2e-b>0$，$h(x)$ 在 $(0,2)$，存在唯一的零点，设为 x_0，有 $x_0e^{x_0-1}=b$，且 $x\in(0,x_0)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$x\in(x_0,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

$f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{x_0-1}-blnx_0$，$x_0e^{x_0-1}=b$，$e^{x_0-1}=\dfrac{b}{x_0}$，两边取对数，$x_0-1=\ln b-\ln x_0$，

$f(x_0)=\dfrac{b}{x_0}-b(\ln b+1-x_0)=(\dfrac{b}{x_0}+bx_0)-b\ln b-b\ge 2b-b\ln b-b=b-b\ln b$（当且仅当 $x_0=1$ 时到等号），

设 $m(b)=b-b\ln b$，$m(b)=-\ln b$，当 $b\in(0,1)$ 时，$m'(b)>0$，当 $b\in(1,e]$ 时，$m'(b)<0$；

又 $m(e)=0$，且 $b>0$，b 趋向 0 时，$m(e)>0$；当 $0<b\le e$，$m(b)\ge 0$，当且仅当 $b=e$ 时取等号，

由（1）可知，当 $b=1$ 时，$x_0=1$，故当 $b=e$ 时，$x_0\neq 1$，$f(x_0)>m(b)\ge 0$，$f(x_0)>0$，综上，当 $0\le b\le e$ 时，$f(x)>0$．

法二 要证 $e^{x-1}>b\ln x$，只需 $e^{x-1}>b\ln x\Leftrightarrow\dfrac{e^{x-1}}{x}>b\dfrac{\ln x}{x}\Leftrightarrow\dfrac{e^{x-1}}{x}\ge g(1)=1\ge bh(e)=b\cdot\dfrac{1}{e}$，由于 $0\le b\le e$，故不等式成立（取等条件不一致）．

15.【解析】(1) $g(x)=\dfrac{\ln x-1}{x}(x>0)$，故 $g'(x)=\dfrac{2-\ln x}{x^2}$，令 $g'(x)>0$，解得：$0<x<e^2$，令 $g'(x)<0$，解得 $x>e^2$，故 $g(x)$ 在 $(0,e^2)$ 递增，在 $(e^2,+\infty)$ 递减，故 $g(x)_{极大值}=g(e^2)=\dfrac{1}{e^2}$；

(2)法一:(放缩+指数找基友)证明:要证 $f(x)+1<e^x-x^2$.即证 $e^x-x^2-x\ln x-1>0$,先证明 $\ln x\le x-1$,取 $h(x)=\ln x-x+1$,则 $h'(x)=\dfrac{1-x}{x}$,易知 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 递增,在 $(1,+\infty)$ 递减,故 $h(x)\le h(1)=0$,即 $\ln x\le x-1$,当且仅当 $x=1$ 时取"=",故 $x\ln x\le x(x-1)$, $e^x-x^2-x\ln x\ge e^x-2x^2+x-1$,故只需证明当 $x>0$ 时, $e^x-2x^2+x-1>0$ 恒成立,只需 $\dfrac{2x^2-x+1}{e^x}<1$,令 $\varphi(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{e^x}$,$\phi'(x)=\dfrac{-2x^2+5x-2}{e^x}=\dfrac{-(2x-1)(x-2)}{e^x}$, $\phi'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2},2$,易知 $\phi(x)_{\max}=\phi(2)=\dfrac{7}{e^2}<1$,故 $x>0$ 时,原不等式成立.

法二 要证 $e^x-x^2-x\ln x-1>0$,即证 $\dfrac{e^x}{x^2}>\dfrac{\ln x}{x}+1+\dfrac{1}{x^2}$,由于 $\dfrac{\ln x}{x}\le\dfrac{1}{e}$,再构造 $h(x)=\dfrac{\frac{3}{2}x^2+1}{e^x}$,

$h'(x)=\dfrac{3x-\frac{3}{2}x^2-1}{e^x}=0\Leftrightarrow x=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $h(x)$ 取得最大值, $e^{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}>4.8>3+\sqrt{3}$,所以 $h(x)_{\max}=h(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3})<1$,所以 $\dfrac{e^x-x^2-1}{x^2}>\dfrac{3}{2}-1>\dfrac{1}{e}$,命题得证.

16.【解析】(1) $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $g'(x)=\dfrac{ax-b}{x}$,当 $a>0$, $b<0$ 时, $g'(x)>0$,则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;当 $a>0$, $b>0$ 时,令 $g'(x)>0$,得 $x>\dfrac{b}{a}$,令 $g'(x)<0$,得 $0<x<\dfrac{b}{a}$,则 $g(x)$ 在 $(0,\dfrac{b}{a})$ 上单调递减,在 $(\dfrac{b}{a},+\infty)$ 上单调递增;当 $a<0$, $b>0$ 时, $g'(x)<0$,则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减;当 $a<0$, $b<0$ 时,令 $g'(x)>0$,得 $0<x<\dfrac{b}{a}$,令 $g'(x)<0$,得 $x>\dfrac{b}{a}$,则 $g(x)$ 在 $(0,\dfrac{b}{a})$ 上单调递增,在 $(\dfrac{b}{a},+\infty)$ 上单调递减;

(2)证明:设函数 $h(x)=f(x)-(3x+1)$,则 $h'(x)=\dfrac{2}{x+1}+\cos x-3$. $x\ge0$, $\dfrac{2}{x+1}\in(0,2]$, $\cos x\in[-1,1]$,则 $h'(x)\le0$,从而 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减, $h(x)=f(x)-(3x+1)\le h(0)=0$,即 $f(x)\le 3x+1$.

(3)证明:当 $a=b=1$ 时, $g(x)=x-1-\ln x$.由(1)知, $g(x)_{\min}=g(1)=0$, $g(x)=x-1-\ln x\ge0$,即 $g(e^x)\ge0$,同构,当 $x>-1$ 时, $(x+1)^2>0$, $(x+1)^2e^{\sin x}>0$,则 $g(e^{\sin x+2\ln(x+1)})=(x+1)^2e^{\sin x}-\ln[(x+1)^2e^{\sin x}]-1\ge0$,即 $(x+1)^2e^{\sin x}\ge2\ln(x+1)+\sin x+1$,又 $(x^2+2x+2)e^{\sin x}>(x+1)^2e^{\sin x}$,
$(x^2+2x+2)e^{\sin x}>2\ln(x+1)+\sin x+1$,即 $f(x)<(x^2+2x+2)e^{\sin x}$.

17.【解析】(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\ne0\}$, $f'(x)=\dfrac{axe^x-ae^x}{x^2}=\dfrac{ae^x(x-1)}{x^2}$,

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)>0$ 解得 $x>1$;令 $f'(x)<0$ 解得 $x<1$ 且 $x\ne0$;

当 $a<0$ 时,令 $f'(x)>0$ 解得 $x<1$ 且 $x\ne0$;令 $f'(x)<0$ 解得 $x>1$;

当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,在 $(-\infty,0)$, $(0,1)$ 单调递减;

当 $a<0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$, $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 单调递减;

(2)因为 $x\in(0,+\infty)$,所以 $x^3+x>0$,故 $a\le\dfrac{(x^2+1)e^x-x^2}{x^3+x}=\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,

设 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$，$h(x)=\dfrac{x}{x^2+1}+a=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}+a(x>0)$，则 $g(x)_{\min}=g(1)\geq h(x)_{\max}=h(1)\Leftrightarrow a\leq e-\dfrac{1}{2}$，$a\leq e-\dfrac{1}{2}$，

即实数 a 的取值范围为 $(-\infty,e-\dfrac{1}{2}]$.

18.【解析】(1) 求导得 $f'(x)=\dfrac{a}{x}+1=\dfrac{x+a}{x}$，①当 $a<0$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $x>-a$，$f'(x)<0$ 得 $0<x<-a$，$f(x)$ 在 $(0,-a)$ 上单调递减，在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增；②当 $a\geq 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

(2) 由 $f(x)-e^x-ax<0$ 得 $a(x-\ln x)>x-e^x$，令 $s(x)=x-e^x(x>0)$，则 $s'(x)=1-e^x<0$，$s(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$s(x)<s(0)=-1$，$s(x)<0$，即 $x-e^x<0$，同理可得 $x-\ln x>0$，$a>\dfrac{x-e^x}{x-\ln x}$，当 $a\geq 0$ 时，$\dfrac{x-e^x}{x-\ln x}<0$，$a>\dfrac{x-e^x}{x-\ln x}$ 式恒成立，即 $f(x)-e^x-ax<0$ 恒成立，满足题意. 综上，a 的取值范围是 $[0,+\infty)$.

19.【解析】(1) 由 $f(x)=e^x-ax-1$，$f'(x)=e^x-a$，由 $f'(x)>0$，解得：$x>\ln a$，由 $f'(x)<0$，解得：$x<\ln a$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 递增；

(2) 法一：证明：要证明 $f(x)\geq g(x)$，即证 $e^x-e\ln x-e\geq 0$，令 $h(x)=e^x-e\ln x-e$，则 $h'(x)=e^x-\dfrac{e}{x}$，令 $\varphi(x)=e^x-\dfrac{e}{x}$，则 $\varphi'(x)=e^x+\dfrac{e}{x^2}>0$，故 $\varphi(x)$ 即 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，又 $h'(1)=0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 递增，故 $h(x)_{\min}=h(1)=0$，故 $h(x)\geq 0$，即 $e^x-e\ln x-e\geq 0$，故 $f(x)\geq g(x)$.

法二：要证：由 $e^x-e\ln x-e\geq 0$，即证 $h(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x}\geq\dfrac{\ln x+1}{x}=\varphi(x)\Leftrightarrow h(x)_{\min}=h(1)=1\geq\varphi(x)_{\max}=\varphi(1)=1$

20.【解析】(1) $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1-2ax^2}{x}$，故 $a\leq 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得：$x=\dfrac{\sqrt{2a}}{2a}$，故 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\sqrt{2a}}{2a})$ 递增，在 $(\dfrac{\sqrt{2a}}{2a},+\infty)$ 递减；

(2) 证明：要证 $xf(x)<\dfrac{2}{e^2}\cdot e^x+x-ax^3$，即证 $x\ln x<\dfrac{2}{e^2}\cdot e^x$，也即证 $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{2e^x}{e^2x^2}$，

令 $g(x)=\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x}{x^2}(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$，$g(x)$ 在 $(0,2)$ 递减，在 $(2,+\infty)$ 递增，故 $g(x)_{\min}=g(2)=\dfrac{1}{2}$，

令 $k(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $k'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，故 $k(x)$ 在 $(0,e)$ 递增，在 $(e,+\infty)$ 递减，故 $k(x)_{\max}=k(e)=\dfrac{1}{e}$，$\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{2}$，

故 $k(x)<h(x)$，即 $\ln x<\dfrac{2e^{x-2}}{x}$，故 $xf(x)<\dfrac{2}{e^2}\cdot e^x+x-ax^3$.

21.【解析】(1) 求导得 $f'(x)=x(2\ln x+1)$，令 $f'(x)=0$，解得：$x=e^{-\frac{1}{2}}$，令 $f'(x)>0$，解得：$x>e^{-\frac{1}{2}}$，令 $f'(x)<0$，解得：$0<x<e^{-\frac{1}{2}}$，故 $f(x)$ 在 $(0,e^{-\frac{1}{2}})$ 递减，在 $(e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$ 递增；

(2) 证明：由 (1) 知当 $x=e^{-\frac{1}{2}}$ 时，$f(x)$ 的最小值是 $-\dfrac{1}{2e}$，设 $h(x)=\dfrac{x^2}{e^x}-\dfrac{3}{4}(x>0)$，则 $h'(x)=-\dfrac{x(x-2)}{e^x}$，

$h(x)$ 在 $(0,2)$ 递增，在 $(2,+\infty)$ 递减，故 $h(x)_{\max}=h(2)=\frac{4}{e^2}-\frac{3}{4}$，$-\frac{1}{2e}-(\frac{4}{e^2}-\frac{3}{4})=\frac{(3e-8)(e+2)}{4e^2}>0$，

故 $f(x)_{\min}>h(x)_{\max}$，所以 $\ln x>\frac{1}{e^x}-\frac{3}{4x^2}$.

22.【解析】(1) 求导得 $f'(x)=1+\frac{m-1}{x^2}-\frac{m}{x}=\frac{x^2-mx+(m-1)}{x^2}=\frac{(x-1)[x-(m-1)]}{x^2}$. $(x>0)$.

$m>2$ 时，$m-1>1$. 则函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$，$(m-1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,m-1)$ 上单调递减.

$m=2$ 时，$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geq 0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

$1<m<2$ 时，$0<m-1<1$，则函数 $f(x)$ 在 $(0,m-1)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(m-1,1)$ 上单调递减.

$m\leq 1$ 时，$f'(x)=\frac{(x-1)(x+1-m)}{x^2}\geq 0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

(2) 法一：证明：$e^x>x^2-xf(x)+1-m\Leftrightarrow e^x-mx\ln x>0$，$0<m\leq\frac{e^2}{2}$. 令 $g(x)=e^x-mx\ln x$，$x\to 0_+$，

$g(x)\to 0$. $(x\in(0,+\infty))$，$g'(x)=e^x-m(\ln x+1)$，$g''(x)=e^x-\frac{m}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，存在 x_0 使得

$e^{x_0}=\frac{m}{x_0}$，$\ln x_0+x_0=\ln m$. 可得 $x=x_0$ 时，$g'(x)$ 取得极小值，

$g'(x_0)=e^{x_0}-m(\ln x_0+1)=\frac{m}{x_0}-m(1+\ln m-x_0)=m(\frac{1}{x_0}+x_0)-m\ln m\geq 2m-m\ln m\geq m(2-\ln\frac{e^2}{2})=m\ln 2>0$.

函数 $g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增. $g(x)>g(0)=0$，$e^x-mx\ln x>0$ 成立，即当 $0<m\leq\frac{e^2}{2}$ 时，不等式 $e^x>x^2-xf(x)+1-m$ 成立.

法二：分而治之：变形得 $e^x>x^2-xf(x)+1-m\Leftrightarrow e^x-mx\ln x>0\Leftrightarrow\frac{e^x}{x^2}\geq\frac{e^2}{4}>\frac{m}{e}\geq m\frac{\ln x}{x}\Leftrightarrow\frac{e^2}{4}>\frac{e}{2}$ 时，一定满足题意.

23.(1)【解析】$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，求导得 $f'(x)=\frac{1}{x}-2a^2x+a=\frac{-(ax-1)(2ax+1)}{x}$，当 $a=0$ 时，

$f'(x)=\frac{1}{x}>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{a}$，由 $f'(x)<0$，得 $x>\frac{1}{a}$. $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减；当 $a<0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<-\frac{1}{2a}$，

由 $f'(x)<0$，得 $x>-\frac{1}{2a}$. $f(x)$ 在 $(0,-\frac{1}{2a})$ 上单调递增，在 $(-\frac{1}{2a},+\infty)$ 上单调递减；

综上，当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,-\frac{1}{2a})$ 上单调递增，在 $(-\frac{1}{2a},+\infty)$ 上单调递减.

(2) 证明：当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x-x^2+x$，要证当 $x>0$ 时，$f(x)<e^{2x}-x^2-2$，只要证. 只要证 $\ln x-x+1<e^{2x}-2x-1$，同构，令 $g(x)=x-\ln x-1$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增. 当 $x>0$ 时，$g(x)\geq g(1)=0$，当且仅当 $x=1$ 时"="成立；$g(e^{2x})=e^{2x}-2x-1$，故 $g(e^{2x})+g(x)>0$，$\ln x-x+1<e^{2x}-2x-1$. 即当 $x>0$ 时，$f(x)<e^{2x}-x^2-2$.

24.【解析】(1) 法一：若 $0<x\le\frac{1}{e}$，则 $f(x)=e^x-a(\ln x+1)\ge 0$ 显然成立；若 $x>\frac{1}{e}$，由 $f(x)\ge 0$ 得 $a\le\frac{e^x}{\ln x+1}$，

令 $\phi(x)=\frac{e^x}{\ln x+1}$，则 $\phi'(x)=\frac{e^x(\ln x+1-\frac{1}{x})}{(\ln x+1)^2}$，令 $g(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}(x>\frac{1}{e})$，由 $g'(x)=1+\frac{1}{x^2}>0$ 得 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 上单调递增，又 $g(1)=0$，所以 $\phi'(x)$ 在 $(\frac{1}{e},1)$ 上为负，在 $(1,+\infty)$ 上为正，$\phi(x)$ 在 $(\frac{1}{e},1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，$\phi(x)_{\min}=\phi(1)=\mathrm{e}$，从而 $0<a\le e$.

法二 分而治之：变形得 $\frac{e^x}{x}\ge a\frac{\ln ex}{x}=ae\frac{\ln ex}{ex}$，当 $x=1$ 时，同时取得最值，从而 $0<a\le e$.

(2) 证明：函数 $y=f(x)$ 若有两个零点，则 $a>e$，所以 $f(1)=e-a<0$，由 $f(a)=e^a-a\ln a-a(a>e)$，得 $f'(a)=e^a-\ln a-2$，则 $f''(a)=e^a-\frac{1}{a}>e^a-\frac{1}{e}>e-\frac{1}{e}>0$，$f'(a)=e^a-\ln a-2$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，则 $f'(a)>f'(e)=e^e-3>e^2-3>0$，$f(a)=e^a-a\ln a-a$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，

则 $f(a)>f(e)=e^e-2e>e^2-2e>0$，则 $f(1)\cdot f(a)<0$，$1<x_2<a$，由 $a>e$ 得

$f(\frac{1}{a})=e^{\frac{1}{a}}-a\ln\frac{1}{a}-a=e^{\frac{1}{a}}+a\ln a-a>e^{\frac{1}{a}}+a\ln e-a=e^{\frac{1}{a}}>0$，则 $f(1)f(\frac{1}{a})<0$，得 $\frac{1}{a}<x_1<1$，

综上得 $\frac{1}{a}<x_1<1<x_2<a$.

25.【解析】(1) 因为 $f'(x)=(x+a+1)e^x$，由 $f'(x)=0$，得 $x=-a-1$，当 $x<-a-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>-a-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，故 $x=-a-1$ 时，函数取得最小值 $f(-a-1)=-1-e^{-a-1}<0$，取 $b>0$ 且 $b>-a+1$，则 $f(b)=(b+a)e^b-1>e^b-1>0$，故 $f(x)$ 存在唯一零点.

(2) 设 $g(x)=f(x)-2ax=a(e^x-2x)+xe^x-1$，设 $h(x)=e^x-2x$，$x\ge 0$，则 $h'(x)=e^x-2$，

易得 $h(x)\ge h(\ln 2)=2(1-\ln 2)>0$，由题知，$g(0)\ge 0$，可得 $a\ge 1$，当 $a\ge 1$ 时，

构造 $F(x)=e^x-2x+xe^x-1\ge(1-a)(e^x-2x)=G(x)$ 的天各一方，$G(x)$ 单调递减，

$F'(x)=(2x+1)(\frac{x+1}{2x+1}e^x-1)$，设 $\varphi(x)=\frac{x+1}{2x+1}e^x-1$，$x\ge 0$，则 $\varphi'(x)=\frac{x(2x+3)}{(2x+1)^2}e^x\ge 0$，(仅当 $x=0$ 取等号)，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 递增，所以 $\varphi(x)\ge\varphi(0)=0$，可得 $g(x)\ge(2x+1)\varphi(x)\ge 0$，因此 a 的范围是 $[1,+\infty)$.

26.【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，求导得 $f'(x)=\frac{e^x}{e}+\frac{1}{x}-a$，令 $g(x)=f'(x)=\frac{e^x}{e}+\frac{1}{x}-a$，则

$g'(x)=\frac{e^x}{e}-\frac{1}{x^2}$，$g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，且 $g'(1)=0$，$x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

(2) 由 (1) $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，即 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，则 $x\ge 1$ 时，$g(x)\ge g(0)=2-a$，即 $f'(x)\ge 2-a$，所以 $a\le 2$ 时，$f'(x)\ge 0$，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上递增，$f(x)\ge f(1)=0$，符合题意；$a>2$ 时，$f'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上递增，$f'(1)=2-a<0$，$f'(1+\ln a)=\frac{1}{\ln a+1}>0$，故存在 $x_0\in(1,1+\ln a)$ 时，$f'(x_0)=0$，则 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，此时 $f(x)\le f(1)=0$，舍去. 综上，若 $x\ge 1$ 时，$f(x)\ge 0$ 恒成立，则 $a\le 2$.

专题 12 导数中的差值比值问题

达标训练

1.【解析】(1) $f'(x)=6x^2-2ax=6x(x-\frac{a}{3})$．令 $f'(x)=6x(x-\frac{a}{3})=0$，解得 $x=0$，或 $\frac{a}{3}$．

①$a=0$ 时，$f'(x)=6x^2\geq 0$，函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增．②$a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(\frac{a}{3},+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,\frac{a}{3})$ 上单调递减．③$a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{a}{3})$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\frac{a}{3},0)$ 上单调递减．

(2) 由 (1) 可得：①$a\leq 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增．则 $f(0)=b=-1$，$f(1)=2-a+b=1$，解得 $b=-1$，$a=0$，满足条件．②$a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{a}{3}]$ 上单调递减．$\frac{a}{3}\geq 1$，即 $a\geq 3$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减．则 $f(0)=b=1$，$f(1)=2-a+b=-1$，解得 $b=1$，$a=4$，满足条件．③$0<\frac{a}{3}<1$，即 $0<a<3$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{a}{3})$ 上单调递减，在 $(\frac{a}{3},1]$ 上单调递增．则最小值 $f(\frac{a}{3})=2\times(\frac{a}{3})^3-a\times(\frac{a}{3})^2+b=-1$，化为：$-\frac{a^3}{27}+b=-1$．而 $f(0)=b$，$f(1)=2-a+b$，所以最大值为 b 或 $2-a+b$．若：$-\frac{a^3}{27}+b=-1$，$b=1$，解得 $a=3\sqrt[3]{2}>3$，矛盾，舍去．若：$-\frac{a^3}{27}+b=-1$，$2-a+b=1$，解得 $a=\pm 3\sqrt{3}$，或 0，矛盾，舍去．综上可得：存在 a，b，使得 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 -1 且最大值为 1．a，b 的所有值为：$\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}$，或 $\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}$．

2.【解析】(1) $m=-3$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\ln x$，$x>0$．$f'(x)=x-3+\frac{1}{x}=\frac{x^2-3x+1}{x}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$．可得：函数 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上单调递增，在 (x_1,x_2) 上单调递减．

(2) $f'(x)=x+m+\frac{1}{x}=\frac{x^2+mx+1}{x}$．可知：$x_1$，$x_2$ 是方程 $x^2+mx+1=0$ 的两个实数根，所以 $x_1+x_2=-m$，$x_1x_2=1$．$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{2}x_1^2+mx_1+\ln x_1-(\frac{1}{2}x_2^2+mx_2+\ln x_2)=\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)-(x_1+x_2)(x_1-x_2)+\ln\frac{x_1}{x_2}=-\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)+\ln\frac{x_1}{x_2}$ $=-\frac{1}{2}\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1x_2}+\ln\frac{x_1}{x_2}=-\frac{1}{2}(\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1})+\ln\frac{x_1}{x_2}$ 令 $\frac{x_1}{x_2}=t\in(0,1)$，且 $m\leq-\frac{3\sqrt{2}}{2}$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\ln t-\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$．令 $g(t)=\ln t-\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$，$t\in(0,1)$，则 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})=-\frac{(t-1)^2}{2t^2}<0$，可得函数 $g(t)$ 在 $t\in(0,1)$ 上单调递减，由 $m\leq-\frac{3\sqrt{2}}{2}$，可得：$(x_1+x_2)^2\geq\frac{9}{2}$，所以 $x_1^2+x_2^2\geq\frac{5}{2}$．即 $\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}\geq\frac{5}{2}$，所以 $t+\frac{1}{t}\geq\frac{5}{2}$．结合 $t\in(0,1)$，解得 $0<t\leq\frac{1}{2}$．所以 $g(t)$ 的最小值为：$g(\frac{1}{2})=-\ln 2-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-2)=\frac{3}{4}-\ln 2$．故 $f(x_1)-f(x_2)$ 的最小值为 $\frac{3}{4}-\ln 2$．

3.【解析】(1) 因为 $f'(x)=1+\frac{1}{x},k=2$，切线方程为 $2x-y-1=0$．

(2) 因为 $g(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-3x$ 所以 $g'(x)=\frac{1}{x}+x-3=\frac{x^2-3x+1}{x}$，由题知 $g'(x)<0$，因为 $x>0$ 所以 $\frac{3-\sqrt{2}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{2}}{2}$，$g(x)$ 的单调递减区间是 $(\frac{3-\sqrt{2}}{2},\frac{3+\sqrt{2}}{2})$．

(3) 因为 $g'(x)=\frac{1}{x}+x-(b-1)=\frac{x^2-(b-1)x+1}{x}$，令 $g'(x)=0$，得 $x^2-(b-1)x+1=0$，又由 x_1，$x_2(x_1<x_2)$

是函数 $g(x)$ 的两个极值点，所以 x_1，$x_2(x_1<x_2)$ 是 $x^2-(b-1)x+1=0$ 的两个根，即 $x_1+x_2=b-1$，$x_1x_2=1$，

$g(x_1)-g(x_2)=[\ln x_1+\frac{1}{2}x_1^{\ 2}-(b-1)x_1]-[\ln x_2+\frac{1}{2}x_2^{\ 2}-(b-1)x_2]=\ln\frac{x_1}{x_2}+\frac{1}{2}(x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2})-(b-1)(x_1-x_2)$

$=\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{1}{2}(x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2})=\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{1}{2}(\frac{x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}}{x_1x_2})=\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{1}{2}(\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1})$

令 $t=\frac{x_1}{x_2}$，则 $g(x_1)-g(x_2)=h(t)=\ln t-\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$，因为 $0<x_1<x_2$，所以 $t=\frac{x_1}{x_2}\in(0,1)$

又 $b\geq\frac{7}{2}$，所以 $b-1\geq\frac{5}{2}$，所以 $(b-1)^2=(x_1+x_2)^2=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=t+\frac{1}{t}+2\geq\frac{25}{4}$

整理有 $4t^2-17t+4\geq0$，解得 $-\frac{1}{4}\leq t\leq\frac{1}{4}$，所以 $t\in(0,\frac{1}{4}]$，而 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})=-\frac{(t-1)^2}{2t^2}<0$，

所以 $h(t)$ 在 $(0,\frac{1}{4}]$ 单调递减，$h(t)\geq h(\frac{1}{4})=\frac{15}{8}-2\ln2$ 故 $g(x_1)-g(x_2)$ 的最小值是 $\frac{15}{8}-2\ln2$．

4.【解析】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ 则 $f'(x)=x-a+\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax+a}{x}$．

当 $a>4$ 时，方程 $x^2-ax+a=0$ 有两个根 $x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2}>0,x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}$，

显然 $0<x<\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2}$ 或 $x>\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}$ 时，$f'(x)>0$；$\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2}<x<\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}$ 时，$f'(x)<0$．

所以 $f(x)$ 的增区间为 $(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2})$ 和 $(\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2},+\infty)$，减区间为 $(\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2})$．

当 $0<a\leq4$ 时，则 $x^2-ax+a\geq0$，所以 $f'(x)\geq0$，故函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0,+\infty)$．当 $a<0$ 时，方程 $x^2-ax+a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有一个根 $x=\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}$，当 $0<x<\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}$ 时，$f'(x)>0$；故函数 $f(x)$ 的减区间为 $(0,\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2})$，增区间为 $(\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2},+\infty)$．

(2) 若 $a\geq\frac{9}{2}$，且 x_1，$x_2(x_1<x_2)$ 是函数 $f(x)$ 的两个极值点，则 x_1，x_2 即为方程方程 $x^2-ax+a=0$ 的两根；

所以 $x_1+x_2=a$，$x_1x_2=a$．即 $\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+2=a\geq\frac{9}{2}$，所以 $0<t\leq\frac{1}{2}$．

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)-a(x_1-x_2)+a\ln\frac{x_1}{x_2}=-\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)+a\ln\frac{x_1}{x_2}=-\frac{1}{2}a\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1x_2}+a\ln\frac{x_1}{x_2}$

$=-\frac{1}{2}a[(\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1})-2\ln\frac{x_1}{x_2}]$，令 $t=\frac{x_1}{x_2}(0<t\leq\frac{1}{2})$，则 $f(x_1)-f(x_2)=g(t)=-\frac{1}{2}a(t-\frac{1}{t}-2\ln t)$，

所以 $g'(t)=-\frac{1}{2}a(1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t})=-\frac{(t-1)^2}{2a}<0$，所以 $g(t)$ 在 $(0,\frac{1}{2}]$ 为减函数．即 $g(t)_{\min}=-\frac{3}{4}a-a\ln2$．

故 $f(x_1)-f(x_2)$ 的最小值为 $-\frac{3}{4}a-a\ln2$．

5.(1) 证明：因为 $b=a+2(a>0)$，所以 $f'(x)=2x-b+\frac{a}{x}=2x-2-a+\frac{a}{x}=\frac{(x-1)(2x-a)}{x}$．

由 $f'(x)=0$ 可得 $x_1=1$，$x_2=\frac{a}{2}$，又由 $|x_1-x_2|>1$，知 $\frac{a}{2}>2$，所以 $f(x)$ 在 $[1,\frac{a}{2}]$ 上单调递减，

即 $|f(x_1)-f(x_2)|=f(1)-f(\frac{a}{2})=\frac{a^2}{4}-a\ln\frac{a}{2}-1$．令 $t=\frac{a}{2}>2$，记 $h(t)=t^2-2t\ln t-1$，则 $h'(t)=2t-2\ln t-2$．

所以 $h''(t)=2-\frac{2}{t}=\frac{3(t-1)}{2}>0$，即 $h'(t)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增；所以 $h'(t)>h'(2)=2(-\ln2)>0$，则 $h(t)$ 在

$(2,+\infty)$ 上单调递增；即 $h(t)>h(2)=3-4\ln 2>0$，所以 $|f(x_1)-f(x_2)|>3-4\ln 2$．

（2）【解析】$g(x)=x^3-bx^2+ax\ln x$，所以 $g'(x)=3x^2-2bx+a\ln x+a$，

因为 $g(x)$ 在 $[1,e]$ 上不单调，所以 $g'(x)$ 在 $(1,e)$ 上有正有负，即 $g'(x)$ 在 $(1,e)$ 上有解，

故 $2b=\dfrac{3x^2+a\ln x+a}{x}$，$x\in(1,e)$，因为 $2b+\dfrac{1}{a}\le 4e$ 恒成立，记 $F(x)=3x+\dfrac{a+a\ln x}{x}+\dfrac{1}{a}$，则 $F'(x)=a(\dfrac{3}{a}-\dfrac{\ln x}{x^2})$，记 $G(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$，所以 $G'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$，即 $G(x)$ 在 $(1,\sqrt{e})$ 上单调增，在 $(\sqrt{e},e)$ 上单调减 $G(x)_{\max}=G(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}$．(i) 当 $\dfrac{3}{a}\ge\dfrac{1}{2e}$ 即 $a\le 6e$ 时，$F'(x)\ge 0$ 恒成立，$F(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调增，所以 $F(e)=3e+\dfrac{2a}{e}+\dfrac{1}{a}\le 4e$，即 $2a^2-e^2a+e\le 0$，则 $\dfrac{e^2-\sqrt{e^4-8e}}{4}\le a\le\dfrac{e^2+\sqrt{e^4-8e}}{4}$．(ii) 当 $a>6e$ 时，$F(\sqrt{e})=3\sqrt{e}+\dfrac{3a}{2\sqrt{e}}+\dfrac{1}{a}>3\sqrt{e}+\dfrac{3\cdot 6e}{2\sqrt{e}}=12\sqrt{e}>4e$，故不满题意．综上所述，$a\in[\dfrac{e^2-\sqrt{e^4-8e}}{4},\dfrac{e^2+\sqrt{e^4-8e}}{4}]$．

6．【解析】（1）证明：当 $a=0$ 时，$f(x)\le x-1$ 等价于 $\ln x\le x-1$，即证 $x-\ln x-1\ge 0$，

令 $g(x)=x-\ln x-1$，则 $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增；所以 $g(x)_{min}=g(1)=0$，则 $g(x)\ge 0$，即 $x-\ln x-1\ge 0$，得证；

（2）令 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+(2x-1)a=0$，则 $2ax^2-ax+1=0$ 的两根分别为 x_1，x_2，所以 $\begin{cases}\Delta=a^2-8a>0\\ x_1+x_2=\dfrac{1}{2}>0\\ x_1x_2=\dfrac{1}{2a}>0\end{cases}$，解得 $a>8$，

即 $f(x_1)+f(x_2)=\ln x_1x_2+a(x_1{}^2-x_1+x_2{}^2-x_2)=\ln\dfrac{1}{2a}+a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-(x_1+x_2)]=-\ln 2a+a(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2})$

$=-\ln 2a-\dfrac{a}{4}-1=g(a)$，显然 $g(x)$ 在 $(8,+\infty)$ 上递减，所以 $g(a)<g(8)=-\ln 16-2-1=-4\ln 2-3$，

故 $k\ge -4\ln 2-3$；

（3）当 $a<0$ 时，$f'(x)=\dfrac{2ax^2-ax+1}{x}$，令 $f'(x)=0$，则 $2ax^2-ax+1=0$，所以其中只有一个正实数根，

$x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-8a}}{4a}$，$2ax_1{}^2-ax_1+1=0$，则 $a=\dfrac{1}{x_1-2x_1{}^2}(x_1>\dfrac{1}{2})$，且当 $0<x<x_1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，

当 $x>x_1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单减，所以 $f(x)_{\max}=f(x_1)=\ln x_1+\dfrac{x_1-1}{1-2x_1}$，令 $h(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{1-2x}$，

$h'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1-2x+2(x-1)}{(1-2x)^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{(1-2x)^2}=\dfrac{(4x-1)(x-1)}{x(1-2x)^2}(x>\dfrac{1}{2})$，令 $h'(x)=0$，解得 $x=1$，当 $x\in(\dfrac{1}{2},1)$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 递减；当 $x\in(1,+\infty)$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 递增，所以 $h(x)_{\min}=h(1)=0$，即 $f(x)_{\max}\ge 0$，

①当 $f(x)_{\max}=0$，即 $x_1=1$ 时，$a=-1$，此时 $f(x)$ 只有一个零点 $x=1$；②当 $f(x)_{\max}>0$，即 $a<0$ 且 $a\ne -1$ 时，此时 $f(x_1)>0$，注意 $f(1)=0$，(i) 当 $a<-1$ 时，$0<x_1<1$，而

$\ln x+a(x_2-x)<x-1+a(x_2-x)=(x-1)(1+ax)$，令 $(x-1)(1+ax)=0$，解得 $x=-\dfrac{1}{a}$，取 $x_0=-\dfrac{1}{a}$ 知 $f(x_0)<0$，

所以 $f(x)$ 在 (x_0,x_1) 上有一个零点，另一个零点为 1；(ii) 当 $-1<a<0$，即 $x_1>1$ 时，此时取 $x_0{}'=-\dfrac{1}{a}$，知 $f(x_0{}')<0$，所以 $f(x)$ 有一个零点为 1，另一个零点在 $(x_1,x_0{}')$ 上；故 $a=-1$ 时 $f(x)$ 有一个零点，当 $a<0$ 且 $a\ne -1$ 时，$f(x)$ 有两个零点．

7.【解析】(1) 因为 $f(x)=4x-a\ln x-\frac{1}{2}x^2-2$，所以 $f'(x)=4-\frac{a}{x}-x$，则 $f'(1)=3-a=2$，所以 a 的值为1

(2) $f'(x)=4-\frac{a}{x}-x=-\frac{x^2-4x+a}{x}$，函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，①若 $16-4a\le 0$，即 $a\ge 4$，则 $f'(x)\le 0$，此时 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0,+\infty)$；②若 $16-4a>0$，即 $0<a<4$，则 $f'(x)=0$ 的两根为 $2\pm\sqrt{4-a}$，此时 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,2-\sqrt{4-a})$，$(2+\sqrt{4-a},+\infty)$，单调减区间为 $(2-\sqrt{4-a},2+\sqrt{4-a})$

(3) 由 (2) 知，当 $0<a<4$ 时，函数 $y=f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=a$.

因为 $f(x_1)+f(x_2)=4x_1-a\ln x_1-\frac{1}{2}x_1^2-2+4x_2-a\ln x_2-\frac{1}{2}x_2^2-2=4(x_1+x_2)-a\ln(x_1x_2)-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)-4$

$=16-a\ln a-\frac{1}{2}(4^2-2a)-4=4+a-a\ln a$，要证 $f(x_1)+f(x_2)<6-\ln a$，只需证 $a\ln a-a-\ln a+2>0$

构造函数 $g(x)=x\ln x-x-\ln x+2$，则 $g'(x)=1+\ln x-1-\frac{1}{x}=\ln x-\frac{1}{x}$，$g'(x)$ 在 $(0,4)$ 上单调递增，又 $g'(1)=-1<0$，$g'(2)=\ln 2-\frac{1}{2}>0$，且 $g'(x)$ 在定义域上不间断，由零点存在定理，可知 $g'(x)=0$ 在 $(1,2)$ 上唯一实根 x_0，且 $\ln x_0=\frac{1}{x_0}$，则 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上递减，$(x_0,4)$ 上递增，所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(x_0)$，

因为 $g(x_0)=1-x_0-\frac{1}{x_0}+2=3-(x_0+\frac{1}{x_0})$，当 $x_0\in(1,2)$ 时，$x_0+\frac{1}{x_0}\in(2,\frac{5}{2})$，则 $g(x_0)>0$，所以 $g(x)\ge g(x_0)>0$ 恒成立．所以 $a\ln a-a-\ln a+2>0$，所以 $f(x_1)+f(x_2)<6-\ln a$，得证．

8.【解析】(1) $f'(x)=2x-2+\frac{a}{x}=\frac{2x^2-2x+a}{x}(x>0)$，令 $f'(x)=0$，得 $2x^2-2x+a=0$，①当 $\Delta=4-8a\le 0$，即 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)\ge 0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；②当 $\Delta=4-8a>0$ 即 $a<\frac{1}{2}$ 时，由 $2x^2-2x+a=0$，得 $x=\frac{1\pm\sqrt{1-2a}}{2}$，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}$ 或 $x>\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}$，由 $f'(x)<0$，得 $\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}$，当 $a\le 0$ 时，$\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}\le 0$，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2})$ 递减，在 $(\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2},+\infty)$ 递增，当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，得 $\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}>0$，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2})$ 递减，在 $(\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2})$ 递增，在 $(\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2},+\infty)$ 递减；综上，当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$；当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2})$，$(\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2},+\infty)$，单调递减区间是 $(\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2})$；$a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2})$ 递减，在 $(\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2},+\infty)$ 递增；

(2) 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个极值点，由 (1) 可得 $0<a<\frac{1}{2}$，由 $f'(x)=0$，得 $2x^2-2x+a=0$，则 $x_1+x_2=1$，$x_1=\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}$，由 $0<a<\frac{1}{2}$，可得 $0<x_1<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<x_2<1$，$\frac{f(x_1)}{x_2}=1-x_1+\frac{1}{x_1-1}+2x_1\ln x_1$，令 $h(x)=1-x+\frac{1}{x-1}+2x\ln x$，$(0<x<\frac{1}{2})$，$h'(x)=-1-\frac{1}{(x-1)^2}+2\ln x$，

由 $0<x<\frac{1}{2}$，则 $-1<x-1<-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}<(x-1)^2<1$，$-4<-\frac{1}{(x-1)^2}<-1$，又 $2\ln x<0$，则 $h'(x)<0$，即 $h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 递减，即有 $h(x)>h(\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}-\ln 2$，即 $\frac{f(x)}{x}>-\frac{3}{2}-\ln 2$，即有实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-\frac{3}{2}-ln2]$.

9.【解析】（1）$f'(x)=\frac{m}{x}-1-\frac{m}{x^2}=-\frac{x^2-mx+m}{x^2}$，令 $g(x)=x^2-mx+m$，$\Delta=m^2-4m=m(m-4)$，

①当 $0\le m\le 4$ 时，$\Delta\le 0$，$g(x)\ge 0$ 恒成立，则 $f'(x)\le 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，②当 $m<0$ 时，$\Delta>0$ 函数 $g(x)$ 与 x 轴有两个不同的交点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，且 $x_1+x_2=m<0$，$x_1x_2=m<0$，所以 $x_1<0$，$x_2>0$，又因为 $x\in(0,+\infty)$，所以当 $x\in(0,\frac{m+\sqrt{m^2-4m}}{2})$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(\frac{m+\sqrt{m^2-4m}}{2},+\infty)$ 时 $g(x)>0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，③当 $m>4$ 时，$\Delta>0$，函数 $g(x)$ 与 x 轴有两个不同的交点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，且 $x_1+x_2=m>0$，$x_1x_2=m>0$，所以 $x_1>0$，$x_2>0$，又因为 $x\in(0,+\infty)$，所以 $x\in(0,\frac{m-\sqrt{m^2-4m}}{2})$ 时，$f(x)$ 单调递减，$x\in(\frac{m-\sqrt{m^2-4m}}{2},\frac{m+\sqrt{m^2-4m}}{2})$ 时，$f(x)$ 单调递增；$x\in(\frac{m+\sqrt{m^2-4m}}{2},+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递减，综上所述：当 $0\le m\le 4$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减．当 $m<0$ 时，$x\in(0,\frac{m+\sqrt{m^2-4m}}{2})$ 时 $f(x)$ 单调递增；$x\in(\frac{m+\sqrt{m^2-4m}}{2},+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递减．当 $m>4$ 时，$x\in(0,\frac{m-\sqrt{m^2-4m}}{2})$ 时，$f(x)$ 单调递减，$x\in(\frac{m-\sqrt{m^2-4m}}{2},\frac{m+\sqrt{m^2-4m}}{2})$ 时，在 $(0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递减；

（2）由（1）知：$m>4$ 时 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，且 x_1，x_2 为方程 $x^2-mx+m=0$ 的两根，$x_1+x_2=m$，$x_1x_2=m$，$f(x_1)+f(x_2)=m\ln x_1-x_1+\frac{m}{x_1}+m\ln x_2-x_2+\frac{m}{x_2}=m\ln x_1x_2-(x_1+x_2)+\frac{m(x_1+x_2)}{x_1x_2}=m\ln m-m+m=m\ln m$，$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=m^2-2m$，所以 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{x_1^2+x_2^2}=\frac{m\ln m}{m^2-2m}=\frac{\ln m}{m-2}$，即 $a>\frac{\ln m}{m-2}$ 在 $m\in(4,+\infty)$ 上恒成立，令 $h(m)=\frac{\ln m}{m-2}(m>4)$ 则 $h'(m)=\frac{1-\frac{2}{m}-\ln m}{(m-2)^2}$，令 $\varphi(m)=1-\frac{2}{m}-\ln m$，则 $\varphi'(m)=\frac{2}{m^2}-\frac{1}{m}=\frac{2-m}{m^2}<0$，所以 $\phi(m)$ 在 $(4,+\infty)$ 上单调递减，且 $\phi(4)=1-\frac{1}{2}-2\ln 2<0$，所以 $\phi(m)<0$ 在 $(4,+\infty)$ 上恒成立，即 $1-\frac{2}{m}-\ln m<0$ 所以 $h'(m)<0$ 所以 $h(m)$ 在 $(4,+\infty)$ 上为减函数，所以 $h(m)<h(4)=\ln 2$，则 $a\ge h(4)=\ln 2$，即 $a\ge\ln 2$．

10.【解析】（1）当 $b=1$，则 $f(x)=\frac{e^x}{ax^2+x+1}$，$f'(x)=\frac{e^x\cdot ax\cdot(x+\frac{1-2a}{a})}{(ax^2+x+1)^2}$，当 $0<a\le\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)\ge 0$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)\ge f(0)=1$；当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[0,\frac{2a-1}{a}]$ 上单调递减，在 $[\frac{2a-1}{a},+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)_{min}=f(\frac{2a-1}{a})<f(0)=1$，不成立，所以实数 a 的取值范围为 $(0,\frac{1}{2}]$．

（2）证明：当 $b=0$ 时，$f(x)=\frac{e^x}{ax^2+1}$，$f'(x)=\frac{e^x(ax^2-2ax+1)}{(ax^2+1)^2}$，因为函数 $f(x)$ 存在两个极值点，所以 $4a^2-4a>0$，即 $a>1$，由题意知，x_1，x_2 为方程 $ax^2-2ax+1=0$ 的两根，故 $x_1+x_2=2,x_1x_2=\frac{1}{a}$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $0<x_1<1<x_2<2$，$f(x_1)+f(x_2)=\frac{e^{x_1}}{ax_1^2+1}+\frac{e^{x_2}}{ax_2^2+1}=\frac{e^{x_1}\cdot x_2+e^{x_2}\cdot x_1}{2}$，由（1）知，当 $b=1$，$a=\frac{1}{2}$，$x\ge 0$，$\frac{e^x}{ax^2+x+1}\ge 1$，即 $e^x\ge\frac{1}{2}x^2+x+1$（当且仅当 $x=0$ 时取等号），所以当 $x>0$ 时，恒有

$e^x>\frac{1}{2}x^2+x+1$ $f(x_1)+f(x_2)>\frac{1}{2}[x_1(\frac{1}{2}x_2^{\ 2}+x_2+1)+x_2(\frac{1}{2}x_1^{\ 2}+x_1+1)]=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}x_1x_2(x_1+x_2+4)+x_1+x_2]=\frac{1}{2}(\frac{6}{2a}+2)=\frac{3}{2a}+1$，

又 $f(x_1)+f(x_2)=\frac{x_1e^{x_2}+x_2e^{x_1}}{2}=\frac{1}{2}[x_1e^{2-x_1}+(2-x_1)e^{x_1}]$，令 $h(x)=xe^{2-x}+(2-x)e^x(0<x<1)$，则 $h'(x)=(1-x)(e^x+e^{2-x})>0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$h(x)\le h(1)=2e$，从而 $f(x_1)+f(x_2)<e$，

综上可得：$1+\frac{3}{2a}<f(x_1)+f(x_2)<e$．

11.(1)【解析】$f'(x)=-\frac{1}{x}-2ax+1$，由题意可得：$f'(1)=-1-2a+1<0$，可得 $a>0$．所以 $f'(x)=\frac{-2ax^2+x-1}{x}$，令 $g(x)=-2ax^2+x-1$．$\Delta=1-8a$，由 $\Delta\le0$，解得 $a\ge\frac{1}{8}$ 时，$f'(x)\le0$，此时函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减．由 $\Delta>0$，解得 $0<a<\frac{1}{8}$ 时，$f'(x)=\frac{-2a(x-x_1)(x-x_2)}{x}$．其中 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a}$．$0<x_1<x_2$．可得：函数 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递增，在 (x_1,x_2) 上单调递增，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减．

(2) 证明：$f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，所以 x_1，x_2 满足 $2ax^2-x+1=0$，$0<a<\frac{1}{8}$，则 $2ax_1^2-x_1+1=0$，$2ax_2^2-x_2+1=0$，得 $x_1+x_2=\frac{1}{2a}$，$x_1x_2=\frac{1}{2a}$；$f(x_1)+f(x_2)=-\ln x_1-ax_1^2+x_1-\ln x_2-ax_2^2+x_2$

$=-\ln(x_1x_2)+\frac{x_1+x_2}{2}+1=-\ln\frac{1}{2a}+\frac{1}{4a}+1$，令 $g(t)=-\ln t+\frac{1}{2}t+1$，$t=\frac{1}{2a}\in(4,+\infty)$．$g'(t)=-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}=\frac{t-2}{2t}>0$，所以 $g(t)$ 在 $t\in(4,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(t)>g(4)=3-2\ln2$．

12.【解析】(1) 当 $m=2$ 时，$f(x)=\frac{2x^2+1}{e^x}$，所以 $f'(x)=\frac{2x^2-4x+1}{e^x}$，由 $f'(x)<0$ 得，$x<1-\frac{\sqrt2}{2}$ 或 $x>1+\frac{\sqrt2}{2}$，由 $f'(x)>0$ 得，$1-\frac{\sqrt2}{2}<x<1+\frac{\sqrt2}{2}$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,1-\frac{\sqrt2}{2})$，$(1+\frac{\sqrt2}{2},+\infty)$，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(1-\frac{\sqrt2}{2},1+\frac{\sqrt2}{2})$．

(2) 证明：因为函数 $f(x)=\frac{mx^2+1}{e^x}$，所以 $f'(x)=-\frac{mx^2-2mx+1}{e^x}=0$，则 $f'(x)=0$ 得两根为 x_1、x_2，即

$\begin{cases}mx_1^{\ 2}-2mx_1+1=0\\mx_2^{\ 2}-2mx_2+1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_1\cdot x_2=\frac{1}{m}\\x_1+x_2=2\end{cases}$，所以

$f(x_1)+f(x_2)=\frac{mx_1^{\ 2}+1}{e^{x_1}}+\frac{mx_2^{\ 2}+1}{e^{x_2}}=\frac{2mx_1}{e^{x_1}}+\frac{2mx_2}{e^{x_2}}\ge4m\sqrt{\frac{x_1\cdot x_2}{e^{x_1+x_2}}}=\frac{4}{e}\sqrt{m}>\frac{4}{e}$，即 $\frac{4}{e}<f(x_1)+f(x_2)$ 成立．下面只需证明 $f(x_1)+f(x_2)=\frac{2mx_1}{e^{x_1}}+\frac{2mx_2}{e^{x_2}}=\frac{2mx_1}{e^{x_1}}+\frac{2m(2-x_1)}{e^{2-x_1}}<\frac{4m}{e}$，即证 $\frac{x_1}{e^{x_1}}+\frac{2-x_1}{e^{2-x_1}}<\frac{2}{e}$，设

$g(x)=\frac{x}{e^x}+\frac{2-x}{e^{2-x}}$，所以 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}+\frac{1-x}{e^{2-x}}=(1-x)(\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{2-x}})=0$，得 $x=1$，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，当 $x<1$ 时，$g'(x)>0$，即 $g(x)_{\max}=g(1)=\frac{2}{e}$，又当 $x_1=1$ 时，必有 $m=1$，$x_2=1$，与题意不符合．则有 $g(x_1)<g(1)=\frac{2}{e}$，命题得证．综上不等式 $\frac{4}{e}<f(x_1)+f(x_2)<\frac{4m}{e}$ 成立．

13.【解析】(1) 由题可知 $f'(x)=e^x-2ax$，令 $e^x-2ax=0$，得 $a=\frac{e^x}{2x}$，记 $g(x)=\frac{e^x}{2x}$，则 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{2x^2}$

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)<0$；$x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$；$x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

所以$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，又$g(1)=\frac{e}{2}$，$x\to-\infty$时，$g(x)\to 0$；$x\to 0$时，$g(x)\to\infty$；$x\to+\infty$时，$g(x)\to+\infty$，所以当$a>\frac{e}{2}$时，函数$f(x)$有2个极值点；当$0\le a\le\frac{e}{2}$时，函数$f(x)$无极值点；当$a<0$时，函数$f(x)$有1个极值点；

（2）当$a=1$时，设$f(\frac{x_1}{2e})+(\frac{x_1}{2e})^2=\ln\frac{x_2}{2}=m$，则$e^{\frac{x_1}{2e}}=\ln\frac{x_2}{2}=m$，因为$x_1\in R$，所以$e^{\frac{x_1}{2e}}>0$，即$m>0$，故$\frac{x_1}{2e}=\ln m$，$\ln\frac{x_2}{2}=m$，所以$x_1=2e\ln m$，$x_2=2e^m$，即$x_2-x_1=2e^m-2e\ln m(m>0)$．

令$h(x)=2e^x-2e\ln x(x>0)$，则$h'(x)=2e^x-\frac{2e}{x}$，因为$y=2e^x$与$y=-\frac{2e}{x}$在$(0,+\infty)$均单调递增，所以$h'(x)$在$(0,+\infty)$均单调递增，且$h'(1)=0$，所以当$x>1$时，$h'(x)>0$，当$0<x<1$时，$h'(x)<0$，即$h(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，所以当$x=1$时，$h(x)$取最小值，此时$h(1)=2e$，即x_2-x_1的最小值为$2e$．

14.【解析】(1) 因为$f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-ax$，所以$f'(x)=e^x-x-a$．设$g(x)=e^x-x-a$，则令$g'(x)=e^x-1=0$，解得$x=0$．所以当$x\in(-\infty,0)$时，$g'(x)<0$；当$x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)>0$．所以$g(x)_{min}=g(0)=1-a$ $g'(x)=e^x-1$．当$a\le 1$时，$g(x)=f'(x)\ge 0$，即函数$f(x)$单调递增，没有极值点；当$a>1$时，$g(0)=1-a<0$，且当$x\to-\infty$时，$g(x)\to+\infty$；当$x\to+\infty$时，$g(x)\to+\infty$．所以当$a>1$时，$g(x)=f'(x)=e^x-x-a$有两个零点x_1，x_2．不妨设$x_1<x_2$，则$x_1<0<x_2$．所以当函数$f(x)$有两个极值点时，a的取值范围为$(1,+\infty)$．

（2）由（I）知，x_1，x_2为$g(x)=0$的两个实数根，$x_1<0<x_2$，$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减．下面先证$x_1<-x_2<0$，只需证$g(-x_2)<g(x_1)=0$．因为$g(x_2)=e^{x_2}-x_2-a=0$，得$a=e^{x_2}-x_2$，所以$g(-x_2)=e^{-x_2}+x_2-a=e^{-x_2}-e^{x_2}+2x_2$．设$h(x)=e^{-x}-e^x+2x$，$x>0$，则$h'(x)=-\frac{1}{e^x}-e^x+2<0$，即$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，所以$h(x)<h(0)=0$，则$h(x_2)=g(-x_2)<0$，即$x_1<-x_2<0$．因为函数$f(x)$在$(x_1,0)$上也单调递减，所以$f(x_1)>f(-x_2)$．即要证$f(x_1)+f(x_2)>2$，只需证$f(-x_2)+f(x_2)>2$，即证$e^{x_2}+e^{-x_2}-x_2^2-2>0$．设函数$k(x)=e^x+e^{-x}-x^2-2$，$x\in(0,+\infty)$，则$k'(x)=e^x-e^{-x}-2x$．设$\varphi(x)=k'(x)=e^x-e^{-x}-2x$，则$\varphi'(x)=e^x+e^{-x}-2>0$，所以$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，则$\varphi(x)>\varphi(0)=0$，即$k'(x)>0$．所以$k(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，即$k(x)>k(0)=0$．所以当$x\in(0,+\infty)$时，$e^x+e^{-x}-x^2-2>0$，则$e^{x_2}+e^{-x_2}-x_2^2-2>0$，所以$f(-x_2)+f(x_2)>2$，故$f(x_1)+f(x_2)>2$．

15.【解析】(1) $f'(x)=a\cdot e^x-x$，由题意可得，$f'(0)=a=1$，$f(0)=a-b=-1$，所以$a=1$，$b=2$，

（2）由题意可得，$f'(x)=a\cdot e^x-x=0$有2个零点x_1，x_2，令$g(x)=a\cdot e^x-x$，则$g'(x)=a\cdot e^x-1$，当$a\le 0$时，$g'(x)<0$恒成立，故$g(x)$单调递减，没有极值，当$a>0$时，若$x<-\ln a$，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，$x>-\ln a$，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，故$g(x)_{min}=g(-\ln a)=1+\ln a$，根据题意可知，$1+\ln a<0$，解可得，$0<a<\frac{1}{e}$，因为$g(0)=a>0$，$g(-\ln a)<0$，且$-\ln a>0$，而$g(x)$在$(-\infty,-\ln a)$上单调递减，有1个零点，易得$e^x>x^2$，又因为$g(x)=a\cdot e^x-x>ax^2-x=ax(x-\frac{1}{a})$，则$g(\frac{2}{a})>\frac{2}{a}>0$，且$g(-\ln a)<0$，而$g(x)$在$(-\ln a,+\infty)$上单调递增，有1个零点，综上可得，$0<a<\frac{1}{e}$，由题意可得，$\begin{cases}ae^{x_1}=x_1\\ae^{x_2}=x_2\end{cases}(0<x_1<x_2)$

所以 $e^{x_1-x_2}=\dfrac{x_1}{x_2}$，令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}\ge 2$，则 $\begin{cases}x_1=\dfrac{\ln t}{t-1}\\ x_2=\dfrac{t\ln t}{t-1}\end{cases}$，令 $h(t)=\dfrac{\ln t}{t-1}$，则 $h'(t)=\dfrac{1-\frac{1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}$，令 $F(t)=1-\ln t-\dfrac{1}{t}$，

则 $F'(t)=\dfrac{1-t}{t^2}<0$，故 $F(t)$ 在 $[2，+\infty)$ 上单调递减，$F(t)\le F(2)=\dfrac{1}{2}-\ln 2$，故 $h(t)$ 在 $[2，+\infty)$ 上单调递减，即 $x_1\in(0，\ln 2]$，因为 $a=\dfrac{x_1}{e^{x_1}}$，$x_1\in(0，\ln 2]$，令 $\varphi(x)=\dfrac{x}{e^x}$，$\varphi'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}>0$ 恒成立，故 $\varphi(x)$ 在 $(0，\ln 2]$ 上单调递增，故 $0<a<\dfrac{1}{2}\ln 2$．

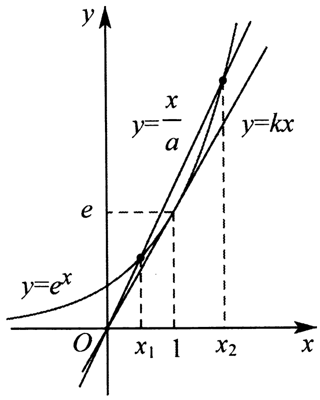
16.【解析】(1) 函数的定义域为 $(0，+\infty)$．由已知可得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-m=\dfrac{1-mx}{x}$，当 $m\le 0$ 时，$f'(x)\ge 0$，故 $f(x)$ 在区间 $(0，+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 无极值；当 $m>0$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\dfrac{1}{m}$；由 $f'(x)<0$，解得 $x>\dfrac{1}{m}$，函数 $f(x)$ 在 $(0，\dfrac{1}{m})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{1}{m}，+\infty)$ 上单调递减，$f(x)$ 的极大值为 $f(\dfrac{1}{m})=-\ln m-1$，无极小值；

(2) 证明：令 $F(x)=e^x-f(x+2)=e^x-\ln(x+2)(x>-2)$，故只需证明 $F(x)>0$，函数 $F'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+2}$ 在 $(-2，+\infty)$ 上为增函数，且 $F'(-1)<0$，$F'(0)>0$，故 $F'(x)=0$ 在 $(-2，+\infty)$ 上有唯一实数根 x_0，且 $x_0\in(-1，0)$，$e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0+2}$，则 $ln(x_0+2)=-x_0$，当 $x\in(-2，x_0)$ 时，$F'(x)<0$，当 $x\in(x_0，+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，从而当 $x=x_0$ 时，$F(x)$ 取得最小值，故 $F(x)\ge F(x_0)=\dfrac{1}{x_0+2}+x_0>0$，综上，$m=0$ 时，$e^x>f(x+2)$；

(3) 证明：因为函数 $g(x)=(x-e)(\ln x-mx)$ 有且只有三个不同的零点，显然 $x=e$ 是其零点，所以函数 $f(x)=\ln x-mx$ 存在两个零点，即 $\ln x-mx=0$ 有两个不等的实数根，可转化为方程 $m=\dfrac{\ln x}{x}$ 在区间 $(0，+\infty)$ 上有两个不等的实数根，即函数 $y=m$ 的图象与函数 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的图象有两个交点，因为 $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，所以由 $h'(x_0)>0$，解得 $0<x<e$，故 $h(x)$ 在 $(0，e)$ 上单调递增；由 $h'(x_0)<0$，解得 $x>e$，故 $h(x)$ 在 $(e，+\infty)$ 上单调递减；故函数 $y=m$ 的图象与 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的图象的交点分别在 $(0，e)$，$(e，+\infty)$ 上，即 $\ln x-mx=0$ 的两个根分别在区间 $(0，e)$，$(e，+\infty)$ 上，所以 $g(x)$ 的三个不同的零点分别是 x_1，e，x_3，且 $0<x_1<e$，$x_3>e$，令 $t=\dfrac{x_3}{x_1}$，则 $t\in(1，e^2]$，由 $\begin{cases}t=\dfrac{x_3}{x_1}\\ \ln x_3=mx_3\\ \ln x_1=mx_1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\ln x_1=\dfrac{\ln t}{t-1}\\ \ln x_3=\dfrac{t\ln t}{t-1}\end{cases}$，

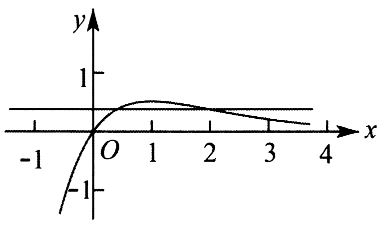
故 $\ln(x_1x_3)=\ln x_1+\ln x_3=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}$，$t\in(1，e^2]$，令 $p(t)=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}$，$t\in(1，e^2]$，则 $p'(t)=\dfrac{t-2\ln t-\frac{1}{t}}{(t-1)^2}$，令 $q(t)=t-2\ln t-\dfrac{1}{t}$，则 $q'(t)=1-\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t^2}>0$，所以 $q(t)$ 在区间 $(1，e^2]$ 上单调递增，即 $q(t)>q(1)=0$，$p'(t)>0$，即 $p(t)$ 在区间 $(1，e^2]$ 上单调递增，即 $p(t)\le p(e^2)=\dfrac{2(e^2+1)}{e^2-1}$，所以 $\ln(x_1x_3)\le\dfrac{2(e^2+1)}{e^2-1}$，即 $x_1x_3\le e^{\frac{2(e^2+1)}{e^2-1}}$．

17.【解析】令 $f(x)=0$ 得 $e^x=\frac{x}{a}$，作出 $y=e^x$ 与 $y=\frac{x}{a}$ 的函数图象，则两图象有 2 个交点，



设 $y=kx$ 与 $y=e^x$ 相切，切点为 $(x_0，y_0)$，则 $\begin{cases}y_0=kx_0\\y_0=e^{x_0}\\e^{x_0}=k\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_0=1\\y_0=e\\k=e\end{cases}$．由 $\frac{1}{a}>e$，解得 $0<a<\frac{1}{e}$．故 A 错误；由图象可知当 a 逐渐增大时，两交点越来越近，即 x_1-x_2 逐渐增大，故 B 错误；由图象可知：当 $a\to 0^+$ 时，$x_2\to+\infty$，故 $x_1+x_2\to+\infty$，而当 $a\to\frac{1}{e}$ 时，$x_1\to 1$，$x_2\to 1$，故 $x_1+x_2\to 2$，显然 D 错误；故选 C．

18.【解析】函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，导数 $f'(x)=ae^x-x=0$ 有两个零点 x_1，x_2，得 $ae^{x_1}=x_1$，$ae^{x_2}=x_2$，两式作比，得 $\frac{e^{x_2}}{e^{x_1}}=\frac{x_2}{x_1}=e^{x_2-x_1}$ ①，令 $x_2-x_1=t$，则 $\frac{x_2}{x_1}=e^t$，②，把 $x_2=x_1e^t$ 代入①，得：$x_1=\frac{t}{e^t-1}$，由②得 $\frac{x_2}{x_1}=e^t\geq 2$，$t\geq\ln 2$，令 $g(t)=\frac{t}{e^t-1}$，$t\geq\ln 2$，则 $g'(t)=\frac{e^t-1-te^t}{(e^t-1)^2}$，令 $h(t)=e^t-1-te^t$，则 $h'(t)=-te^t<0$，则 $h(t)$ 单调递减，故 $h(t)\leq h(\ln 2)=1-2\ln 2<0$，由 $g(t)$ 单调递减，$g(t)\leq g(\ln 2)=\ln 2$，即 $x_1\leq\ln 2$，$a=\frac{x_1}{e^{x_1}}$，令 $\mu(x)=\frac{x}{e^x}$，则 $\mu'(x)=\frac{1-x}{e^x}>0$，$\mu(x)$ 在 $x\leq\ln 2$ 上单调递增，$\mu(x)\leq\frac{\ln 2}{2}$，$a\leq\frac{\ln 2}{2}$，$f'(x)=ae^x-x$ 有两个零点 x_1，x_2，$\mu(x)$ 在 R 上与 $y=a$ 有两个交点，$\mu'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，在 $(-\infty，1)$ 上，$\mu'(x)>0$，$\mu(x)$ 单调递增，在 $(1，+\infty)$ 上，$\mu'(x)<0$，$\mu(x)$ 单调递减，所以 $\mu(x)$ 的最大值为 $\mu(1)=\frac{1}{e}$，大致图象为：



所以 $0<a<\frac{1}{e}$，$0<a\leq\frac{\ln 2}{2}$．所以实数 a 的取值范围是 $(0，\frac{\ln 2}{2}]$．故答案为 $(0，\frac{\ln 2}{2}]$．

19.【解析】(1) 由 $f(x)=\ln\frac{1}{2x}-ax^2+x=-\ln 2x-ax^2+x$，得：$f'(x)=-\frac{1}{x}-2ax+1=\frac{-2ax^2+x-1}{x}$，$x\in(0，+\infty)$，$a>0$ 时，$\Delta=1-8a\leq 0$ 即 $a\geq\frac{1}{8}$ 时，$f'(x)\leq 0$，$f(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 是减函数，$f(x)$ 无极值点．当 $0<a<\frac{1}{8}$ 时，$\Delta=1-8a>0$，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a}$，当 $x\in(0，x_1)$ 和 $x\in(x_2，+\infty)$，$f'(x)<0$，

$x\in(x_1, x_2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 x_1 取得极小值，在 x_2 取得极大值，所以 $f(x)$ 有两个极值点.

综上可知：当 $a\geq\frac{1}{8}$ 时，$f(x)$ 无极值点；当 $0<a<\frac{1}{8}$ 时，$f(x)$ 有两个极值点.

（2）证明：由（1）知，当且仅当 $a\in(0, \frac{1}{8})$ 时，$f(x)$ 有极小值点 x_1 和极大值点 x_2，且 x_1，x_2 是方程 $2ax^2-x+1=0$ 的两根，所以 $x_1+x_2=\frac{1}{2a}$，$x_1x_2=\frac{1}{2a}$，所以

$f(x_1)+f(x_2)=\ln\frac{1}{2x_1}-ax_1^2+x_1+\ln\frac{1}{2x_2}-ax_2^2+x_2=-(\ln 2x_1+\ln 2x_2)-a(x_1^2+x_2^2)+(x_1+x_2)$

$=\ln\frac{a}{2}-\frac{1}{4a}+1+\frac{1}{2a}=\ln a+\frac{1}{4a}+1-\ln 2$，

设 $g(a)=\ln a+\frac{1}{4a}+1-\ln 2$，因为 $a\in(0, \frac{1}{8})$，$g'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{4a^2}=\frac{4a-1}{4a^2}<0$，当 $a\in(0, \frac{1}{8})$ 时，$g(a)$ 是减函数，$g(a)>g(\frac{1}{8})$，$g(a)>\ln\frac{1}{8}+3-\ln 2=3-4\ln 2$，$f(x_1)+f(x_2)>3-4\ln 2$.

20.【解析】(1) 法一：(找点) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$，由 $f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$，下面分两种情况讨论：

（1）$a\leq 0$ 时，$f(x)>0$ 在 R 上恒成立，可得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，不合题意.

（2）$a>0$ 时，由 $f(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}$. 当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 变化情况如下表：

x	$(0, \frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↑	$-\ln a-1$	↓

此时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, \frac{1}{a})$；单调递减区间是 $(\frac{1}{a}, +\infty)$，于是，“函数 $y=f(x)$ 有两个零点”等价于如下条件同时成立. ①有 $f(-\frac{1}{a})=-\ln a-1>0$；②存在 $x_1\in(0, \frac{1}{a})$，满足 $f(x_1)<0$，③存在 $x_2\in(\frac{1}{a}, +\infty)$，满足 $f(x_2)<0$，由 $f(-\frac{1}{a})=-\ln a-1>0$，解得 $0<a<\frac{1}{e}$. 而此时，取 $s_1=1\in(0, \frac{1}{a})$，且 $f(s_1)=-a<0$，取 $s_2=\frac{1}{a^2}$，满足 $s_2\in(\frac{1}{a}, +\infty)$，且 $f(s_2)=2\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}<0$.（事实上可证明不等式 $2\ln x<x$ 恒成立）故 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{e})$.

法二 （参变分离）$a=\frac{\ln x}{x}$，$g(x)=\frac{\ln x}{x}$，$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，易知 $x=1$，$g(x)=0$；$x\to+\infty$，$g(x)\to 0$；$x=e$，$g(x)_{\max}=\frac{1}{e}$，再根据单调性可得 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{e})$.

（2）证明：由 $f(x)=\ln x-ax=0$，得 $a=\frac{\ln x}{x}$，设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ 知 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增，在 $(e, +\infty)$ 上单调递减，并且，当 $x\in(0, 1]$ 时，$g(x)\leq 0$；当 $x\in(1, +\infty)$ 时，$g(x)>0$. 由已知，x_1，x_2 满足 $a=g(x_1)=g(x_2)$，由 $a\in(0, \frac{1}{e})$ 及 $g(x)$ 的单调性，可得 $x_1\in(0, e)$，$x_2\in(e, +\infty)$，对于任意的 a_1，$a_2\in(0, \frac{1}{e})$，设 $a_1>a_2$，$g(\xi_1)=g(\xi_2)=a_1$，其中 $1<\xi_1<e<\xi_2$；$g(\eta_1)=g(\eta_2)=a_2$，其中 $1<\eta_1<e<\eta_2$. 因为 $g(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增，所以由 $a_1>a_2$，即 $g(\xi_1)>g(\eta_1)$，可得 $\xi_1>\eta_1$，类似可得 $\xi_2<\eta_2$. 又由 ξ_1，$\eta_1>0$，得 $\frac{\xi_2}{\xi_1}<\frac{\eta_2}{\xi_1}<\frac{\eta_2}{\eta_1}$，所以 $\frac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的增大而减小.

（3）证明：由 $a=\dfrac{\ln x_1}{x_1}=\dfrac{\ln x_2}{x_2}\Rightarrow\dfrac{\ln x_2}{\ln x_1}=\dfrac{x_2}{x_1}$，设 $\dfrac{x_2}{x_1}=t$，则 $t>1$，且 $\begin{cases}x_2=tx_1\\ \ln x_2=t\ln x_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln x_1=\dfrac{\ln t}{t-1}\\ \ln x_2=\dfrac{t\ln t}{t-1}\end{cases}$，

所以 $\ln x_1x_2=\ln x_1+\ln x_2=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}$．①令 $h(x)=\dfrac{(x+1)\ln x}{x-1}$，$x\in(1,+\infty)$，则 $h'(x)=\dfrac{-2\ln x+x-\dfrac{1}{x}}{(x-1)^2}$，

令 $\mu(x)=-2\ln x+x-\dfrac{1}{x}$，得 $\mu'(x)=(\dfrac{x-1}{x})^2$．当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\mu'(x)>0$．因此 $\mu(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增．故对于任意的 $x\in(1,+\infty)$，$\mu(x)>\mu(1)=0$，由此可得 $h'(x)>0$ 故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增．

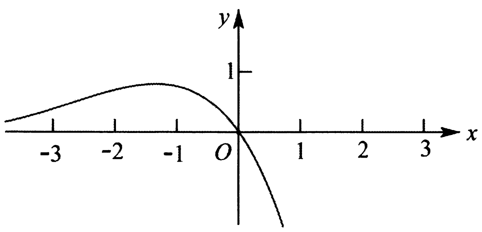
因此，由①可得 $\ln x_1x_2$ 随着 t 的增大而增大，而由（2）t 随着 a 的减小而增大，所以 $\ln x_1x_2$ 随着 a 的增大而减小，而 x_1x_2 随着 $\ln x_1x_2$ 的增大而增大，因此 x_1x_2 随着 a 的增大而减小．

21.【解析】（1）求导 $f'(x)=-ae^{-x}+1$，$g'(x)=x+1$．由于发现 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=2$ 处有相同的切线，得 $\begin{cases}f'(2)=g'(2)\\ f(2)=g(2)\end{cases}$，即 $\begin{cases}-ae^{-2}+1=3\\ ae^{-2}+2=4-b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-2e^2\\ b=4\end{cases}$．

（2）函数 $F(x)=ae^{-x}-\dfrac{1}{2}x^2+b$，则 $F'(x)=-ae^{-x}-x$，其中 x_1，x_2 是方程 $-ae^{-x}-x=0$ 的两根．所以 $-ae^{-x}-x=0\Leftrightarrow a=-xe^x$，设 $p(x)=-xe^x$，则 $p'(x)=-(x+1)e^x$，可知 $p(x)=-xe^x$ 在 $(-\infty,-1)$ 单调递增，$(-1,+\infty)$ 单调递减，即当 $x=-1$ 时，$p(x)$ 取得极大值 $p(-1)=\dfrac{1}{e}$，画图象，可得 $0<a<\dfrac{1}{e}$，且 $x_2<-1$，$-1<x_1<0$，设 $\dfrac{x_2}{x_1}=t$，可得 $x_2=tx_1$，由 $3x_1-x_2\geq0\Rightarrow t\geq3$，则 $\begin{cases}-ae^{-x_1}=x_1\\ -ae^{-x_2}=x_2\end{cases}$，两式相除代入可得 $e^{x_1-x_2}=\dfrac{x_2}{x_1}$，

代入可得，$e^{(1-t)x_1}=t$，两边取对数可得，$x_1=\dfrac{\ln t}{1-t}$．设 $h(t)=\dfrac{\ln t}{1-t}$，则 $h'(t)=\dfrac{\ln t-\dfrac{t-1}{t}}{(t-1)^2}$，再设 $g(t)=\ln t-\dfrac{t-1}{t}$，

则 $g'(t)=\dfrac{t-1}{t^2}$，当 $t\geq3$，$g'(t)=\dfrac{t-1}{t^2}>0$，即 $g(t)=\ln t-\dfrac{t-1}{t}$ 在 $[3,+\infty)$ 单调递增，所以 $g(t)\geq g(3)=\ln3-\dfrac{2}{3}>0$，则 $h'(t)=\dfrac{\ln t-\dfrac{t-1}{t}}{(t-1)^2}>0$，所以 $h(t)=\dfrac{\ln t}{1-t}$ 在 $[3,+\infty)$ 单调递增，且当 $t\to+\infty$，$h(t)\to0$．则 $h(t)=\dfrac{\ln t}{1-t}\in[h(3),0)$，即 $x_1\in[-\dfrac{1}{2}\ln3,0)$．由于 $a=-x_1e^{x_1}$，又 $p(x)=-xe^x$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递减，当 $x_1\in[-\dfrac{1}{2}\ln3,0)$，$p(x_1)\in(0,\dfrac{\sqrt{3}\ln3}{6}]$，即 $a\in(0,\dfrac{\sqrt{3}\ln3}{6}]$．



22.（1）【解析】由题意，当 $m=1$ 时，$f(x)=(x-1)\ln x$，$x>0$．$f'(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}+1$，$x>0$，$f'(1)=0$，$f(1)=0$．函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=0$．

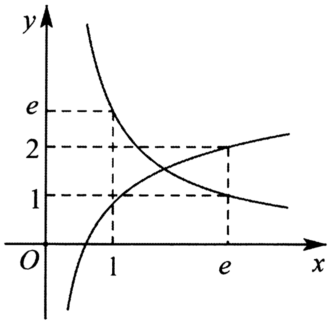
（2）【解析】由题意，当 $x\in[1,e]$ 时，恒有 $f(x)\leq0$ 成立，即 $(x-m)\ln x\leq0$ 对任意 $x\in[1,e]$ 成立．当 $x\in[1,e]$ 时，$\ln x\geq0$ 恒成立，$x-m\leq0$ 对任意 $x\in[1,e]$ 恒成立．$m\geq x_{\max}=e$．m 的取值范围为 $[e,+\infty)$．

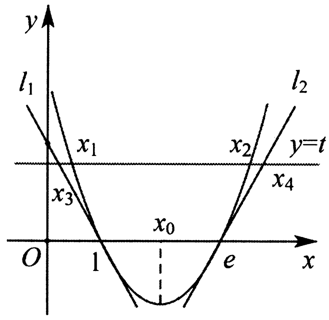
（3）证明：由题意，当 $m=e$ 时，$f(x)=(x-e)\ln x$，$x>0$．$f'(x)=\ln x+\frac{x-e}{x}=\ln x+1-\frac{e}{x}$，$x>0$．

①令 $f'(x)=0$，即 $\ln x+1=\frac{e}{x}$，根据下面图象：根据图，很明显交点的横坐标在 1 与 e 之间，设为 x_0，即 $f'(x)=0$ 的解为 $x=x_0$，$(1<x_0<e)$，且 $\ln x_0+1=\frac{e}{x_0}$．②令 $f'(x)<0$，即 $\ln x+1<\frac{e}{x}$，解得 $0<x<x_0$；

③令 $f'(x)>0$，即 $\ln x+1>\frac{e}{x}$，解得 $x>x_0$．$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，在 $x=x_0$ 处取得极小值．因为$f(1)=0$，$f(e)=0$．所以根据题意，画图如下：由图，①设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线为 l_1，$f'(1)=1-e$．直线 l_1 的直线方程：$y=(1-e)(x-1)$，令 $y=t$，解得 $x_3=\frac{t}{1-e}+1$；

②设函数 $f(x)$ 在 $x=e$ 处的切线为 l_2，$f'(e)=1$．直线 l_2 的直线方程：$y=x-e$，令 $y=t$，解得 $x_4=e+t$．$x_2-x_1\le x_4-x_3=e+t-\frac{t}{1-e}-1=e-1+\frac{et}{e-1}$．





23.【解析】（1）对函数 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=\ln x+1$，$f'(e^{-2})=\ln e^{-2}+1=-1$，又 $f(e^{-2})=e^{-2}\ln e^{-2}=-2e^{-2}$，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=e^{-2}$ 处的切线方程为 $y-(-2e^{-2})=-(x-e^{-2})$，即 $y=-x-e^{-2}$；

（2）法一 记 $g(x)=f(x)-\lambda(x-1)=x\ln x-\lambda(x-1)$，其中 $x>0$，由题意知 $g(x)\ge 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，下面求函数 $g(x)$ 的最小值，对 $g(x)$ 求导得 $g'(x)=\ln x+1-\lambda$，令 $g'(x)=0$，得 $x=e^{\lambda-1}$，

当 x 变化时，$g'(x)$，$g(x)$ 变化情况列表如下：

x	$(0,e^{\lambda-1})$	$e^{\lambda-1}$	$(e^{\lambda-1},+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	递减	极小值	递增

$g(x)_{\min}=g(x)_{极小值}=g\left(e^{\lambda-1}\right)=(\lambda-1)e^{\lambda-1}-\lambda\left(e^{\lambda-1}-1\right)=\lambda-e^{\lambda-1}$，$\lambda-e^{\lambda-1}\ge 0$，

记 $G(\lambda)=\lambda-e^{\lambda-1}$，则 $G'(\lambda)=1-e^{\lambda-1}$，令 $G'(\lambda)=0$，得 $\lambda=1$，

当 λ 变化时，$G'(\lambda)$，$G(\lambda)$ 变化情况列表如下：

λ	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$G'(\lambda)$	$+$	0	$-$
$G(\lambda)$	递增	极大值	递减

$G(\lambda)_{\max}=G(\lambda)_{极大值}=G(1)=0$，故 $\lambda-e^{\lambda-1}\le 0$ 当且仅当 $\lambda=1$ 时取等号，又 $\lambda-e^{\lambda-1}\ge 0$，从而得到 $\lambda=1$；

法二 （对数单身狗）构造函数 $g(x)=\ln x-\lambda+\frac{\lambda}{x}$，$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{\lambda}{x^2}=\frac{x-\lambda}{x^2}$，显然 $g'(\lambda)=0$ 时，$x=\lambda$，由于 $g(1)=0$，故 $\lambda=1$ 时显然成立；$\lambda>1$ 时，$x\in(1,\lambda)$ 时，$g(x)\downarrow$，且 $g(x)<g(1)=0$，矛盾；$0<\lambda<1$ 时，$x\in(\lambda,1)$ 时，$g(x)\uparrow$，且 $g(x)<g(1)=0$，矛盾；$\lambda\le 0$ 时，$x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)\uparrow$，$x\in(0,1)$ 时 $g(x)<g(1)=0$，矛盾；故 $\lambda=1$；

（3）先证 $f(x)\ge -x-e^{-2}$，记 $h(x)=f(x)-(-x-e^{-2})=x\ln x+x+e^{-2}$，则 $h'(x)=\ln x+2$，

令 $h'(x)=0$，得 $x=e^{-2}$，当 x 变化时，$h'(x)$，$h(x)$ 变化情况列表如下：

x	$(0,e^{-2})$	e^{-2}	$(e^{-2},+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	递减	极小值	递增

$h(x)_{\min}=h(x)_{极小值}=h\left(e^{-2}\right)=e^{-2}\ln e^{-2}+e^{-2}+e^{-2}=0$，$h(x)\ge 0$ 恒成立，即 $f(x)\ge -x-e^{-2}$，

记直线 $y=-x-e^{-2}$，$y=x-1$ 分别与 $y=a$ 交于 (x_1',a)，(x_2',a)，

不妨设 $x_1<x_2$，则 $a=-x_1'-e^{-2}=f(x_1)\ge -x_1-e^{-2}$，从而 $x_1'<x_1$，当且仅当 $a=-2e^{-2}$ 时取等号，

由（2）知，$f(x)\ge x-1$，则 $a=x_2'-1=f(x_2)\ge x_2-1$，从而 $x_2\le x_2'$，当且仅当 $a=0$ 时取等号，

故 $|x_1-x_2|=x_2-x_1\le x_2'-x_1'=(a+1)-(-a-e^{-2})=2a+1+e^{-2}$，

因等号成立的条件不能同时满足，故 $|x_1-x_2|<2a+1+e^{-2}$．

24．【解析】（1）将 $x=-1$ 代入切线方程 $(e-1)x+ey+e-1=0$ 中，有 $y=0$，所以 $f(-1)=0$，即 $f(-1)=(b-1)(\frac{1}{e}-a)=0$，又 $f'(x)=e^x(x+b+1)-a$，所以 $f'(-1)=\frac{b}{e}-a=-\frac{e-1}{e}=-1+\frac{1}{e}$．若 $a=\frac{1}{e}$，则 $b=2-e<0$，与 $b>0$ 矛盾，故 $a=b=1$．

（2）证明：由（1）可知 $f(x)=(x+1)(e^x-1)$，令 $f(x)=0$，有 $x=-1$ 或 $x=0$，

故曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴负半轴的唯一交点 P 为 $(-1,0)$．曲线在点 $P(-1,0)$ 处的切线方程为 $y=h(x)$，

则 $h(x)=f'(-1)(x+1)$，令 $F(x)=f(x)-h(x)$，则 $F(x)=f(x)-f'(-1)(x+1)$，

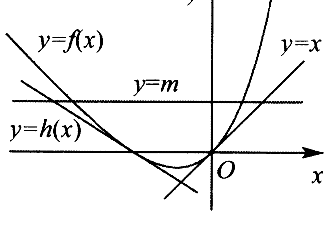
所以 $F'(x)=f'(x)-f'(-1)=e^x(x+2)-\frac{1}{e}$，$F'(-1)=0$．当 $x<-1$ 时，若 $x\in(-\infty,-2]$，$F'(x)<0$，

若 $x\in(-2,-1)$，$F''(x)=e^x(x+3)>0$，$F'(x)$ 在 $x\in(-2,-1)$ 时单调递增，$F'(x)<F'(-1)=0$．故 $F'(x)<0$，$F(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，当 $x>-1$ 时，由 $F''(x)=e^x(x+3)>0$ 知 $F'(x)$ 在 $x\in(-1,+\infty)$ 时单调递增，$F'(x)>F'(-1)=0$，$F(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增．所以 $F(x)\ge F(-1)=0$，即 $f(x)\ge h(x)$ 成立．

（3）证明：$h(x)=(\frac{1}{e}-1)(x+1)$，设 $h(x)=m$ 的根为 x_1'，则 $x_1'=-1+\frac{me}{1-e}$，又 $h(x)$ 单调递减，且 $m=h(x_1')=f(x_1)\ge h(x_1)$，所以 $x_1'\le x_1$，设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=t(x)$，有 $t(x)=x$，令 $T(x)=f(x)-t(x)=(x+1)(e^x-1)-x$，$T'(x)=(x+2)e^x-2$，当 $x\le -2$ 时，$T'(x)=(x+2)e^x-2\le -2<0$，当 $x>-2$ 时，$T''(x)=(x+3)e^x>0$，故函数 $T'(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，又 $T'(0)=0$，

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$T'(x)<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$T'(x)>0$，所以函数 $T(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $T(x)\ge T(0)=0$，即 $f(x)\ge t(x)$，设 $t(x)=m$ 的根为 x_2'，则 $x_2'=m$，又函数 $t(x)$ 单调递增，故 $m=t(x_2')=f(x_2)\ge t(x_2)$，故 $x_2'\ge x_2$．又 $x_1'\le x_1$，

所以 $x_2-x_1\le x_2'-x_1'=m-(-1+\frac{me}{1-e})=1+\frac{m(1-2e)}{1-e}$．



25．证明：（1）$f'(x)=(x^2+x-1)e^x$，$f'(1)=e$，$f(1)=0$，$y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程 $y=g(x)=e(x-1)$，设 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h'(x)=(x^2+x-1)e^x-e$，$h''(x)=(x^2+3x)e^x$，令 $h''(x)=0$，可得 $x=-3$ 或 $x=0$，函数 $y=h'(x)$ 在 $(-\infty,-3)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-3,0)$ 上单调递减，由

$h'(-3)=\frac{5}{e^3}-e<0$，$h'(1)=0$，$x\in(-\infty,1)$，$h'(x)<0$，$y=h(x)$ 单调递减；$x\in(1,+\infty)$，$h'(x)>0$，$y=h(x)$ 单调递增，$h(x)\geq h(1)=0$，$f(x)\geq g(x)$；函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=-x$，则 $(x^2-x)e^x\geq -x$，又 $(x^2-x)e^x\geq e(x-1)$，设 $y=m$ 与 $y=-x$ 和 $y=e(x-1)$ 的两个交点的横坐标为 x_3，x_4，由 $x_3<x_1<x_2<x_4$，则 $|x_1-x_2|<x_4-x_3=\frac{m}{e}+m+1$．

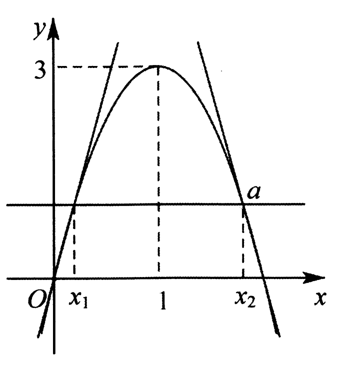
26.（1）【解析】$f'(x)=a-e^x$；由题意知，$f'(\ln 3)=a-e^{ln3}=0$；$a=3$；

（2）证明：设曲线 $y=f(x)$ 在 $P(x_0,\ 0)$ 处切线为直线 $l:y=(3-e^{x_0})(x-x_0)$；令 $g(x)=(3-e^{x_0})(x-x_0)$；令 $F(x)=f(x)-g(x)=3x-e^x+1-(3-e^{x_0})(x-x_0)$，则 $F'(x)=3-e^x-(3-e^{x_0})=e^{x_0}-e^x$；故 $F(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减；则 $F(x)_{\max}=F(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=0$；则 $F(x)=f(x)-g(x)\leq 0$，即 $f(x)\leq g(x)$，即 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方；

（3）由（2）设方程 $g(x)=m$ 的解为 x_2'，则有 $(3-e^{x_0})(x_2'-x_0)=m$，解得 $x_2'=\frac{m}{3-e^{x_0}}+x_0$，由题意知，$\ln 3<x_2<x_2'$；令 $r(x)=2x-f(x)=e^x-x-1$，$(x>0)$；由 $r'(x)=e^x-1>0$；故 $r(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；$r(x)>r(0)=0$；$y=2x$ 的图象不在 $f(x)$ 的下方；$y=2x$ 与 $y=m$ 交点的横坐标为 $x_1'=\frac{m}{2}$；则有 $0<x_1'<x_1<\ln 3$，即 $0<x_1'<x_1<\ln 3<x_2<x_2'$；故 $x_2-x_1<x_2'-x_1'=\frac{m}{3-e^{x_0}}+x_0-\frac{m}{2}$；关于 x_0 的函数 $y=\frac{m}{3-e^{x_0}}+x_0-\frac{m}{2}$ 在 $(\ln 3,2)$ 上单调递增；故 $x_2-x_1<\frac{m}{3-e^2}+2-\frac{m}{2}<\frac{m}{2-7}+2-\frac{m}{2}=2-\frac{7m}{10}$．

27.（1）证明：由 $g(1)=1$，及 $g'(x)=4x^3$，$g'(1)=4$．所以在点 $(1,1)$ 处的切线方程为：$y-1=4(x-1)$，记为 $y=m(x)=4x-3$，则 $f(x)=m(x)-g(x)+3=4x-3-x^4+3=4x-x^4$．由 $f(x)=4x-x^4=x(4-x^3)=0$．$x>0$，得 $x=\sqrt[3]{4}$．$P(\sqrt[3]{4},0)$．求导 $f'(x)=4-4x^3$，则 $f'(\sqrt[3]{4})=4-4\times 4=-12$．$f(x)$ 在点 P 处的切线为 $l:y=-12(x-\sqrt[3]{4})$．令 $h(x)=-12(x-\sqrt[3]{4})-4x+x^4$．$h(\sqrt[3]{4})=0$．
求导得 $h'(x)=-12-4+4x^3=4(x^3-4)=4(x-\sqrt[3]{4})(x^2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}x)$．可得函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,\sqrt[3]{4})$ 上单调递减，在 $(\sqrt[3]{4},+\infty)$ 上单调递增．$h(x)\geq h(\sqrt[3]{4})=0$，$-12(x-\sqrt[3]{4})\geq 4x-x^4$．因此曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方．

（2）$f(x)$ 在点 P 处的切线为 $l:y=-12(x-\sqrt[3]{4})$．同理可得：$f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线为：$y=4x$．$y=a$ 与 $y=4x$，$y=-12(x-\sqrt[3]{4})$ 的交点的恒坐标分别为 x_3，x_4．$4x-f(x)=x^4\geq 0(x\geq 0)$，则 $x_3=\frac{a}{4}$，$x_4=\sqrt[3]{4}-\frac{a}{12}$．$|x_2-x_1|<x_4-x_3=\sqrt[3]{4}-\frac{a}{12}-\frac{a}{4}=\sqrt[3]{4}-\frac{a}{3}<2-\frac{a}{3}$．$|x_2-x_1|<2-\frac{a}{3}$．



28.【解析】（1）函数 $f(x)=(x+1)(e^x-1)$，由 $f'(x)=(x+2)e^x-1$，由 $f'(-1)=\frac{1}{e}-1$，$f(-1)=0$，所以切线方程为 $y=\frac{1-e}{e}(x+1)$，

（2）法一　当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$\ln x\ge 0$，所以 $a\ln x+2ex-2\le(e-1)\ln x+2ex-2$．故只需证 $f(x)\ge(e-1)\ln x+2ex-2$，构造 $g(x)=(x+1)(e^x-1)-(e-1)\ln x-2ex+2$，$g'(x)=(x+2)e^x-1-\dfrac{e-1}{x}-2e$，又 $g'(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增，且 $g'(1)=0$，知 $g(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x)\ge g(1)=2e-2-2e+2=0$．因此 $(x+1)(e^x-1)\ge(e-1)\ln x+2ex-2\ge e\ln x+2ex-2$，得证．

法二（切线放缩）由 $f(x)\ge a\ln x+2ex-2\Leftrightarrow(x+1)e^x-x-(e-1)\ln x-2ex+1\ge 0$，由于 $x\ge 1$，故取 $e^x\ge ex$，只需 $ex^2+(e-1)x-(e-1)\ln x-2ex+1\ge 0\Leftrightarrow e(x-1)^2+(e-1)(x-\ln x-1)\ge 0$，故命题得证．

法三（同构）由 $(x+1)e^x-x-(e-1)\ln x-2ex+1\ge 0\Leftrightarrow(x+1)(e^x-ex)+(ex^2-2ex+e)+(e-1)(x-\ln x-1)\ge 0$ 即 $e(x+1)(e^{x-1}-x)+e(x-1)^2+(e-1)(x-\ln x-1)\ge 0$，同构，$h(x)=e^x-x-1$，显然 $h(x)\ge h(0)=0$，原不等式化为 $e(x+1)h(x-1)+e(x-1)^2+(e-1)h(\ln x)\ge 0$，显然成立．

（3）由（1）知 $f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{1-e}{e}(x+1)$．

构造 $F(x)=f(x)-\dfrac{1-e}{e}(x+1)=(x+1)(e^x-\dfrac{1}{e})$，$F'(x)=(x+2)e^x-\dfrac{1}{e}$，$F''(x)=(x+3)e^x$．

当 $x<-3$ 时，$F''(x)<0$；当 $x>-3$ 时，$F''(x)>0$；所以 $F'(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上单调递减，在 $(-3,+\infty)$ 上单调递增．又 $F'(-3)=-\dfrac{1}{e^3}-\dfrac{1}{e}<0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}F'(x)=-\dfrac{1}{e}$，$F'(-1)=0$，所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增．所以 $F(x)\ge F(-1)=0\Rightarrow f(x)\ge\dfrac{1-e}{e}(x+1)$．设方程 $s(x)=\dfrac{1-e}{e}(x+1)=b$ 的根 $x_1'=\dfrac{eb}{1-e}-1$．又 $b=s(x_1')=f(x_1)\ge s(x_1)$，由 $s(x)$ 在 R 上单调递减，所以 $x_1'\le x_1$．另一方面，$f(x)$ 在点 $(1,2e-2)$ 处的切线方程为 $t(x)=(3e-1)x-e-1$．构造 $G(x)=f(x)-t(x)=(x+1)(e^x-1)-(3e-1)x+e+1=(x+1)e^x-3ex+e$．

$G'(x)=(x+2)e^x-3e$，$G''(x)=(x+3)e^x$．当 $x<-3$ 时，$G''(x)<0$；当 $x>-3$ 时，$G''(x)>0$；所以 $G'(x)$ 在又 $G'(-3)=-\dfrac{1}{e^3}-3e<0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}G'(x)=-3e$，$G'(1)=0$，所 $G(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增．所以 $G(x)\ge G(1)=0\Rightarrow f(x)\ge t(x)=(3e-1)x-e-1$．设方程 $t(x)=(3e-1)x-e-1=b$ 的根 $x_2'=\dfrac{e+1+b}{3e-1}$．

又 $b=t(x_2')=f(x_2)\ge t(x_2)$，由 $t(x)$ 在 R 上单调递增，所以 $x_2\le x_2'$．

因为 $x_1'\le x_1$，$x_2\le x_2'$，$-x_1\le -x_1'$，所以 $x_2-x_1\le x_2'-x_1'\le 1+\dfrac{b+e+1}{3e-1}+\dfrac{eb}{e-1}$，得证．

专题 13　导数中 ATM 找点法

达标训练

1．【解析】函数 $f(x)=e^x-\ln x-2$，$x\in(0,+\infty)$，所以 $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$，设 $g(x)=xe^x-1$，$x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=e^x+xe^x>0$ 恒成立，即函数 $g(x)=xe^x-1$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又因为 $g(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}\times e^{\frac{1}{2}}-1=\dfrac{\sqrt{e}}{2}-1<0$，$g(1)=e-1>0$，所以存在唯一 $x_0\in(\dfrac{1}{2},1)$，使得 $g(x_0)=0$，即 $f(x)$ 有且仅有一个极值点，因为当 $x\in(\dfrac{1}{2},x_0)$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,1)$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，所以 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，且满足 $x_0\in(\dfrac{1}{2},1)$，因为 $g(x_0)=x_0e^{x_0}-1=0$，所以 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0},x_0=\ln\dfrac{1}{x_0}=-\ln x_0$，则 $f(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=\dfrac{1}{x_0}+x_0-2$，因为对勾函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $(\dfrac{1}{2},1)$ 上单

调递减，所以$2<x_0+\frac{1}{x_0}<2+\frac{1}{2}$，则$0<f(x_0)<\frac{1}{2}$，即函数$f(x)$恒大于0，无零点，综上所述：正确的是①③，故答案为：①③.

2.【解析】(1) 由$f(x)=\frac{x^2}{2}-k\ln x(k>0)$，$f'(x)=x-\frac{k}{x}=\frac{x^2-k}{x}$，由$f'(x)=0$解得$x=\sqrt{k}$

$f(x)$与$f'(x)$在区间$(0，+\infty)$上的情况如下：

x	$(0，\sqrt{k})$	$\sqrt{k}$	$(\sqrt{k}，+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	↓	$\frac{k(1-\ln k)}{2}$	↑

所以，$f(x)$的单调递增区间为$(\sqrt{k}，+\infty)$，单调递减区间为$(0，\sqrt{k})$；

$f(x)$在$x=\sqrt{k}$处的极小值为$f(\sqrt{k})=\frac{k(1-\ln k)}{2}$，无极大值.

(2) 证明：由 (1) 知，$f(x)$在区间$(0，+\infty)$上的最小值为$f(\sqrt{k})=\frac{k(1-\ln k)}{2}$. 因为$f(x)$存在零点，所以$\frac{k(1-\ln k)}{2}\le 0$，从而$k\ge e$，当$k=e$时，$f(x)$在区间$(1，\sqrt{e})$上单调递减，且$f(\sqrt{e})=0$，所以$x=\sqrt{e}$是$f(x)$在区间$(1，\sqrt{e})$上唯一零点. 当$k>e$时，$f(x)$在区间$(0,\sqrt{e})$上单调递减，且$f(1)=\frac{1}{2}>0$，$f(\sqrt{e})=\frac{e-k}{2}<0$，所以$f(x)$在区间$(1，\sqrt{e})$上仅有一个零点. 综上所述，若$f(x)$存在零点，则$f(x)$在区间$(1，\sqrt{e}]$上仅有一个零点.

3.【解析】(1) 因为$a=e$，所以$f(x)=xe^x-\frac{1}{2}e(x+1)^2$，所以$f'(x)=(x+1)(e^x-e)$. 令$f'(x)>0$，得$x<-1$或$x>1$；令$f'(x)<0$，得$-1<x<1$. 故$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty，-1)$，$(1，+\infty)$，单调递减区间为$(-1，1)$.

(2) 当$a\le 1$时，由 (1) 知，$f(x)$在区间$(0，1)$上单调递增，则$f(0)=-\frac{a}{2}<0$，$f(1)=e-2a>0$，解得$0<a\le 1$；当$1<a\le e$，即$0<\ln a\le 1$时，由 (1) 知，$f(x)$在区间$(0，\ln a)$上单调递减，在区间$(\ln a，1)$上单调递增，则$f(1)=e-2a>0$，解得$1<a<\frac{e}{2}$；当$a>e$，即$lna>1$时，由 (1) 知，$f(x)$在区间$(0，1)$上单调递减，因为$f(1)<f(0)<0$，所以$f(x)$在区间$(0，1)$上不存在零点，即$a>e$，不符合题意.

综上，a的取值范围是$(0，\frac{e}{2})$.

4.【解析】函数$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=\frac{2x^2-a}{x}$.

(1) 当$a=1$时，$f(x)=x^2-\ln x-1$，$f'(x)=\frac{2x^2-1}{x}$，

又$f(1)=0$，切点坐标为$(1，0)$，切线斜率为$k=f'(1)=1$，所以切线方程为$y=x-1$；

(2) 当$x\in(0，\sqrt{\frac{1}{2}a})$时，$f'(x)=\frac{2x^2-a}{x}<0$，所以$f(x)$在$(0，\sqrt{\frac{1}{2}a})$上单调递减，

当$a>\frac{1}{2}e$时，$f(\sqrt{\frac{1}{2}a})=-\frac{1}{2}a(1+\ln\frac{1}{2}a)<0$，又$0<e^{-a-1}<e^{-1}<\sqrt{\frac{1}{e}}<\sqrt{\frac{1}{2}a}$，所以$f(e^{-a-1})=e^{-2a-2}+a^2>0$，

所以函数$f(x)$在$(0，\sqrt{\frac{1}{2}a})$上存在零点.

5.【解析】(1) 求导$f'(x)=\frac{a}{x}+(1-a)x-b(x>0)$，曲线$y=f(x)$在点$(1，f(1))$处的切线斜率为0，所以$f'(1)=a+(1-a)\times 1-b=0$，解得$b=1$.

（2）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，由（1）可知 $f(x)=a\ln x+\frac{1-a}{2}x^2-x$，所以

$f'(x)=\frac{a}{x}+(1-a)x-1=\frac{(1-a)}{x}(x-\frac{a}{1-a})(x-1)$.

①当 $a\le\frac{1}{2}$ 时，则 $\frac{a}{1-a}\le 1$，则当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

则存在 $x_0\ge 1$，使得 $f(x_0)<\frac{a}{a-1}$ 的充要条件是 $f(1)<\frac{a}{a-1}$，即 $\frac{1-a}{2}-1<\frac{a}{a-1}$，解得 $-\sqrt{2}-1<a<\sqrt{2}-1$；

②当 $\frac{1}{2}<a<1$ 时，则 $\frac{a}{1-a}>1$，则当 $x\in(1,\frac{a}{1-a})$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(1,\frac{a}{1-a})$ 上单调递减；

当 $x\in(\frac{a}{1-a},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(\frac{a}{1-a},+\infty)$ 上单调递增．则存在 $x_0\ge 1$，使得 $f(x_0)<\frac{a}{a-1}$ 的充要条件是 $f(\frac{a}{1-a})<\frac{a}{a-1}$，而 $f(\frac{a}{1-a})=a\ln\frac{a}{1-a}+\frac{a^2}{2(1-a)}+\frac{a}{a-1}>\frac{a}{a-1}$，不符合题意，应舍去.

③若 $a>1$ 时，$f(1)=\frac{1-a}{2}-1=\frac{-a-1}{2}<\frac{a}{a-1}$，成立，综上可得：$a$ 的取值范围是 $(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1)\cup(1,+\infty)$.

6.【解析】（1）由已知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$g(x)=f'(x)=2(x-a)-2\ln x-2(1+\frac{a}{x})$，

故 $g'(x)=2-\frac{2}{x}+\frac{2a}{x^2}=\frac{2(x-\frac{1}{2})^2+2(a-\frac{1}{4})}{x^2}$．当 $0<a<\frac{1}{4}$ 时，$g(x)$ 在 $(0,\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2})$，$(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty)$ 上单调递增，在区间 $(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2})$ 上单调递减；当 $a\ge\frac{1}{4}$ 时，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

（2）由 $f'(x)=2(x-a)-2\ln x-2(1+\frac{a}{x})=0$，解得 $a=\frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}$，

令 $\varphi(x)=-2(x+\frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}})\ln x+x^2-2(\frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}})x-2(\frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}})^2+\frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}$，

则 $\varphi(1)=1>0$，$\varphi(e)=-\frac{e(e-2)}{1+e^{-1}}-2(\frac{e-2}{1+e^{-1}})^2<0$．故存在 $x_0\in(1,e)$，使得 $\varphi(x_0)=0$.

令 $a_0=\frac{x_0-1-\ln x_0}{1+{x_0}^{-1}}$，$u(x)=x-1-\ln x(x\ge 1)$，由 $u'(x)=1-\frac{1}{x}\ge 0$ 知，函数 $u(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

故 $0=\frac{u(1)}{1+1}<\frac{u(x_0)}{1+{x_0}^{-1}}=a_0<\frac{u(e)}{1+e^{-1}}=\frac{e-2}{1+e^{-1}}<1$．即 $a_0\in(0,1)$，当 $a=a_0$ 时，有 $f'(x_0)=0$，$f(x_0)=\varphi(x_0)=0$.

由（I）知，$f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故当 $x\in(1,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，从而 $f(x)>f(x_0)=0$；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，从而 $f(x)>f(x_0)=0$．当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)\ge 0$.

综上所述，存在 $a\in(0,1)$，使得 $f(x)\ge 0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内恒成立，且 $f(x)=0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有唯一解.

7.【解析】（1）求导 $f'(x)=2e^{2x}+m$，

①当 $m\ge 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调递增；

②当 $-2\le m<0$ 时，$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调递增；

③当 $m<-2$ 时，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{2}\ln(-\frac{m}{2})>0$，$x\in(0,\frac{1}{2}\ln(-\frac{m}{2}))$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$x\in(\frac{1}{2}\ln(-\frac{m}{2}),+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

综上所述：当 $m\ge -2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调递增；当 $m<-2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2}ln(-\frac{m}{2}))$ 上单调递减，

$f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}\ln(-\frac{m}{2}),+\infty)$ 上单调递增；

（2） $f(\frac{x_0}{2})-1>g(x_0)\Rightarrow e^{x_0}-x_0-1>\frac{a}{2}{x_0}^2e^{x_0}\Rightarrow 1-\frac{x_0+1}{e^{x_0}}>\frac{a}{2}{x_0}^2\Rightarrow\frac{a}{2}{x_0}^2+\frac{x_0+1}{e^{x_0}}-1<0(*)$，

需求一个 x_0，使(*)成立，只要求出 $t(x)=\frac{a}{2}x^2+\frac{x+1}{e^x}-1$ 的最小值，满足 $t(x)_{\min}<0$，

则 $t'(x)=x(a-\frac{1}{e^x})$，所以 $t(x)$ 在 $(0，-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a，+\infty)$ 上单调递增，

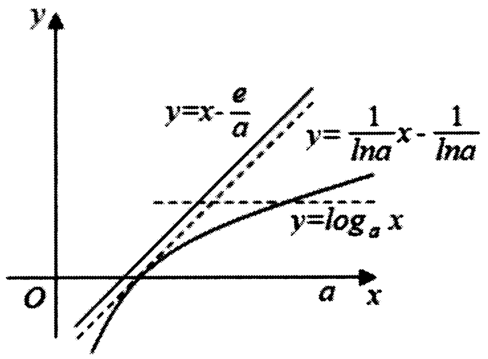
故 $t(x)_{\min}=t(-\ln a)=\frac{a}{2}\ln^2 a+a(-\ln a+1)-1$ $\frac{a}{2}\ln^2 a+a(-\ln a+1)-1<0$，只需证明在 $a\in(0，1)$ 内成立即可，

令 $\varphi(a)=\frac{a}{2}\ln^2 a+a(-\ln a+1)-1\Rightarrow\varphi'(a)=\frac{1}{2}\ln^2 a>0$，故 $\varphi(a)$ 在 $a\in(0，1)$ 单调递增，

故 $\varphi(a)<\varphi(1)=\frac{1}{2}\ln^2 1+1\times(-\ln 1+1)-1=0$，所以 $t(x)_{\min}<0$，故存在与 a 有关的正常数 $x_0=-\ln a(0<a<1)$ 使(*)成立.

8.【解析】（1）当 $a=3$ 时，构造函数 $g(x)=x-\log_3 x-1$，$(x>0)$，求导得：$g'(x)=1-\frac{1}{x\ln 3}=\frac{x-\frac{1}{\ln 3}}{x}$，当 $x\in(0，\frac{1}{\ln 3})$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0，\frac{1}{ln3})$ 上单调递减；当 $x\in(\frac{1}{\ln 3}，+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(\frac{1}{\ln 3}，+\infty)$ 上单调递增；由 $g(1)=0$，且 $g(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}>0$，$g(\frac{1}{\ln 3})<g(1)=0$，故 $\exists x_0\in(\frac{1}{\ln}，\frac{1}{3})$，使 $g(x_0)=0$，即 $g(x)$ 存在两个零点 x_0，1，故方程 $f(x)=1$ 存在两个根；

（2）由 $f(x)\geq\frac{e}{a}$ 对于 $x>0$ 恒成立，$f(1)=1\geq\frac{e}{a}\Rightarrow a\geq e$；因为 $y=\log_a x$ 在点 $(1，0)$ 处的切线为 $y=\frac{1}{\ln a}(x-1)$，由图象可知 $\frac{1}{\ln a}(x-1)\geq\log_a x$，



又由 $a\geq e$ 可知 $0<\frac{1}{\ln a}\leq 1$，构造函数 $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}(x\geq e)$，$\varphi'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\leq 0$ 恒成立，所以 $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $x\in[e，+\infty)$ 上单调递减；$\varphi(a)\leq\varphi(e)=\frac{1}{e}$ 即 $\frac{1}{\ln a}\geq\frac{e}{a}$，所以在 y 轴的右侧，直线 $y=x-\frac{e}{a}$ 在直线 $y=\frac{1}{\ln a}(x-1)$ 的上方，即有 $x-\frac{e}{a}\geq\frac{1}{\ln a}(x-1)$，故 $x-\frac{e}{a}\geq\frac{1}{\ln a}(x-1)\geq\log_a x$，综上所述，$x-\frac{e}{a}\geq\log_a x\Leftrightarrow x-\log_a x\geq\frac{e}{a}$，所以 $a\geq e$.

9.【解析】（1）因为 $f(x)=ax\ln x+ax+1(x>0)$，所以 $f'(x)=a\ln x+ax\cdot\frac{1}{x}+a=a\ln x+2a$，
所以 $f'(1)=2a$，又 $f(1)=a+1$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处切线 l 方程为 $y-(a+1)=2a(x-1)$，
即 $y=2ax-a+1$．又因为直线 l 过点 $(2，-2)$，所以得 $-2=4a-a+1$ 即 $a=-1$．
所以直线 l 方程为 $y=-2x+2$，即 $2x+y-2=0$；
（2）因为 $f'(x)=a\ln x+2a=a(\ln x+2)$．令 $f'(x)=0$ 得 $\ln x=-2$ 即 $x=e^{-2}$，
因为 $a\in N^*$，所以 $a>0$，所以当 $0<x<e^{-2}$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>e^{-2}$ 时，$f'(x)>0$，

则 $f(x)$ 在 $(0，e^{-2})$ 上单调递减，在 $(e^{-2}，+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(e^{-2})=1-ae^{-2}$．

因为 $f(x)$ 有两个零点，所以 $f(x)_{\min}<0$ 即 $1-ae^{-2}<0$ 得 $a>e^2$，

又因为 $f(1)=a+1>0$，$f(\frac{1}{e^a})=a\cdot\frac{1}{e^a}\cdot\ln(\frac{1}{e^a})+a\cdot\frac{1}{e^a}+1=\frac{-a^2}{e^a}+\frac{a}{e^a}+1=\frac{1}{e^a}(e^a-a^2+a)$．

设 $g(a)=e^a-a^2+a(a>1)$，则 $g'(a)=e^a-2a$，因为 $g'(a)$ 在 $(1，+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g'(a)>0$，所以 $g(a)$ 在 $(1，+\infty)$ 单调递增，所以 $g(a)>\mathrm{g}(1)=e>0$，

又 $\frac{1}{e^a}>0$，所以 $f(\frac{1}{e^a})>0$，$f(\frac{1}{e^2})<0$，故 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e^a}，\frac{1}{e^2})$ 上有一个零点，在 $(\frac{1}{e^2}，1)$ 上有一个零点，

即 $f(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上有两个零点，则 $a>e^2$ 又 $a\in N^*$ 且 $e^2\approx7.39$，所以 a 得最小值为 8.

10.【解析】(1) 求导 $f'(x)=\frac{2x^2-ax+1}{x^2}$，$x>0$，$a>0$，对于 $y=2x^2-ax+1$，$\Delta=a^2-8$，

当 $a\in(0，2\sqrt{2}]$ 时，$\Delta\le0$，$f'(x)\ge0$，$f(x)$ 递增；当 $a\in(2\sqrt{2}，+\infty)$ 时，$\Delta>0$，设 $2x^2-ax+1=0$ 对应方程的根为 m，n，由 $mn>0$，$m+n>0$，得 $m>0$，$n>0$，故 $f(x)$ 在 $(0，m)$，$(n，+\infty)$ 递增；在 $(m，n)$ 递减；

(2) 由 $g(x)=f(x)-2x=-\frac{-1}{x}-a\ln x$，$x>0$，求导 $g'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{1-ax}{x^2}$，

当 $a\le0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 递增，$g(x)$ 至多有一个零点，不符合题意；

当 $a>0$ 时，当 $x\in(0，\frac{1}{a})$ 时，$g(x)$ 递增；当 $x\in(\frac{1}{a}，+\infty)$ 时，$g(x)$ 递减，故

$g(x)_{\max}=g(\frac{1}{a})=-a+a\ln a>0$，所以 $a>e$，当 $a>e$ 时，$1>\frac{1}{a}$，$g(1)=-1<0$，$e^a>a$，$e^{-a}<\frac{1}{a}$，

$g(e^{-a})=-\frac{1}{e^{-a}}-a\ln e^{-a}=-e^a+a^2$，构造函数 $h(x)=e^x-x^2$，因为指数函数比幂函数增加的快，易知 $h(x)$ 递增，

所以 $a>e$，$h(a)>h(\mathrm{e})=e^e-e^2>0$，所以 $e^a>a^2$，所以 $g(e^{-a})=-\frac{1}{e^{-a}}-a\ln e^{-a}=-e^a+a^2<0$，

故函数 $g(x)$ 在 $(e^{-a}，\frac{1}{a})$ 和 $(\frac{1}{a}，1)$ 各有一个零点，所以 $a>e$．

11.【解析】(1) 求导 $f'(x)=\frac{2^x x\ln2-2^x}{x^2}+a(1-\frac{1}{x\ln2})=\frac{2^x(x\ln2-1)}{x^2}+\frac{a(x\ln2-1)}{x\ln2}=(x\ln2-1)(\frac{2^x}{x^2}+\frac{a}{x\ln2})$．

当 $a=1$ 时，$f'(x)=(x\ln2-1)(\frac{2^x}{x^2}+\frac{1}{x\ln2})$，$x\in(0，+\infty)$，令 $f'(x)=0$，得 $x\ln2-1=0$，则 $x=\log_2 e$，

故当 $x\in(0，\log_2 e)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $x\in(\log_2 e，+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\log_2 e，+\infty)$，单调递减区间为 $(0，\log_2 e)$．

(2) 由 $f'(x)=(x\ln2-1)(\frac{2^x}{x^2}+\frac{a}{x\ln2})$，可知 $x=\log_2 e$ 为 $f'(x)$ 的一个零点，则方程 $\frac{2^x}{x^2}+\frac{a}{x\ln2}=0$ 在 $(1，4)$ 上有 2 个不同的实数根，即 $a=-\frac{2^x\cdot\ln2}{x}$ 在 $(1，4)$ 上有 2 个不同的实数根，问题等价于函数 $g(x)=-\frac{2^x\cdot\ln2}{x}$ 与直线 $y=a$ 有 2 个交点，由 $g'(x)=-\frac{(x\cdot2^x\cdot\ln2-2^x)\ln2}{x^2}=\frac{2^x\cdot\ln2(1-x\ln2)}{x^2}$，令 $g'(x)=0$，则 $x=\log_2 e$，

当 $x\in(1，\log_2 e)$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增，当 $x\in(\log_2 e，4)$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 单调递减，

$g(x)_{\max}=g(\log_2 e)=-\frac{e\ln2}{\log_2 e}=-e(\ln2)^2$，$g(1)=-2\ln2$，$g(4)=-4\ln2$，且 $g(1)>g(4)$，

故 $-2\ln2<a<-e(\ln2)^2$ 时，方程 $\frac{2^x}{x^2}+\frac{a}{x\ln2}=0$ 在 $(1,4)$ 上有 2 个不同的实数根，

故实数 a 的取值范围为 $(-2ln2，-e(\ln2)^2)$．

12.【解析】(1) 求导 $f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$，当 $0<x<a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $(0,a)$ 上单调递减；当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上单调递增；

(2) 由 $f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$ 得：

当 $a=0$ 时，$f'(x)=1>0$，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(0)=0$，故 $f(x)$ 只有一个零点；

当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $x\to 0$，时，$f(x)<0$，又 $f(1)=1>0$，故 $f(x)$ 只有 1 个零点；

当 $a>0$ 时，由（1）知 $f(x)$ 在区间 $(0,a)$ 上单调递减，在区间 $(a,+\infty)$ 上单调递增；

当 $x=a$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(a)=a-a\ln a=a(1-\ln a)$，

当 $0<a<e$ 时，$f(a)>0$，$f(x)$ 无零点；

当 $a=e$ 时，$f(x)$ 只有一个零点；

当 $a>e$ 时，$f(a)=a-a\ln a=a(1-\ln a)<0$，且 $x\to 0$ 时，$f(x)>0$，$x\to+\infty$，时，$f(x)\to+\infty$，

函数 $f(x)$ 有 2 个零点．综上所述，当 $0<a<e$ 时，$f(x)$ 无零点；当 $a\le 0$ 或 $a=e$ 时，$f(x)$ 只有一个零点；当 $a>e$ 时，$f(x)$ 有 2 个零点．

13．解(1)：因为 $f(x)=ax-a-\ln x(x>0)$，求导 $f'(x)=a-\frac{1}{x}$．则当 $a\le 0$ 时，$f'(x)<0$，即 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，当 $a>0$ 时，$f'(x)<0$，$0<x<\frac{1}{a}$，$f'(x)>0$ 则 $x>\frac{1}{a}$ 所以，$y=f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增．综上，当 $a\le 0$ 时，$y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；当 $a>0$ 时，$y=f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增；

(2) 证明：由（1）可知 $g(x)=x^2-x-x\ln x$，$g'(x)=2x-2-\ln x$，

令 $g'(x)=0$，可得 $2x-2-\ln x=0$，记 $t(x)=2x-2-\ln x$，则 $t'(x)=2-\frac{1}{x}$，令 $t'(x)=0$，解得：$x=\frac{1}{2}$，

所以 $t(x)$ 在区间 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增，所以 $t(x)_{\min}=t(\frac{1}{2})=ln2-1<0$，$t(\frac{1}{e^2})=\frac{2}{e^2}>0$，$t(1)=0$ 从而 $t(x)=0$ 有两解，即 $g'(x)=0$ 存在两根 x_0，1，则 $g'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上为正、在 $(x_0,1)$ 上为负、在 $(1,+\infty)$ 上为正，所以 $g(x)$ 必存在唯一极大值点 x_0，且 $2x_0-2-\ln x_0=0$，

所以 $g(x_0)=x_0^2-x_0-x_0\ln x_0=x_0^2-x_0+2x_0-2x_0^2=x_0-x_0^2$，由 $x_0<\frac{1}{2}$ 可知 $g(x_0)<(x_0-x_0^2)_{\max}=-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；

所以 $g(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $g(x_0)<\frac{1}{4}$．

14．【解析】(1) 由 $f'(x)=ae^{ax}-a=a(e^{ax}-1)=0$，解得 $x=0$，

①若 $a>0$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增；

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递减．

②若 $a<0$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增；

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递减．

综上所述，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递减，在 $(0,+\infty)$ 内单调递增；

(2) 因为 $f(x)\ge\frac{a}{2}(x^2+1)$，即 $e^{ax}\ge\frac{a}{2}(x+1)^2$（＊）．令 $x=0$，得 $1\ge\frac{a}{2}$，则 $\frac{1}{2}<a\le 2$，

当 $x=-1$ 时，不等式（＊）显然成立，当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，两边取对数，即 $ax\ge 2\ln(x+1)+\ln\frac{a}{2}$ 恒成立，

令函数 $F(x)=2\ln(x+1)-ax+\ln\frac{a}{2}$，即 $F(x)\le 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 内恒成立，

由 $F'(x)=\dfrac{2}{x+1}-a=\dfrac{2-a(x+1)}{x+1}=0$，得 $x=\dfrac{2}{a}-1>-1$，故当 $x\in(-1,\dfrac{2}{a}-1)$ 时，$F'(X)>0$，$F(x)$ 单调递增；

当 $x\in(\dfrac{2}{a}-1,+\infty)$ 时，$F'(X)<0$，$F(x)$ 单调递减，因此 $F(x)\le F(\dfrac{2}{a}-1)=2\ln\dfrac{2}{a}-2+a+\ln\dfrac{a}{2}=a-2-\ln\dfrac{a}{2}$，

令函数 $g(a)=a-2-\ln\dfrac{a}{2}$，其中 $\dfrac{1}{2}<a\le 2$，则 $g'(a)=1-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a}=0$，得 $a=1$，

故当 $a\in(\dfrac{1}{2},1)$ 时，$g'(a)<0$，$g(a)$ 单调递减；当 $a\in(1,2]$ 时，$g'(a)>0$，$g(a)$ 单调递增，

又 $g(\dfrac{1}{2})=\ln 4-\dfrac{3}{2}<0$，$g(2)=0$，故当 $\dfrac{1}{2}<a\le 2$ 时，$g(a)\le 0$ 恒成立，因此 $F(x)\le 0$ 恒成立，

即当 $\dfrac{1}{2}<a\le 2$ 时，对任意的 $x\in[-1,+\infty)$，均有 $f(x)\ge\dfrac{a}{2}(x^2+1)$ 成立.

15.【解析】(1) 函数 $f(x)=xe^{x-1}-a(x+\ln x)$，求导 $f'(x)=\dfrac{x+1}{x}(xe^{x-1}-a)(x>0)$.

令 $g(x)=xe^{x-1}-a$，则 $g'(x)=(x+1)e^{x-1}>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

又当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to -a$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$.

当 $a\le 0$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数，不存在极值点；

当 $a>0$ 时，$g(x)$ 的值域为 $(-a,+\infty)$，必存在 $x_0>0$，使 $g(x_0)=0$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；故 $f(x)$ 存在极小值点. 综上可知实数 a 的取值范围是 $(0,+\infty)$.

证明：(2) 由 (1) 知 $x_0e^{x_0-1}-a=0$，即 $a=x_0e^{x_0-1}$. 则 $\ln a=\ln x_0+x_0-1$，$f(x_0)=x_0e^{x_0-1}(1-x_0-\ln x_0)$.

由 $f(x_0)\ge 0$，得 $1-x_0-\ln x_0\ge 0$. 令 $g(x)=1-x-\ln x$，由题意 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

又 $g(1)=0$，由 $f(x_0)\ge 0$，得 $0<x_0\le 1$，令 $H(x)=x-\ln x-1$，$(x>0)$，则 $H'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，当 $x>1$ 时，$H'(x)>0$，函数 $H(x)$ 单调递增；

当 $0<x<1$ 时，$H'(x)<0$，函数 $H(x)$ 单调递减；当 $x=1$ 时，函数 $H(x)$ 取最小值 $H(1)=0$，

则 $H(x)=x-\ln x-1\ge 0$，即 $x-1\ge\ln x$，即 $e^{x-1}\ge x$，$e^{x_0-1}\ge x_0>0$，得 $1-x_0-\ln x_0\ge 1-x_0-(x_0-1)=2(1-x_0)\ge 0$，

则 $f(x_0)=x_0e^{x_0-1}(1-x_0-\ln x_0)\ge x_0^2\cdot 2(1-x_0)=2(x_0^2-x_0^3)$，故 $f(x_0)\ge 2(x_0^2-x_0^3)$.

16. (1)【解析】因为：$g(x)=x\ln x$，$x>0$；求导 $g'(x)=\ln x+1$；

当 $0<x<e^{-1}$ 时；$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x>e^{-1}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；故 $g(x)_{\min}=g(e^{-1})=-e^{-1}$.

(2) 证明：由 (1) 可知 $f(x)=x^2-x-x\ln x$，$f'(x)=2x-2-\ln x$，

令 $f'(x)=0$，可得 $2x-2-\ln x=0$，记 $t(x)=2x-2-\ln x$，则 $t'(x)=2-\dfrac{1}{x}$；

令 $t'(x)=0$，解得：$x=\dfrac{1}{2}$；所以 $t(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $t(x)_{min}=t(\dfrac{1}{2})=\ln 2-1<0$，从而 $t(x)=0$ 有解，即 $f'(x)=0$ 存在两根 x_0，x_2，且不妨设 $f'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上为正、在 (x_0,x_2) 上为负、在 $(x_2,+\infty)$ 上为正，所以 $f(x)$ 必存在唯一极大值点 x_0，且 $2x_0-2-\ln x_0=0$，

所以 $f(x_0)=x_0^{\ 2}-x_0-x_0\ln x_0=x_0-x_0^{\ 2}$；由 $x_0<\dfrac{1}{2}$ 可知 $f(x_0)<(x_0-x_0^{\ 2})_{\max}=-(\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$；

由 $f'(\dfrac{1}{e})<0$ 可知 $x_0<\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,\dfrac{1}{e})$ 上单调递减，所以 $f(x_0)>f(\dfrac{1}{e})=e^{-2}$.

综上所述，$f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

17.【解析】(1) 根据题意，$f'(x)=\dfrac{a}{x}$，设直线 $y=x-1$ 与曲线相切于点 $P(x_0,y_0)$，

根据题意，可得$\begin{cases}\dfrac{a}{x_0}=1\\ a\ln x_0=x_0-1\end{cases}$，解之得$x_0=a=1$，因此$f(x)=\ln x$.

（2）由（1）可知$h(x)=mx-\sqrt{x}+\ln x+t(x>0)$，则当$x\to 0$时，$h(x)<0$，当$x\to+\infty$时，$h(x)>0$，所以$h(x)$至少有一个零点．$h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+m=m-\dfrac{1}{16}+(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{4})^2$

①$m\geq\dfrac{1}{16}$，则$h'(x)\geq 0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$h(x)$有唯一零点.

②若$0<m<\dfrac{1}{16}$，令$h'(x)=0$得$h(x)$有两个极值点x_1，$x_2(x_1<x_2)$，所以$\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}>\dfrac{1}{4}$，即$0<x_1<16$.

可知$h(x)$在$(0,x_1)$上单调递增，在(x_1,x_2)上单调递减，在$(x_2,+\infty)$上单调递增.

所以极大值为$h(x_1)=mx_1-\sqrt{x_1}+\ln x_1+t=(\dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}-\dfrac{1}{x_1})x_1-\sqrt{x_1}+\ln x_1+t=-\dfrac{\sqrt{x_1}}{2}-1+\ln x_1+t$，

又$h'(x_1)=-\dfrac{1}{4\sqrt{x_1}}+\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{4-\sqrt{x_1}}{4x_1}>0$，所以$h(x_1)$在$(0,16)$上单调递增，

则$h(x_1)<h(16)=\ln 16-3+t\leq\ln 16-3+3-4\ln 2=0$，所以$h(x)$有唯一零点.

综上可知，对于任意$m>0$时，$h(x)$有且仅有一个零点.

18.【解析】(1) 由题意可得$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{ae^x(x-2)}{x^3}=\dfrac{(x-ae^x)(x-2)}{x^3}$，当$a\leq 0$时，易知$x-ae^x>0$，由$f'(x)<0$得$0<x<2$，由$f'(x)>0$得$x>2$，$f(x)$在$(0,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增.

（2）由（1）可得$f'(x)=\dfrac{(x-ae^x)(x-2)}{x^3}$，当$0<x<2$时，$\dfrac{x-2}{x^3}<0$，记$g(x)=x-ae^x$，则$g'(x)=1-ae^x$，由$f(x)$在$(0,2)$内有两个极值点，故$g(x)$在$(0,2)$内有两个零点，所以$a>0$．令$g'(x)=0$，则$x=-\ln a$，当$-\ln a\leq 0$，即$a\geq 1$时，$g'(x)<0$，所以在$(0,2)$上单调递减，$g(x)$的图象至多与$x$轴有一个交点，不满足题意.

当$-\ln a\leq 2$，即$0<a\leq\dfrac{1}{e^2}$时，在$(0,2)$上$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，$g(x)$的图象至多与x轴有一个交点，不满足题意.

当$0<-\ln a<2$，即$\dfrac{1}{e^2}<a<1$时，$g(x)$在$(0,-lna)$上单调递增，在$(-lna,2)$上单调递减

由$g(0)=-a<0$知，要使$g(x)$在$(0,2)$内有两个零点，必须满足$\begin{cases}g(-\ln a)=-\ln a-1>0\\ g(2)=2-ae^2<0\end{cases}$，解得$\dfrac{2}{e^2}<a<\dfrac{1}{e}$.

综上，实数a的取值范围是$(\dfrac{2}{e^2},\dfrac{1}{e})$.

19.【解析】(1) 求导$f'(x)=-a(x-1)+(x-1)e^x=(x-1)(e^x-a)$，由$a>0$，由$f'(x)=0$可得$x=1$或$x=\ln a$，
(i) 当$0<a<e$时，$1>\ln a$，在$(1,+\infty)$，$(-\infty,\ln a)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，在$(lna,1)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；
(ii) 当$a=e$时，$lne=1$，$f'(x)>0$在R上恒成立，即$f(x)$在R上单调递增；
(iii) 当$a>e$时，$lna>1$，在$(lna,+\infty)$，$(-\infty,1)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，在$(1,\ln a)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

（2）由$f(x)+\dfrac{1}{2}a=-\dfrac{1}{2}ax^2+ax+(x-2)e^x=(x-2)(e^x-\dfrac{1}{2}ax)=0$有3个实数根，$x=2$显然是方程的一个解，

故$e^x-\dfrac{1}{2}ax=0$有2个实数根且$x\neq 0$，$x\neq 2$，即$a=\dfrac{2e^x}{x}(x\neq 2)$，令$g(x)=\dfrac{2e^x}{x}(x\neq 2)$，则$g'(x)=\dfrac{2e^x(x-1)}{x^2}$，

当 $x\in(-\infty,0)$，$(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,2)$，$(2,+\infty)$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x<0$ 时，$g(x)<0$，$x=1$ 时，$g(x)$ 取得极小值，$g(1)=2e$，又 $g(2)=e^2$，则 $2e<a<e^2$ 或 $a>e^2$.

20.【解析】易（1）知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，当 $a=1$ 时，$f'(x)=(x-\dfrac{1}{x}-\ln x)e^x$，又 $e^x>0$，设 $g(x)=x-\dfrac{1}{x}-\ln x$，则 $g'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-x+1}{x^2}>0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，又 $g(1)=0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减；$(1,+\infty)$ 单调递增；

（2）由 $f'(x)=[a(x-\ln x-1)+1-\dfrac{1}{x}]e^{ax}$，其中 $e^{ax}>0$，且 $f'(x)=0$，设 $h(x)=a(x-\ln x-1)+1-\dfrac{1}{x}$，即 $h(1)=0$，又 $h'(x)=a(1-\dfrac{1}{x})+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{ax^2-ax+1}{x^2}$，①当 $a=0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 单调递增，所以 $x\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 时 $h(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时 $h(x)>0$；即 $f(x)$ 在区间上有且只有 1 个极值点 $x=1$，故不满足题意；②当 $a\neq0$ 时，$h'(x)=0$，得 $ax^2-ax+1=0$，$\Delta=a^2-4a$，当 $0<a\le4$ 时，$\Delta\le0$，此时 $h'(x)>0$ 在 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$，恒成立，$h(x)$ 递增，不可能有两个极值点，故也不满足题意. 当 $a>4$ 时，$\Delta>0$，设 $ax^2-ax+1=0$ 的两根为 m，$n(m<n)$，由 $m+n=1$，$mn=\dfrac{1}{a}>0$，得 $0<m<\dfrac{1}{2}<n<1$，则 $x\in(\dfrac{1}{2},n)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 递减；$x\in(n,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 递增，又 $h(1)=0$，故 $h(n)<h(1)=0$，$h(\dfrac{1}{2})=a(\ln2-\dfrac{1}{2})-1$，

(i) 当 $a(\ln2-\dfrac{1}{2})-1\le0$，即 $4<a\le\dfrac{2}{2\ln2-1}$ 时，则 $x\in(\dfrac{1}{2},1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增；即 $f(x)$ 在区间 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上有且只有 1 个极值点 $x=1$，故不满足题意.

(ii) 当 $a(\ln2-\dfrac{1}{2})-1>0$，即 $a>\dfrac{2}{2\ln2-1}$ 时，因为 $x\in(\dfrac{1}{2},n)$ 时，$h(x)$ 递减，$h(n)<0$，故存在 $x_0\in(\dfrac{1}{2},n)$ 使得 $h(x_0)=0$，当 $x\in(\dfrac{1}{2},x_0)$ 时，$h(x)>0$，$f(x)$ 递增；当 $x\in(x_0,1)$ 时，$h(x)<0$，$f(x)$ 递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，$f(x)$ 递增；此时 $f(x)$ 有且只有 2 个极值点 $x=1$ 和 $x=x_0$，故满足题意；综上可得，符合条件的 a 的取值范围为 $(\dfrac{2}{2\ln2-1},+\infty)$.

21.（1）法 1：令 $g(x)=f(x)-\ln x+2x-2=e^x-\ln x-2$，则 $g'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}(x>0)$，由 $g'(1)=e-1>0$，$g'(\dfrac{1}{e})=e^{\frac{1}{e}}-e<0$，$g'(1)\cdot g'(\dfrac{1}{e})<0$，存在 $x_0\in(\dfrac{1}{e},1)$，使 $g'(x_0)=0$ 因为 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数，所有函数 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上为单减函数，在 $(x_0,+\infty)$ 上为单增函数，所以 $g(x)\ge g(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=\dfrac{1}{x_0}+x_0-2>0(x_0\neq1)$ 即得证.

解法 2:（放缩法）由重要不等式可得，$e^x>x+1$，$x>\ln x+1$，易得 $e^x>\ln x+2$，故得证.

（2）【解析】当 $a^x=2x$，两边取对数得 $x\ln a=\ln2x=\ln2+\ln x$，令 $h(x)=x\ln a-\ln x-\ln2$，$h'(x)=\ln a-\dfrac{1}{x}$，令 $h'(x)=\ln a-\dfrac{1}{x}=0$ 得 $x=\dfrac{1}{\ln a}$，$h(\dfrac{1}{\ln a})=\dfrac{1}{\ln a}\ln a-\ln(\dfrac{1}{\ln a})-\ln2=\ln(\dfrac{e}{2})-\ln(\dfrac{1}{\ln a})$，

当 $h(\dfrac{1}{\ln a})>0$ 时，即 $\dfrac{e}{2}>\dfrac{1}{\ln a}$ 得 $a>e^{\frac{2}{e}}$ 时，$h(x)\ge h(\dfrac{1}{\ln a})>0$，函数 $f(x)$ 无零点；当 $h(\dfrac{1}{\ln a})=0$ 时，即 $\dfrac{e}{2}=\dfrac{1}{\ln a}$ 得 $a=e^{\frac{2}{e}}$ 时，$h(\dfrac{1}{\ln a})=0$，函数 $f(x)$ 有 1 个零点；当 $h(\dfrac{1}{\ln a})<0$ 时，即 $\dfrac{e}{2}<\dfrac{1}{\ln a}$ 得 $1<a<e^{\frac{2}{e}}$ 时，$h(\dfrac{1}{\ln a})<0$，$h(\dfrac{1}{2\ln a})>0$，函数 $f(x)$ 有 1 个零点，$h(\dfrac{1}{\ln a})<0$，$h(\dfrac{1}{2\ln a})>0$，函数 $f(x)$ 有 1 个零点. 故函数有 2 个零点.

22．【解析】（1）$f(x)$ 定义域为 $(0，+\infty)$，$f'(x)=2x-3-\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2-3x-a}{x}$，由于 2 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(2)=4-3-\dfrac{a}{2}=0$，解得 $a=2$，则 $f'(x)=\dfrac{2x^2-3x-2}{x}=\dfrac{(x-2)(2x+1)}{x}$．故 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$；$x>2$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0，2)$，单调增区间为 $(2，+\infty)$，所以 $f(x)$ 有极小值为 f（2）$f(2)=4-6-2\ln 2=-2-2\ln 2$，没有极大值．

（2）证明：因为 $f(x)=x^2-3x-2\ln x$，故 $f(\dfrac{1}{e})=\dfrac{1}{e^2}-\dfrac{3}{e}+2=\dfrac{1}{e^2}+\dfrac{2e-3}{e}>0$，

得 $f(e^2)=e^4-3e^2-4=(e^2+1)(e^2-4)=(e^2+1)(e+2)(e-2)>0$．由（1）知 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0，2]$，单调增区间为 $[2，+\infty)$，且 $f(2)=-2-\ln 2<0$．故 $f(x)$ 有 1 个零点在区间 $(\dfrac{1}{e}，2)$ 内，有 1 个零点在区间 $(2，e^2)$ 内，故 $f(x)$ 只有两个零点．

23．【解析】（1）求导 $f'(x)=(3m-2)e^x-x$，因为 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的一个极值点，则 $f'(0)=3m-2=0$．所以 $m=\dfrac{2}{3}$，则 $h(x)=b\ln x-\dfrac{1}{2}x^2$．$h'(x)=\dfrac{b}{x}-x=\dfrac{b-x^2}{x}$，当 $b\le 0$ 时，$h'(x)\le 0$ 恒成立，$h(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递减．当 $b>0$ 时，$h'(x)>0\Rightarrow 0<x<\sqrt{b}$．$h(x)$ 在 $(\sqrt{b}，+\infty)$ 上单调递减，在 $(0，\sqrt{b})$ 递增．综上，当 $b\le 0$ 时，$h(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递减．当 $b>0$ 时，$h(x)$ 在 $(\sqrt{b}，+\infty)$ 上单调递减，在 $(0，\sqrt{b})$ 递增．

（2）$f(x)$ 在 R 上有且仅有一个零点，即方程 $3m-2=\dfrac{x^2}{2e^x}$ 有唯一解，令 $g(x)=\dfrac{x^2}{2e^x}$，$g'(x)=\dfrac{x(2-x)}{2e^x}$，令 $g'(x)=0$，可得 $x=0$ 或 $x=2$．$x\in(-\infty，0)$ 时，$g'(x)<0$，$x\in(0，2)$ 时，$g'(x)>0$，$x\in(2，+\infty)$ 时，$g'(x)<0$ $g(x)$ 在 $(0，2)$ 递增，在 $(-\infty，0)$，$(2，+\infty)$ 递减，且 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to 0$，$x\to-\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$ 所以 $3m-2>\dfrac{2}{e^2}$ 或 $3m-2=0$．得 $m>\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3e^2}$，或 $m=\dfrac{2}{3}$，所以，m 的取值范围 $(\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3e^2}，+\infty)\cup\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$．

24．（1）【解析】依题意，$g(x)=e^{-x}f(x)+x^2-x=1+a\ln x+x^2-x$，$x>0$．故 $g'(x)=\dfrac{a}{x}+2x-1$，$x>0$．

由 $g(x)$ 在 $[1，2]$ 上单调递增，得 $g'(x)\ge 0$ 在 $[1，2]$ 上恒成立，故 $\dfrac{a}{x}+2x-1\ge 0$，即 $a\ge x(1-2x)$ 在 $[1，2]$ 上恒成立，根据二次函数的知识，可知：$x(1-2x)$ 在 $[1，2]$ 上的最大值为 -1．故 a 的取值范围为 $[-1，+\infty)$．

（2）证明：由题意，$f'(x)=e^x(1+\ln x+\dfrac{a}{x})$，$x>0$，$a>2$．设 $h(x)=f'(x)=e^x(1+\ln x+\dfrac{a}{x})$，$x>0$，$a>2$．则 $h'(x)=e^x(1+a\ln x+\dfrac{2a}{x}-\dfrac{a}{x^2})$．再设 $H(x)=1+a\ln x+\dfrac{2a}{x}-\dfrac{a}{x^2}$，则 $H'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{2a}{x^2}+\dfrac{2a}{x^3}=\dfrac{a(x^2-2x+2)}{x^3}$．当 $x>0$ 时，$y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$ 恒成立，当 $x>0$ 时，$H'(x)>0$ 恒成立．$H(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递增．又当 $a>2$ 时，$H(1)=1+a>0$，$H(\dfrac{1}{2})=1-a\ln 2<0$，根据 $H(x)$ 的单调性及零点定理，可知：存在一点 $x_2\in(\dfrac{1}{2}，1)$，使得 $H(x_2)=0$．$f'(x)$ 在 $(0，x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2，+\infty)$ 上单调递增，在 $x=x_2$ 处取得极小值．得 $x_2=x_1$．即 $x_1\in(\dfrac{1}{2}，1)$ 且 $H(x_1)=0$，即 $1+a\ln x_1+\dfrac{2a}{x_1}-\dfrac{a}{x_1^2}=0$，即 $a(\ln x_1+\dfrac{2}{x_1}-\dfrac{1}{x_1^2})=-1$…①

又 $f(x)$ 的零点为 x_0，故 $f(x_0)=0$，即 $e^{x_0}(1+a\ln x_0)=0$，即 $a\ln x_0=-1$…②，由①②，得 $\ln x_0=\ln x_1+\dfrac{2}{x_1}-\dfrac{1}{x_1^2}$

则 $\ln x_0-\ln x_1=\dfrac{2}{x_1}-\dfrac{1}{x_1^2}$，又 $x_1\in(\dfrac{1}{2}，1)$，故 $\dfrac{2}{x_1}-\dfrac{1}{x_1^2}>0$，即 $\ln x_0-\ln x_1>0$，故 $x_0>x_1$．故得证．

专题 14 导数与三角函数的交汇

达标训练（一）

1.【解析】法一：由题意知，$f'(x)=1+\sin x$，则切线的斜率 $k=f'(\frac{\pi}{2})=2$，切点坐标 $(\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$，所以切线的方程为 $y-\frac{\pi}{2}=2(x-\frac{\pi}{2})$，即 $4x-2y-\pi=0$，故选 D．

法二 抓住 $\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 切线为 $y=-x+\frac{\pi}{2}$，根据切线求和定理 $y=2x-\frac{\pi}{2}$，故选 D．

2.【解析】由 $f(x)=e^x-\cos x$，得 $f'(x)=e^x+\sin x$，故 $f'(0)=e^0+\sin 0=1$，又 $f(0)=e^0-\cos 0=0$，所以曲线 $f(x)$ 在点 $(0，f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$．故选 C．

3.【解析】由题意，$y'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x=-e^{-x}(\sin x+\cos x)$，则 $y'|_{x=0}=-e^0(0+1)=-1$．曲线 $y=e^{-x}\cos x$ 在点 $(0，1)$ 处的切线斜率为 -1，曲线 $y=e^{-x}\cos x$ 在点 $(0，1)$ 处的切线方程为 $y-1=-(x-0)$，即：$x+y-1=0$．故选 D．

4.【解析】函数 $f(x)=\cos x-xf'(\frac{\pi}{2})$，导数为 $f'(x)=-\sin x-f'(\frac{\pi}{2})$，令 $x=\frac{\pi}{2}$，则 $f'(\frac{\pi}{2})=-1-f'(\frac{\pi}{2})$，解得 $f'(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{2}$，$f'(x)=-\sin x+\frac{1}{2}$，可得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线斜率为 $k=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，则与直线 l 垂直的直线的斜率为 -2，对照选项，只有选项 B 对应直线的斜率为 -2，故选 B．

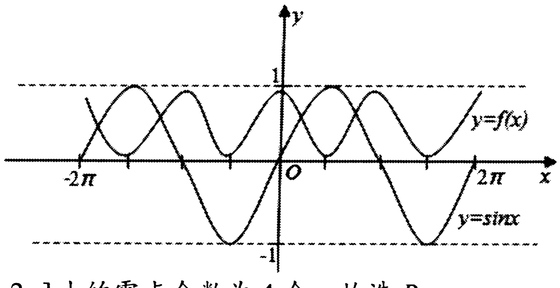
5.【解析】函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})+2e^x$ 即 $y=\cos x+2e^x$，导数为 $y'=-\sin x+2e^x$，可得在点 $(0，3)$ 处的切线斜率为 $k=2$，则在点 $(0，3)$ 处的切线方程为 $y=2x+3$，即 $2x-y+3=0$．故选 D．

6.【解析】由 $y=x\sin x+1+\ln(x+1)$，得 $y'=\sin x+x\cos x+\frac{1}{x+1}$，所以 $y'|_{x=0}=1$，又当 $x=0$ 时，$y=1$，曲线 $y=x\sin x+1+\ln(x+1)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=x+1$，即 $x-y+1=0$．故答案为 $x-y+1=0$．

7.【解析】函数 $f(x)=5x+4\sin x-\cos x$，$f'(x)=5+4\cos x+\sin x$，$f''(x)=-4\sin x+\cos x$，因为方程 $f''(x)=0$ 有实数解 x_0，则称点 $(x_0，f(x_0))$ 为函数 $y=f(x)$ 的“拐点”，已知函数 $f(x)=5x+4\sin x-\cos x$ 的“拐点”是 $M(x_0，f(x_0))$，所以 $-4\sin x_0+\cos x_0=0$，即 $4\sin x_0-\cos x_0=0$，$f(x_0)=5x_0+4\sin x_0-\cos x_0=5x_0$，所以 $f(x_0)=5x_0$，故 $M(x_0，f(x_0))$ 在直线 $y=5x$ 上．故选 B．

8.【解析】根据题意，若直线 $y=x+m$ 与曲线 $y=a\sin x+b\cos x$ $(a，b，m\in R)$ 相切于点 $(0，1)$，则点 $(0，1)$ 为直线 $y=x+m$ 与 $y=a\sin x+b\cos x$ 的交点，则有 $\begin{cases}1=0+m\\1=a\sin 0+b\cos 0\end{cases}$，解可得 $m=1$，$b=1$，又由 $y=a\sin x+b\cos x$，则 $y'=a\cos x-b\sin x$，又由 $y'|_{x=0}=a\cos 0-b\sin 0=1$，解可得 $a=1$，则 $\frac{a+b}{m}=\frac{1+1}{1}=2$；故答案为 2.

9.【解析】因为 $x\in(0，\pi)$，且 $x\neq\frac{\pi}{2}$ 时，$(x-\frac{\pi}{2})f'(x)>0$，因为 $x\in(0，\frac{\pi}{2})$，函数单调减，$x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，函数单调增，因为 $x\in[0，\pi]$ 时，$0<f(x)<1$，在 R 上的函数 $f(x)$ 是最小正周期为 2π 的偶函数，在同一坐标系中作出 $y=\sin x$ 和 $y=f(x)$ 草图象如下，



由图知 $y=f(x)-\sin x$ 在 $[-2\pi，2\pi]$ 上的零点个数为 4 个．故选 B．

10.【解析】构造函数 $g(x)=f(x)-\cos x$，$x\in R$．由 $f(x)+f(-x)=2\cos x$，化为 $f(x)-\cos x=-[f(-x)-\cos(-x)]$，

所以 $g(-x)=-g(x)$，所以函数 $g(x)$ 为 R 上的奇函数．则 $g'(x)=f'(x)+\sin x<0$，所以 $g(x)$ 在 R 上单调递减．若角 α 满足不等式 $f(\pi+\alpha)+f(\alpha)\geq 0$，即 $f(\pi+\alpha)-\cos(\pi+\alpha)\geq -[f(\alpha)-\cos\alpha]$，

即 $g(\pi+\alpha)\geq -g(\alpha)=g(-\alpha)$，所以 $\pi+\alpha\leq -\alpha$，解得 $\alpha\leq -\dfrac{\pi}{2}$，故选 A．

11.【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(0)=-1$，对任意的 $x\in R$ 满足 $f'(x)>2x$，

设 $g(x)=f(x)-x^2+2$，$g'(x)=f'(x)-2x>0$，故 $g(x)$ 在 R 上单调递增，$g(0)=f(0)+2=1$，

$g(\sin\alpha+\cos\alpha)=f(\sin\alpha+\cos\alpha)-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+2=f(\sin\alpha+\cos\alpha)-\sin 2\alpha+1$，

不等式 $f(\sin\alpha+\cos\alpha)-\sin 2\alpha>0$ 等价于 $g(\sin\alpha+\cos\alpha)>1=g(0)$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha>0$，

即 $\sqrt{2}\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})>0$，即 $\alpha+\dfrac{\pi}{4}\in(2k\pi，2k\pi+\pi)$，即 $\alpha\in(2k\pi-\dfrac{\pi}{4}，2k\pi+\dfrac{3\pi}{4})$，结合 $\alpha\in[0，\pi]$，

所以 $\alpha\in[0，\dfrac{3\pi}{4}]$，故选 B．

12.【解析】由题意构造函数 $g(x)=f(x)+2x^2-1$，则 $g'(x)=f'(x)+4x<0$．函数 $g(x)$ 在 R 上为减函数．

因为 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$，所以 $g(\dfrac{1}{2})=f(\dfrac{1}{2})+2\times(\dfrac{1}{2})^2-1=0$，又 $f(\cos\alpha)+\cos 2\alpha<0$，

故 $g(\cos\alpha)=f(\cos\alpha)+2\cos^2\alpha-1=f(\cos\alpha)+\cos 2\alpha<0=g(\dfrac{1}{2})$．即 $\cos\alpha>\dfrac{1}{2}$，由 $-\pi\leq\alpha\leq\pi$，得 $-\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$，

所以不等式 $f(\cos\alpha)+\cos 2\alpha<0$ 的解集为 $(-\dfrac{\pi}{3}，\dfrac{\pi}{3})$，故选 A．

13.【解析】函数 $y=f(x)$ 对于任意的 $x\in(-\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{2})$ 满足 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0$，令 $h(x)=\dfrac{f(x)}{\cos x}$，则

$h'(x)=\dfrac{f'(x)\cos x+f(x)\sin x}{(\cos x)^2}>0$，所以 $h(x)$ 在 $x\in(-\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增，$h(1)>h(0)$，即 $\dfrac{f(1)}{\cos 1}>\dfrac{f(0)}{\cos 0}$，得 $\cos 1>0$ $f(1)>f(0)\cos 1$，故 D 正确，同理可检验 A，B，C 三个选项是错误的，故选 D．

14.【解析】令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\cos x}$，$x\in[0，\dfrac{1}{2}\pi)$，因为 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x<0$，则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)\cos x+f(x)\sin x}{cos^2 x}<0$，

故 $g(x)$ 在 $[0，\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减，因为 $f(0)=0$，则 $f(x)\leq 0$，结合选项可知，$g(\dfrac{\pi}{6})>g(\dfrac{\pi}{4})$，从而有 $\dfrac{f(\frac{\pi}{6})}{\frac{\sqrt{3}}{2}}>\dfrac{f(\frac{\pi}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

即 $f(\dfrac{\pi}{6})>\dfrac{\sqrt{6}}{2}f(\dfrac{\pi}{4})$，故 A 错误，因为 $ln\dfrac{1}{3}\pi>0$，结合 $g(x)$ 在在 $[0，\dfrac{1}{2}\pi)$ 上单调递减可知 $g(\ln\dfrac{1}{3}\pi)<0$，从而有 $\dfrac{f(\ln\frac{1}{3}\pi)}{\cos\ln\frac{1}{3}\pi}<0$，由 $\cos\ln\dfrac{1}{3}\pi>0$ 可得 $f(ln\dfrac{1}{3}\pi)<0$，故 B 错误；$g(\dfrac{\pi}{6})>g(\dfrac{1}{3}\pi)$，从而有 $\dfrac{f(\frac{\pi}{6})}{\frac{\sqrt{3}}{2}}>\dfrac{f(\frac{1}{3}\pi)}{\frac{1}{2}}$，且

$f(\dfrac{1}{3}\pi)<0$，即 $f(\dfrac{\pi}{6})>\sqrt{3}f(\dfrac{1}{3}\pi)>2f(\dfrac{1}{3}\pi)$．故 C 正确；$g(\dfrac{\pi}{4})>g(\dfrac{1}{3}\pi)$，从而有 $\dfrac{f(\frac{\pi}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2}}>\dfrac{f(\frac{1}{3}\pi)}{\frac{1}{2}}$ 即

$f(\dfrac{\pi}{4})>\sqrt{2}f(\dfrac{1}{3}\pi)$．故 D 正确．故选 CD．

15.【解析】已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{2})$ 上的奇函数，其导函数为 $f'(x)$，$f(\dfrac{\pi}{8})=\sqrt{2}$，令

$F(x)=f(x)\sin 2x(0<x<\dfrac{\pi}{2})$，且当 $x\in(0，\dfrac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)\sin 2x+2f(x)\cos 2x>0$．

则 $F'(x)=f'(x)\sin 2x+2f(x)\cos 2x>0(0<x<\frac{\pi}{2})$，所以 $F(x)=f(x)\sin 2x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上为单调递增，且 $F(\frac{\pi}{8})=f(\frac{\pi}{8})\sin(2\times\frac{\pi}{8})=1$，所以 $F(x)=f(x)\sin 2x<F(\frac{\pi}{8})$，解得 $0<x<\frac{\pi}{8}$，

由 $f(x)$ 是定义在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的奇函数得，$F(x)=f(x)\sin 2x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 为偶函数，

所以不等式 $f(x)\sin 2x<1$ 的解集为 $(-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8})$，故答案为：$(-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8})$.

16.【解析】$f'(x)=\dfrac{\cos x\cdot e^x-(\sin x-a)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{\cos x-\sin x+a}{e^x}$，定义域为 R，由题意：$f'(x)=0$ 有解，

即 $\cos x-\sin x+a=0\Rightarrow a=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，但 $a=\pm\sqrt{2}$ 时 $f'(x)\geq 0$ 或 $f'(x)\leq 0$ 恒成立，函数 $f(x)$ 单调，不存在极值点，所以 a 的取值范围 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，故答案为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

17.【解析】函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增，所以 $f'(x)\geq 0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恒成立，

即 $1-\frac{2}{3}\cos 2x-a\sin x\geq 0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恒成立．由 $\frac{4}{3}sin^2x-a\sin x+\frac{1}{3}\geq 0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恒成立．

$\sin x=t$，$t\in[-1,1]$ 则有 $\frac{4}{3}t^2-at+\frac{1}{3}\geq 0$ 在 $[-1,1]$ 内恒成立．

所以 $\begin{cases}\frac{4}{3}t^2-at+\frac{1}{3}\geq 0\text{在}[-1,0)\text{内恒成立}\\ \frac{4}{3}t^2-at+\frac{1}{3}\geq 0\text{在}t=0\text{时恒成立}\\ \frac{4}{3}t^2-at+\frac{1}{3}\geq 0\text{在}(0,1]\text{内恒成立}\end{cases}$，即 $\begin{cases}a\geq\frac{4t}{3}+\frac{1}{3t}\text{在}[-1,0)\text{内恒成立}\\ t\in R\\ a\leq\frac{4t}{3}+\frac{1}{3t}\text{在}(0,1]\text{内恒成立}\end{cases}$，故 $-\frac{4}{3}\leq t\leq\frac{4}{3}$．故选 C．

18.【解析】求导 $f'(x)=2-\cos 2x+a\cos x$，依题意，$2-\cos 2x+a\cos x\geq 0$ 对任意 $x\in R$ 恒成立，所以 $2\cos^2x-a\cos x-3\leq 0$ 对任意 $x\in R$ 都成立，令 $t=\cos x$，$t\in[-1,1]$，则 $2t^2-at-3\leq 0$ 对 $t\in[-1,1]$ 恒成立，所以 $\begin{cases}2+a-3\leq 0\\2-a-3\leq 0\end{cases}$，解得 $-1\leq a\leq 1$．故选 D．

19.【解析】当 $a=-1$ 时，$f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$，则可得，$f'(x)=\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}<0$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上恒成立，故 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减，所以 $M=f(\frac{\pi}{6})=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}<\sqrt{3}$，故 A 正确；当 $a=2$ 时，$f(x)=x^2\cdot\cos x$，则 $f'(x)=2x\cos x-x^2\sin x=x(2\cos x-x\sin x)$，易证 $2\cos x-x\sin x>0$ 恒成立，故 $f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递增，$M=f(\frac{1}{3}\pi)=\frac{\pi^2}{18}<\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 B 成立；当 $a=1$ 时，$f(x)=x\cos x$，则可得 $f'(x)=\cos x-x\sin x$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减，所以 $f'(x)>f'(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12}>0$，故 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递增，$M=f(\frac{1}{3}\pi)=\frac{\pi}{6}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 C 错误；当 $a=3$ 时，$f(x)=x^3\cos x$，则

$f'(x)=-x^3\sin x+3x^2\cos x=x^2(3\cos x-x\sin x)$，易得 $h(x)=3\cos x-x\sin x$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减，

所以 $h(x)\geq h(\frac{1}{3}\pi)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递增，$M=f(\frac{1}{3}\pi)=\frac{\pi^3}{54}>\frac{1}{2}$，故 D 错误．故选 AB．

20.【解析】求导 $f'(x)=2\cos^2x-2\sin^2x-2\sin x=-4\sin^2x-2\sin x+2=-2(\sin x+1)(2\sin x-1)$，

所以当 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6})$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)<0$．故 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6})$ 上单调递增，在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ 上单调递减．所以当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $f(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$．故答案为：$\frac{3\sqrt{3}}{2}$．

21.【解析】求导 $f'(x)=\frac{1}{2}+\cos x$，当 $x\in(0,\frac{2\pi}{3})$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；$x\in(\frac{2\pi}{3},\pi)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$f(x)_{\max}=f(\frac{2\pi}{3})=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$，故答案为：$\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$．

22.【解析】函数 $f(x+1)-2=x^3+\pi^x-\frac{1}{\pi^x}$，观察得函数 $g(x)=f(x+1)-2$ 为单调递增函数，

所以 $f(-x+1)-2=-x^3+\frac{1}{\pi^x}-\pi^x$，得 $f(x+1)-2+f(-x+1)-2=0$，故 $g(x)=f(x+1)-2$ 为奇函数，也为单调递增函数，故 $f(\sin x+1+1)-2>2-f(\cos 2x)$，又 $f(\sin x+1+1)-2=g(\sin x+1)$，

所以 $2-f(\cos 2x)=-(f(\cos 2x)-2)=-(f(-2\sin^2x+1)-2)=g(2\sin^2x)$，即 $g(\sin x+1)>g(2\sin^2x)$，

所以 $\sin x+1>2\sin^2x$，故 $-\frac{1}{2}<\sin x<1$，即 $-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7}{6}x+2k\pi$ 且 $x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，

所以 x 的取值范围为 $(-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)\cup(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{7\pi}{6}+2k\pi)$，$k\in Z$．故选 B．

23.【解析】函数 $f(x)=e^x(\sin x-\cos x)$，求导 $f'(x)=(e^x)'(\sin x-\cos x)+e^x(\sin x-\cos x)'=2e^x\sin x$，
当 $x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 时，$f'(x)<0$，
当 $x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 时，函数递增，$x\in(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 时，函数递减，
故当 $x=2k\pi+\pi$ 时，$f(x)$ 取极大值，其极大值为 $f(2k\pi+\pi)=e^{2k\pi+\pi}[\sin(2k\pi+\pi)-\cos(2k\pi+\pi)]$
$=e^{2k\pi+\pi}\times(0-(-1))=e^{2k\pi+\pi}$，又 $0\le x\le 2020\pi$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的各极大值之和 $S=e^{\pi}+e^{3\pi}+e^{5\pi}+\ldots+e^{2019\pi}$
$=\frac{e^{\pi}(1-(e^{2\pi})^{1010})}{1-e^{2\pi}}=\frac{e^{\pi}(1-e^{2020\pi})}{1-e^{2\pi}}$，故选 C．

24.【解析】函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos\frac{\pi x}{m}$，可得 $f'(x)=-\frac{\pi}{m}\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{m}x$，因为 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，得 $f'(x_0)=0$，

即 $-\frac{\pi}{m}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi x_0}{m}=0$，得 $\frac{\pi x_0}{m}=k\pi$，$k\in Z$，即 $x_0=mk$，所以 ${x_0}^2+[f(x_0)]^2<m^2$ 可转化为：

$(mk)^2+[\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{m}(mk)]^2<m^2$，$k\in Z$，即 $k^2m^2+3<m^2$，即 $k^2<1-\frac{3}{m^2}$，$k\in Z$，要使原问题成立，只需存在 $k\in Z$，使 $1-\frac{3}{m^2}>k^2$ 成立即可，又 k^2 的最小值为 0，故 $1-\frac{3}{m^2}>0$，解得 $m<-\sqrt{3}$ 或 $m>\sqrt{3}$，故选 B．

25.【解析】求导 $f'(x)=e^x[a(\sin x+\cos x)+b(\cos x-\sin x)]$，所以 $f'(0)=a+b=0$，又 $a^2+b^2=2$，故 $\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$，当 $a=-1$，$b=1$ 时，$f'(x)=-2e^x\sin x$，在区间 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 上 $f'(x)>0$，在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上 $f'(x)<0$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 极大值点，不符合题意．当 $a=1$，$b=-1$ 时，$f'(x)=2e^x\sin x$，在区间 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 上 $f'(x)<0$，在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上 $f'(x)>0$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 极小值点，符合题意，所以 $a=1$，故选 C．

26.【解析】由 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+a\cos x$ 得，$f'(x)=x-a\sin x$，令 $y_1=x$，$y_2=a\sin x$，在同一坐标系中作出 $y_1=x$，$y_2=a\sin x$ 的图象，当 $0<x<x_0$ 时，$y_1<y_2$，即 $f'(x)=x-a\sin x<0$，故 $f(x)$ 单调递减；
当 $x=x_0$ 时，$y_1=y_2$，即 $f'(x)=x-a\sin x=0$，故 $f(x)$ 取最小值；当 $x_0<x<\pi$ 时，$y_1>y_2$，即 $f'(x)=x-a\sin x>0$，故 $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 有最小值无最大值，故选 B．

27.【解析】由 $f(x)=e^x-\frac{1}{e^x}-2\sin x$，故 $f(-x)=e^{-x}-e^x+2\sin x=-f(x)$，

$f(x)'=e^x+\frac{1}{e^x}-2\geq 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$，所以 $f(x)$ 在 R 上单调递增且为奇函数，由 $f(2a^2)+f(a-3)<0$，

可得 $f(2a^2)<-f(a-3)=f(3-a)$，所以 $2a^2<-a+3$，解可得，$-\frac{3}{2}<a<1$，故答案：$(-\frac{3}{2}，1)$．

28.【解析】函数 $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{2})+\frac{x}{x^2+1}+1=\cos(\frac{\pi}{2}-2x)+\frac{x}{x^2+1}+1=\sin 2x+\frac{x}{x^2+1}+1$，

设函数 $g(x)=\sin x+\frac{x}{x^2+1}$，$x\in R$，则 $g(-x)=\sin(-x)+\frac{-x}{(-x)^2+1}=-\sin x-\frac{x}{x^2+1}=-g(x)$，

所以 $g(x)$ 是 R 上的奇函数，设 $g(x)$ 的最大值为 M，则 $g(x)$ 的最小值为 $-M$，所以 $f(x)$ 的最大值为 $M+1$，最小值为 $-M+1$，故 $(M+1)+(-M+1)=2$，即 $f(x)$ 的最大值与最小值的和为 2，故选 C．

29.【解析】求导 $f'(x)=\frac{\cos x+x\sin x}{cos^2x}-\cos x=\frac{\cos x+x\sin x-cos^3x}{cos^2x}=\frac{\cos x(1-cos^2x)+x\sin x}{cos^3x}$

$=\frac{\cos x sin^2x+x\sin x}{cos^2x}=\frac{\sin x(x+\sin x\cos x)}{cos^2x}$，令 $g(x)=x+\sin x\cos x$，$x\in[\frac{2\pi}{3}，\frac{4\pi}{3}]$，

则 $g'(x)=1+\cos^2x-\sin^2x=1+\cos 2x>0$，所以 $g(x)$ 在 $[\frac{2\pi}{3}，\frac{4\pi}{3}]$ 上递增，

$g(x)>g(\frac{2\pi}{3})=\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}>0$，又 $\sin x>0$，$\cos^2x>0$，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $[\frac{2\pi}{3}，\frac{4\pi}{3}]$ 上是递增函数，所以 $x=\frac{2\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $-\frac{4\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故答案为 $-\frac{4\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$．

30.【解析】函数 $f(x)=-\frac{2}{\pi}\sin\pi x$ 的零点为 $x=k$，$k\in Z$，由题意可得 $x_0=1$，$f(x)$ 的导数为 $f'(x)=-2\cos\pi x$，

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1，0)$ 处的切线斜率为 $-2\cos\pi=2$，可得切线方程为 $y=2x-2$，$y=\frac{3}{2}x^2-\ln x$ 的导数为 $y'=3x-\frac{1}{x}$，设与切线 $y=2x-2$ 平行的直线与曲线 $y=\frac{3}{2}x^2-lnx$ 相切的切点为 $(m，n)$，可得 $n=\frac{3}{2}m^2-\ln m$，$m>0$，而 $3m-\frac{1}{m}=2$，解得 $m=1$（负的舍去），则切点为 $(1，\frac{3}{2})$，可得切点到直线 $y=2x-2$ 的距离为 $d=\frac{|2-2-\frac{3}{2}|}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$，则 $|PQ|$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{5}}{10}$，故选 C．

31.【解析】法一：取四点控制 $\begin{cases}|f(-1)|\leq 2\\|f(1)|\leq 2\\|f(\frac{1}{2})|\leq 2\\|f(-\frac{1}{2})|\leq 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leq -8-a+b\leq 2\\-2\leq -8-a-b\leq 2\\-2\leq 1-\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b\leq 2\\-2\leq 1-\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b\leq 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6\leq b\leq 10\\-2\leq b\leq 6\end{cases}\Rightarrow b=6$，$a=0$，即存在．

法二 令 $x=\cos\alpha$，则 $f(x)=8x^3-ax^2-bx=2\cos 3\alpha-\frac{a}{2}\cos 2\alpha+(6-b)\cos\alpha-\frac{a}{2}$，

$|f(x)|\leq 2|\cos 3\alpha|+\frac{|a|}{2}|\cos 2\alpha+1|+|6-b||\cos\alpha|\leq 2|\cos 3\alpha|=2$，当 $a=0$，$b=6$ 时满足题意。

32.【解析】法一：关于 x 的方程 $5x^3=15x-m$ 在 $[-1，2]$ 上有解，即：方程 $m=15x-5x^3$ 在 $[-1，2]$ 上有解，可得 $m'=15-15x^2$，令 $15-15x^2=0$，可得 $x=\pm 1$，当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时 $m'<0$，$x\in(-1，1)$ 时，$m'>0$，所以 $x\in[-1，2]$ 上，$x=-1$ 时 m 取得极小值为：-10；$x=1$ 时 m 取得极大值：10；$x=2$ 时，$m=-10$，综上关于 x 的方程 $5x^3=15x-m$ 在 $[-1，2]$ 上有解，则实数 m 的取值范围是 $[-10，10]$，故选：A．

法二：（三倍角公式构造）由于 $x\in[-1,2]$，令 $x=2\cos\alpha(\alpha\in[0,\frac{2}{3}\pi])$，则 $\cos3\alpha\in[-1,1]$，

$5x^3-15x+m=10\cos3\alpha+m=0$ 有解，易知 $-10\le m\le10$，故选 A．

33．【解析】法一：依题意，$4x^3-ax+1\ge0$ 在 $x\in[0,1]$ 上恒成立，当 $x=0$ 时，$1\ge0$ 显然成立；

当 $x\in(0,1]$ 时，则 $a\le4x^2+\frac{1}{x}$，令 $g(x)=4x^2+\frac{1}{x}$，$0<x\le1$，则 $g'(x)=8x-\frac{1}{x^2}=\frac{8x^3-1}{x^2}=\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{x^2}$，

易知，当 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单减；当 $x\in(\frac{1}{2},1]$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单增，函数 $g(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得最小值，最小值为 3，则 $a\le3$，故答案为 $(-\infty,3]$．

法二：由 $4x^2+\frac{1}{x}=4x^2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}\ge3\sqrt[3]{4x^2\cdot\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{2x}}=3$，故答案为 $(-\infty,3]$．

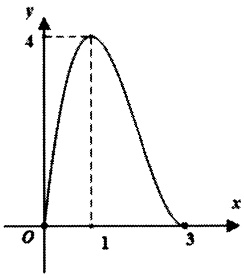
法三：令 $x=\cos\alpha(\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}])$，$f(x)=4x^3-ax+1=\cos3\alpha+(3-a)\cos\alpha+1\ge-1+(3-a)\cos\frac{\pi}{3}+1\ge0\Leftrightarrow a\le3$，

故答案为 $(-\infty,3]$．

34．解法一：考虑问题的反面：存在实数 a 和 b，对任意的 $x\in[0,3]$，使得 $f(x)<m$ 成立，即 $|x^3-6x^2+9x+(a-9)x+b|<m$，设 $g(x)=x^3-6x^2+9x(0\le x\le3)$，则 $g'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$，易知函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，在 $(1,3)$ 上递减，且 $g(0)=g(3)$，$g(1)=4$，而 $y=|x^3-6x^2+9x+(a-9)x+b|$ 可理解为函数 $g(x)=x^3-6x^2+9x$ 与直线 $y=-(a-9)x-b$ 在横坐标相同时，纵坐标的竖直距离，

由图可知，存在实数 a 和 b，对任意的 $x\in[0,3]$，使得 $f(x)<m$ 成立的 m 的取值范围为 $m>2$，

故对任意的实数 a 和 b，总存在 $x_0\in[0,3]$，使得 $f(x_0)\ge m$ 的 m 的取值范围为 $m\le2$，则实数 m 的最大值为 2．故答案为 2．



法二 三倍角：由题意得，$f(x)$ 的对称中心为 $(2,f(2))$，将 $f(x)$ 往左平移两个单位，到原点位置，则

$g(x)=f(x+2)=\left|x^3+px+q\right|$，令 $x=2\cos\theta\,(\theta\in[-\pi,-\frac{\pi}{3}])$，则根据三倍角秒杀秘籍得

$g(x)=\left|2\cos3\theta+(6+2p)\cos\theta+q\right|\le\left|2\cos3\theta\right|+\left|(6+2p)\cos\theta\right|+\left|q\right|\le2$

达标训练（二）

1．【解析】函数 $f(x)=x^3-ax^2$，求导得 $f'(x)=3x^2-2ax$，$f'(1)=3-2a$，$f(1)=1-a$，

所以直线 $l:y=(3-2a)(x-1)+1-a$，$y=(3-2a)x+a-2$，若 l 在点 P 处穿过函数 $f(x)$ 的图象，

只需证 $g(x)=x^3-ax^2-(3-2a)x-a+2$ 在 $x=1$ 两侧附近的函数值异号．

由于 $g(1)=1-a-(3-2a)-a+2=0$，$g'(x)=3x^2-2ax-(3-2a)=(x-1)(3x+3-2a)=3(x-1)(x-\frac{2a-3}{3})$，

当 $a>3$ 时，$\frac{2a-3}{3}>1$，$g'(x)$ 函数在 $(-\infty,1)$ 递增，在 $(1,\frac{2a-3}{3})$ 递减，而 $g(1)=0$，所以 $g(1)$ 为函数的极大值，在 $x=1$ 两侧函数值小于等于 0，不成立，同理当 $a>3$ 时，也不成立，当 $a=3$ 时，$g'(x)=3(x-1)^2\ge0$，所以函数 $g(x)$ 单调递增，又 $g(1)=0$，所以在 $x=1$ 两侧附近的函数值异号，故 $a=3$，故选 A．

2.【解析】由 $f(x)=2x+\cos x$，得 $f'(x)=2-\sin x$，得 $f'(\frac{\pi}{2})=2-\sin\frac{\pi}{2}=2-1=1$，又 $f(\frac{\pi}{2})=2\times\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=\pi$，函数 $f(x)=2x+\cos x$ 在点 $(\frac{\pi}{2}，f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程为 $y-\pi=1\times(x-\frac{\pi}{2})$，即 $x-y+\frac{\pi}{2}=0$．故选 B．

3.【解析】函数 $y=e^x(1+\cos x)$ 的导数为 $y'=e^x(1+\cos x-\sin x)$，曲线 $y=e^x(1+\cos x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线斜率为 2，

切点 $(0，2)$，曲线 $y=e^x(1+\cos x)$ 在点 $(0，2)$ 处的切线方程为 $y-2=2x$，即 $y=2x+2$．故选 C．

4.【解析】函数求导 $y'=e^x+\cos x$，所以切线的斜率 $k=y'|_{x=0}=2$，切线方程为 $y-1=2(x-0)$，即 $y=2x+1$．故选 C．

5.【解析】因为切线与直线 $y=ax+1$ 平行，斜率为 a，又 $y'=\frac{-sin^2x-(1+\cos x)\cos x}{sin^2x}=\frac{-1-\cos x}{sin^2x}$，

所以切线斜率 $k=f'(\frac{\pi}{3})=-2$，所以 $y=ax+1$ 的斜率为 -2，即 $a=-2$．故选 C．

6.【解析】由 $y=(x+\sin x)e^x$，得 $y'=(1+\cos x)e^x+(x+\sin x)e^x=(1+x+\cos x+\sin x)e^x$，得 $y'|_{x=0}=2$，曲线 $y=(x+\sin x)e^x$ 在点 $(0，0)$ 处的切线方程为 $y=2x$．故答案为 $y=2x$．

7.【解析】由 $f(x)\le kx+b_2$ 恒成立可得 $4\sin x\le(k-1)x+b_2$ 恒成立，而 $-4\le4\sin x\le4$，且 $y=4\sin x$ 为周期函数，

故 $k-1=0$，且 $b_2\ge4$，同理可得 $b_1\le-4$，所以 b_2-b_1 的最小值为 $4-(-4)=8$．故答案为 8．

8.【解析】法一：函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 的导数为 $f'(x)=1-\frac{2}{3}\cos 2x+a\cos x$，

由题意可得 $f'(x)\ge0$ 恒成立，即为 $1-\frac{2}{3}\cos 2x+a\cos x\ge0$，即有 $\frac{5}{3}-\frac{4}{3}\cos^2x+a\cos x\ge0$，

设 $t=\cos x(-1\le t\le1)$，即有 $5-4t^2+3at\ge0$，当 $t=0$ 时，不等式显然成立；当 $0<t\le1$ 时，$3a\ge4t-\frac{5}{t}$，

由 $4t-\frac{5}{t}$ 在 $(0，1]$ 递增，可得 $t=1$ 时，取得最大值 -1，可得 $3a\ge-1$，即 $a\ge-\frac{1}{3}$；

当 $-1\le t<0$ 时，$3a\le4t-\frac{5}{t}$，由 $4t-\frac{5}{t}$ 在 $[-1，0)$ 递增，可得 $t=-1$ 时，取得最小值 1，可得 $3a\le1$，即 $a\le\frac{1}{3}$．

综上可得 a 的范围是 $[-\frac{1}{3}，\frac{1}{3}]$．

法二：设 $t=\cos x(-1\le t\le1)$，即有 $5-4t^2+3at\ge0$，由题意可得 $5-4+3a\ge0$，且 $5-4-3a\ge0$，解得 a 的范围是 $[-\frac{1}{3}，\frac{1}{3}]$，故选 C．

9.【解析】令 $g(x)=f(x)+1-2x^2$，则 $g'(x)=f'(x)-4x>0$，故 $g(x)$ 在 R 上单调递增，

又 $g(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})+1-2\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}=0$，所以 $g(x)>0$ 的解集为 $x>\frac{1}{2}$，因为 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$，故不等式 $f(\sin\alpha)+\cos 2\alpha>0$ 等价于 $f(\sin\alpha)+1-2\sin^2\alpha>0$，即 $g(\sin\alpha)>0$，得 $\sin\alpha>\frac{1}{2}$，又 $\alpha\in[0，2\pi]$，所以 $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{5\pi}{6}$．故选 A．

10.【解析】依题意，$f(x)-\frac{\cos x}{2}=-f(-x)+\frac{\cos(-x)}{2}$，令 $g(x)=f(x)-\frac{\cos x}{2}$，则 $g(x)=-g(-x)$，

故函数 $g(x)$ 为奇函数，$g'(x)=[f(x)-\frac{\cos x}{2}]'=f'(x)+\frac{\sin x}{2}<0$，故函数 $g(x)$ 在 R 上单调递减，

则 $f(x+\pi)+f(x)\le0\Rightarrow f(x+\pi)-\frac{\cos(x+\pi)}{2}+f(x)-\frac{\cos x}{2}\le0\Leftrightarrow g(x+\pi)+g(x)\le0\Leftrightarrow g(x+\pi)\le-g(x)=g(-x)$，

即 $x+\pi\ge-x$，故 $x\ge-\frac{\pi}{2}$，则 x 的取值范围为 $[-\frac{\pi}{2}，+\infty)$．故答案为 $[-\frac{\pi}{2}，+\infty)$．

11.【解析】令 $g(x)=f(x)-\sin x$， $g'(x)=f'(x)-\cos x\geq 0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，

$g(x)-g(\frac{\pi}{2}-x)=f(x)-\sin x-f(\frac{\pi}{2}-x)+\sin(\frac{\pi}{2}-x)=f(x)-f(\frac{\pi}{2}-x)-\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\geq 0$，所以 $x\geq\frac{\pi}{2}-x$，

即 $x\geq\frac{\pi}{4}$，故选 A.

12.【解析】令 $g(x)=f(x)\cos x$，有 $g'(x)=f'(x)\cos x-f(x)\sin x>0$，故函数 $g(x)$ 单调递增，又由 $g(0)=f(0)\cos 0=1$，不等式 $f(x)\cos x-1>0$ 可化为 $g(x)>g(0)$，则不等式 $f(x)\cos x-1>0$ 的解集为 $(0,+\infty)$. 故选 D.

13.【解析】因为 $f(x)=2(x+1)-\cos x$，得 $f'(x)=2+\sin x>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数，又 $f(0)=2\times 1-\cos 0=1$，由 $f(\ln x-1)<1$ 得 $f(\ln x-1)<f(0)$，则 $\ln x-1<0$，即 $\ln x<1$，得 $0<x<e$. 不等式 $f(\ln x-1)<1$ 的解集为 $(0，e)$，故选 A.

14.【解析】由 $f(x)$ 是 $(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$ 上的奇函数，其导函数为 $f'(x)$，且 $f(1)=0$，令 $g(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$，$-\frac{1}{2}\pi<x<\frac{1}{2}\pi$ 且 $x\neq 0$，又当 $x\in(0，\frac{1}{2}\pi)$ 时，$\cos x>0$，由 $f'(x)\tan x-f(x)>0$ 可得 $f'(x)\sin x-f(x)\cos x>0$，

得 $g'(x)=\frac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{sin^2x}>0$，即 $g(x)$ 在 $(0，\frac{1}{2}\pi)$ 单调递增，且 $g(1)=f(1)=0$，

又 $f(x)$ 为奇函数，即 $f(-x)=-f(x)$，所以 $g(-x)=\frac{f(-x)}{\sin(-x)}=g(x)$，即 $g(x)$ 为偶函数，

当 $x\in(1，\frac{1}{2}\pi)$ 时，$g(x)>0$，$f(x)>0$，当 $x\in(-1，0)$ 时，$g(x)<0$，$f(x)>0$，综上可得，不等式的解集为 $(1，\frac{1}{2}\pi)\cup(-1，0)$.

15.【解析】定义在 R 上的连续可导函数 $f(x)$ 无极值，方程 $f'(x)=0$ 无解，即 $f(x)$ 为 R 上的单调函数，$f[f(x)+2018^x]=2019$，则 $f(x)+2018^x$ 为定值，设 $t=f(x)+2018^x$，则 $f(x)=t-2018^x$，易知 $f(x)$ 为 R 上的减函数，由 $g(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})+mx$，故 $g'(x)=2\cos(x+\frac{\pi}{6})+m$，又 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的单调性相同，

故 $g(x)$ 在 R 上单调递减，则当 $x\in[\frac{3\pi}{2}，2\pi]$，$g'(x)\leq 0$ 恒成立，即 $m\leq -2\cos(x+\frac{\pi}{6})$，

当 $x\in[\frac{3\pi}{2}，2\pi]$，则 $x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{5\pi}{3}，\frac{16\pi}{3}]$，则当 $x+\frac{\pi}{6}=2\pi$ 时，$y=2\cos(x+\frac{\pi}{6})$ 取得最大值 2，此时 $y=-2\cos(x+\frac{\pi}{6})$ 取得最小值 -2，即 $m\leq -2$，即实数 m 的取值范围是 $(-\infty，-2]$，故选 A.

16.【解析】由题意可得，$f'(x)=e^x(\cos x-\sin x+a)\geq 0$ 在区间 $(0，\pi)$ 上恒成立，故 $a\geq\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 在区间 $(0，\pi)$ 上恒成立，结合正弦函数的性质可知，当 $0<x<\pi$ 时，$\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 的最大值 $\sqrt{2}$，$a\geq\sqrt{2}$. 故答案为 $[\sqrt{2}，+\infty)$.

17.【解析】函数 $f(x)=k\sin x+2x+1(k\in R)$，$f'(x)=k\cos x+2$，$y=\cos x$ 的周期为 2π，当 $k\in(-\infty，-2)\cup(2，+\infty)$ 时，$k\cos x+2=0$，可得在一个函数的周期内，有 2 个实数解，所以函数的极值点 的个数为 2 个，故选 C.

18.【解析】由函数 $y=f'(x)$ 没有零点，可知 $f(x)$ 在 R 上单调，由 $f[f(x)-2020^x]=2020$，令 $f(x)-2020^x=t$，则 $f(x)=2020^x+t$，则 $f(x)$ 单调递增，故 $g(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x-kx$ 在 $[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$ 上与 $f(x)$ 在 R 上的单调性相同时，即 $g(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x-kx$ 在 $[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，故 $g'(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x-k\geq 0$ 在 $[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$ 上恒成立，所以 $k\leq 2\sin(x+\frac{\pi}{6})$ 在 $[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$ 上恒成立，结合正弦函数的性质可知，当 $x\in[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$ 时，

$-\sqrt{3}\le 2\sin(x+\dfrac{\pi}{6})\le 2$，则 $k\le -\sqrt{3}$，故选 B．

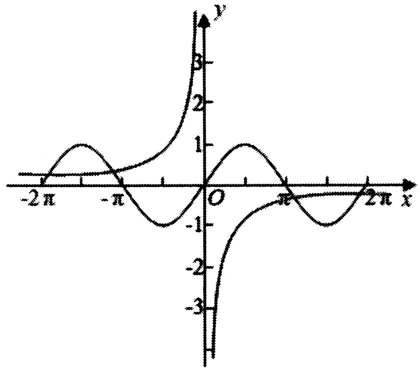
19.【解析】因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-2\pi，2\pi)$，所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数，

又 $f'(x)=1+\cos x-(\cos x-x\sin x)=1+x\sin x$，当 $x\in[0，\pi)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[0，\pi)$ 上单调递增．

显然 $f'(0)\ne 0$，令 $f'(x)=0$，得 $\sin x=-\dfrac{1}{x}$，分别作出 $y=\sin x$，$y=-\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[-2\pi，2\pi)$ 上的图象，

由图可知，这两个函数的图象在区间 $[-2\pi，2\pi)$ 上共有 4 个公共点，且两图象在这些公共点上都不相切，

故 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi，2\pi)$ 上的极值点的个数为 4，且 $f(x)$ 只有 2 个极大值点．故选 BD．



20.【解析】函数 $y=\sin^2 x+\cos^3 x+a-1=-\cos^2 x+\cos^3 x+a$，因为 $x\in[-\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{2}]$．所以 $\cos x\in[0，1]$，

令 $t=\cos x$，则 $g(t)=t^3-t^2+a$，$g'(t)=3t^2-2t=t(3t-2)$，$t\in[0，1]$，当 $t\in[0，\dfrac{2}{3}]$ 时，$g'(t)\le 0$，当 $t\in(\dfrac{2}{3}，1]$，

时，$g'(t)>0$，从而 $g(t)_{\max}=g(\dfrac{2}{3})=a-\dfrac{4}{27}=0$，解得 $a=\dfrac{4}{27}$．故答案为 $\dfrac{4}{27}$．

21.【解析】求导 $f'(x)=2\sin^2 x\cos x-\sin x=\sin x(2\sin x\cos x-1)$，因为 $x\in(0，\pi)$，故 $0<2x<2\pi$，即

$\sin 2x\le 1$，$\sin x>0$，当 $2\sin x\cos x-1=0$，$\sin 2x=1$，$x=\dfrac{\pi}{4}$；当 $\dfrac{\pi}{4}<x<\pi$ 时，$f'(x)<0$，当 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时，

$f'(x)<0$，故函数 $f(x)$ 不存在极值，故选 D．

22.【解析】函数 $f(x)=ax+\dfrac{1}{x+b}(a，b\in Z)$，导数 $f'(x)=a-\dfrac{1}{(x+b)^2}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2，f(2))$ 处的

切线方程为 $y=3$，可得 $f(2)=2a+\dfrac{1}{2+b}=3$，$f'(2)=a-\dfrac{1}{(2+b)^2}=0$，解方程可得 $a=1$，$b=-1$，(分数舍

去)，则 $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$；方程 $x-1+\dfrac{1}{x-1}=A\sin(x-1)$ 有 x_1，x_2，x_3，x_4 共 4 个不等实根，可令 $t=x-1$，

可得 $t+\dfrac{1}{t}=A\sin t$，由 $g(t)=t+\dfrac{1}{t}-A\sin t$ 为奇函数，且 $t\ne 0$，可设 $t_1+t_3=0$，$t_2+t_4=0$，

$g(t_1)+g(t_3)=0$，$g(t_2)+g(t_4)=0$，即有 $f(x_1)+f(x_3)=g(t_1)+g(t_3)+2=2$，

$f(x_2)+f(x_4)=g(t_2)+g(t_4)+2=2$，$x_1+x_2+x_3+x_4=4$，则 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{x_1+x_2+x_3+x_4}=\dfrac{2+2}{4}=1$，故选 B．

23.【解析】求导 $f'(x)=\dfrac{[2(x+1)+\cos x]\bullet(x^2+1)-2x[(x+1)^2+\sin x]}{(x^2+1)^2}=\dfrac{(2+\cos x)(x^2+1)-2x\sin x-4x^2}{(x^2+1)^2}$，

且 $f(x)=\dfrac{x^2+1+2x+\sin x}{x^2+1}=1+\dfrac{2x+\sin x}{x^2+1}$，所以 $f'(x)-f'(-x)=0$，$f(x)+f(-x)=2$，

$f(2018)+f(-2018)=2$，$f'(2019)-f'(-2019)=0$，故 $f(2018)+f(-2018)+f'(2019)-f'(-2019)=2$．故选 A．

24.【解析】设 $g(x)=(e^x+e^{-x})\sin x$，则 $g(-x)=-(e^x+e^{-x})\sin x=-g(x)$，所以 $g(x)$ 为奇函数，当 $x\in[-a，-a]$ 时 $g(x)$ 的最大值和最小值互为相反数；所以 $f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=2t=M+N=8$，则 $t=4$，故选 C．

25.【解析】令 $g(x)=f(x)-1=x^3+x+\sin x$，$x\in R$．则 $g(-x)=-g(x)$，故 $g(x)$ 在 R 上为奇函数．

$g'(x)=3x^2+1+\cos x\geq 0$，函数 $g(x)$ 在 R 上单调递增．$f(a-1)+f(2a^2)\leq 2$，化为 $f(a-1)-1+f(2a^2)-1\leq 0$，即 $g(a-1)+g(2a^2)\leq 0$，化为：$g(2a^2)\leq -g(a-1)=g(1-a)$，故 $2a^2\leq 1-a$，即 $2a^2+a-1\leq 0$，解得 $-1\leq a\leq\frac{1}{2}$．实数 a 的取值范围是 $[-1,\frac{1}{2}]$，故选 C．

26.【解析】函数 $f(x)=2+x+\sin x\sqrt{1-x^2}(x\in[-1,1])$，变形为：$f(x)-2=x+\sin x\cdot\sqrt{1-x^2}$，令 $g(x)=f(x)-2=x+\sin x\cdot\sqrt{1-x^2}$，则 $g(-x)=-g(x)$，所以 $g(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 上为奇函数，所以 $g(x)_{\max}+g(x)_{\min}=0$，$f(x)_{\max}-2+f(x)_{\min}-2=0$，所以 $M+N=4$，故选 D．

27.【解析】函数 $f(x)=ax^3+\sin x-x(a\in R)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f'(x)=3ax^2+\cos x-1\geq 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，令 $g(x)=3ax^2+\cos x-1$，则 $g(0)=0$，$g'(x)=6ax-\sin x$，当 $x\geq 0$ 时，$\sin x\leq x$，$g'(x)=6ax-\sin x\geq 6ax-x=(6a-1)x$，

①当 $a\geq\frac{1}{6}$ 时，$g'(x)\geq 0$，此时 $g(x)$ 单调递增；$g(x)\geq g(0)=0$，符合题意；

②当 $a\leq 0$ 时，$g(\frac{\pi}{2})=3a(\frac{\pi}{2})^2-1<0$，不符合题意；

③当 $0<a<\frac{1}{6}$ 时，设 $h(x)=g'(x)=6ax-\sin x$，则 $h'(x)=6a-\cos x$，因为 $h'(0)=6a-1<0$，$h'(\frac{\pi}{2})=6a>0$，存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $h'(x_0)=0$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，所以 $h(x)<h(0)=0$，故 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，所以 $g(x)<g(0)=0$，不符合题意，a 的取值范围为 $[\frac{1}{6},+\infty)$，故选 B．

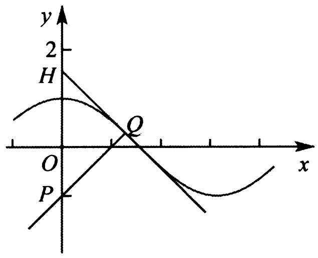
28.【解析】函数 $f(x)=\frac{\cos\theta}{x^2}-\frac{1+2\cos\theta}{x}+1+\sin\theta+\cos\theta$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，

可转化为 $f(x)=\cos\theta(\frac{1}{x}-\frac{1+2\cos\theta}{2\cos\theta})^2-\frac{(1+2\cos\theta)^2}{4\cos\theta}+1+\sin\theta+\cos\theta=\cos\theta(\frac{1}{x}-\frac{1+2\cos\theta}{2\cos\theta})^2+\frac{4\sin\theta\cos\theta-1}{4\cos\theta}$，

$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，当 $0<x<1$，则 $\frac{1}{x}>1$，当 $\frac{1}{x}=\frac{1+2\cos\theta}{2\cos\theta}$ 时，$f(x)_{\min}=\frac{4\sin\theta\cos\theta-1}{4\cos\theta}$，由题意可知，$f(x)_{\min}<0$，

所以 $4\sin\theta\cos\theta-1<0$，从而得到 $2\sin 2\theta<1$，即 $\sin 2\theta<\frac{1}{2}$，所以 $0<2\theta<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{5\pi}{6}<2\theta<\pi$，所以 $0<\theta<\frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{5\pi}{12}<\theta<\frac{\pi}{2}$，故选 C．

29.【解析】设 $y=f(x)$ 图象上一点 $Q(x_0,\cos x_0)$ 处的切线与 y 轴交于 H，$f(x)=\cos x$ 的导数为 $f'(x)=-\sin x$，可得切线的斜率为 $-\sin x_0$，切线方程为 $y-\cos x_0=-\sin x_0(x-x_0)(0<x_0<\frac{\pi}{2})$，令 $x=0$，可得 $y=\cos x_0+x_0\sin x_0$，可得 $H(0,\cos x_0+x_0\sin x_0)$，由题意可得 $|QH|=|QP|$，即 $|QH|^2=|QP|^2$，即 $x_0^2+(x_0\sin x_0)^2=x_0^2+(1+\cos x_0)^2$，可得 $x_0\sin x_0=1+\cos x_0$，$x_0=\frac{1+\cos x_0}{\sin x_0}$，



$\frac{(x_0{}^2-1)\tan x_0}{x_0}=(\frac{1+\cos x_0}{\sin x_0}-\frac{\sin x_0}{1+\cos x_0})\cdot\frac{\sin x_0}{\cos x_0}=\frac{1+2\cos x_0+cos^2x_0-sin^2x_0}{\sin x_0(1+\cos x_0)}\cdot\frac{\sin x_0}{\cos x_0}$

$=\frac{2\cos x_0(1+\cos x_0)}{\sin x_0(1+\cos x_0)}\cdot\frac{\sin x_0}{\cos x_0}=2$，故选 A．

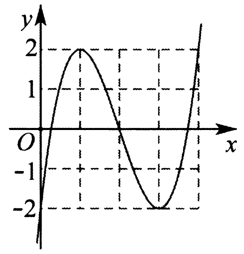
30.【解析】法一：若 $x=0$，则不论 a 取何值，$f(x)\geq 0$ 都成立；当 $x>0$ 即 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=ax^3-x+1\geq 0$ 可化为：$a\geq\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$，设 $g(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$，则 $g'(x)=\frac{3-2x}{x^4}$，所以 $g(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递增，因此 $g(x)_{\max}=g(1)=0$，从而 $a\geq 0$；当 $x<0$ 即 $x\in[-1,0)$ 时，$f(x)=ax^3-x+1\geq 0$ 可化为：$a\leq\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$，

设 $g(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$，则 $g'(x)=\dfrac{3-2x}{x^4}$，$g(x)$ 在区间 $[-1,0)$ 上单调递增，因此 $g(x)_{\min}=g(-1)=2$，从而 $a\le 2$，则 $0\le a\le 2$．即有实数 a 的取值范围为 $[0,2]$，故选 C．

法二：令 $x=\cos\alpha$，则 $f(x)=ax^3-x+1=\dfrac{a}{4}\cos 3\alpha+(\dfrac{3a}{4}-1)\cos\alpha+1=g(\alpha)\ge 0$ 恒成立，

故 $\begin{cases}g(0)\ge 0\\ g(\pi)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le a\le 2$，故选 C．

31.【解析】法一：根据四段论法则（最佳位置选取）得对称中心为 $(2,0)$，画出四段论（参考秒2）图像知 $\begin{cases}f(2)=0\\ f(1)=-f(0)\end{cases}\Rightarrow b=0, c=-2$，即 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$，$f'(x)=3x^2-12x+9$，易得 $Maxf(x)_{\min}=f(1)=2$，所以 $m\le 2$．



法二 a、b、c 均为鸡肋，左平移两个单位，即 $g(x)=\left|(x+2)^3+a(x+2)^2+b(x+2)+c\right|$，令 $x+2=2\cos\alpha$，即 $g(x)=\left|2\cos 3\alpha+2a\cos 2\alpha+2a+(2b+6)\cos\alpha+c\right|\le\left|2\cos 3\alpha\right|+\left|2a\cos 2\alpha\right|+\left|(2b+6)\cos\alpha\right|+\left|2a+c\right|\le 2$，所以 $m\le 2$．

32.【解析】法一：$f'(x)=3x^2+a$，$a\ge 0$ 时，$f'(x)\ge 0$，$f(x)$ 在 $[-1,2]$ 递增，故 $f(x)_{\max}=f(2)=2a+8\ge 8$，$a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得：$x=\pm\sqrt{-\dfrac{a}{3}}$，$\sqrt{-\dfrac{a}{3}}\ge 2$，即 $a\le -12$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,2]$ 递减，

$f(x)_{\max}=f(-1)=-1-a\ge 11$，$-\sqrt{-\dfrac{a}{3}}\le -1$ 即 $-\dfrac{a}{3}\ge 1$ 即 $-12<a\le -3$ 时，

$f(x)$ 在 $[-1,\sqrt{-\dfrac{a}{3}})$ 递减，在 $(\sqrt{-\dfrac{a}{3}},2]$ 递增，故 $f(x)_{\max}=f(-1)$ 或 $f(2)$，而 $f(-1)>f(2)$，

故 $-12<a\le -3$ 时，$f(x)_{\max}=f(-1)=-1-a$，$\begin{cases}2a+8, & a>-3\\ -a-1, & a\le -3\end{cases}$，$-3<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,\sqrt{-\dfrac{a}{3}})$ 递增，在 $(-\sqrt{-\dfrac{a}{3}},\sqrt{-\dfrac{a}{3}})$ 递减，在 $(\sqrt{-\dfrac{a}{3}},2]$ 递增，故 $f(x)_{\max}=f(-\sqrt{-\dfrac{a}{3}})$ 或 $f(2)$，而 $f(-\sqrt{-\dfrac{a}{3}})<f(2)$，故 $-3<a<0$ 时，$f(x)_{\max}=f(2)=2a+8$，故 $M=\begin{cases}2a+8, & a>-3\\ -a-1, & a\le -3\end{cases}$，故 $a=-3$ 时，M 取最小值2，故答案为2．

法二：函数 $f(x)=2\cos 3\alpha+(6+2a)\cos\alpha\le 2$，故答案为2．

专题 15　导数和三角函数交汇之解答题

达标训练

1.【解析】法一：由 $f(x)=e^x+a\cos x+1$，得 $f'(x)=e^x-a\sin x$，故 $f'(0)=1=k$，$f(0)=2+a$，则切点为 $(0,2+a)$，所以 $2+a=1\times 0+4$，即 $a=2$．$a+k=3$．故答案为3．

法二：（泰勒展开秒杀法）：根据题意 $f(x)$ 在零处的泰勒展开式为 $1+x+\dfrac{x^2}{2}+a-\dfrac{a}{2}x^2+1$，根据题意有，

$1+x+\frac{x^2}{2}+a-\frac{a}{2}x^2+1-kx-4=0$，由秒杀秘籍可知最低项为奇次项时，系数必须为零，即 $x-kx=0$，所以 $k=1$，再由曲线与直线相切知常数项为零得 $2+a-4=0\Rightarrow a=2$，所以 $a+k=3$，故答案为 3.

2.【解析】法一：函数 $f(x)=ax^2+\sin x$ 的导数为 $f'(x)=2ax+\cos x$，可得图象在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线斜率为 $a\pi+\cos\frac{\pi}{2}=a\pi$，切线方程为 $y=x+b$，可得 $a=\frac{1}{\pi}$，$b=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi}{4}$，故选 B.

法二：把 $f(x)$ 整体向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位，得 $f(x+\frac{\pi}{2})=g(x)=a(x+\frac{\pi}{2})^2+\cos x$，切线方程向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 为 $y=x+\frac{\pi}{2}+b$，则 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为 $ax^2+\pi ax+\frac{\pi^2}{4}a+1-\frac{x^2}{2}$，根据题意有

$ax^2+\pi ax+\frac{\pi^2}{4}a+1-\frac{x^2}{2}-x-b-\frac{\pi}{2}=0$，一次项系数以及常数项必须为零，即 $\pi ax-x=0\Rightarrow a=\frac{1}{\pi}$，

所以 $\frac{\pi}{4}-b+1-\frac{\pi}{2}=0\Rightarrow b=1-\frac{\pi}{4}$，故选 B.

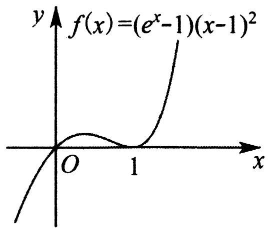
3.【解析】法一：由题意得可得 $e^{2x}+e^{-2x}\geq 2\cos 2x+ax$，$x=0$ 时，不等式显然成立，可得 $a\leq\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2\cos 2x}{x}$ 对 $x>0$ 恒成立，由 $e^{2x}+e^{-2x}\geq 2\sqrt{e^{2x}\cdot e^{-2x}}=2$，$2\cos 2x\leq 2$，即有 $-2\cos 2x\geq -2$，即 $e^{2x}+e^{-2x}-2\cos 2x\geq 0$，则 $a\leq 0$，故选 C.

法二：由 $e^{2x}+e^{-2x}\approx 2+4x^2\geq 2(1-2x^2)+ax\Rightarrow a\leq 0$，故选：$C$.

4.【解析】当 $k=1$ 时，函数 $f(x)=(e^x-1)(x-1)$，求导函数可得 $f'(x)=e^x(x-1)+(e^x-1)=(xe^x-1)$，$f'(1)=e-1\neq 0$，$f'$（2）$=2e^2-1\neq 0$，则 $f(x)$ 在在 $x=1$ 处与在 $x=2$ 处均取不到极值，

当 $k=2$ 时，函数 $f(x)=(e^x-1)(x-1)^2$．求导函数可得 $f'(x)=e^x(x-1)^2+2(e^x-1)(x-1)=(x-1)(xe^x+e^x-2)$，

$\therefore$ 当 $x=1$，$f'(x)=0$，且当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，当 $x_0<x<1$ 时（x_0 为极大值点），$f'(x)<0$，故函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数；在 $(x_0,\ 1)$ 上是减函数，从而函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 取得极小值．对照选项．故选：C.



法二：（泰勒展开秒杀）：把 $f(x)$ 向左平移一个单位得 $f(x+1)=x^k(e^{x+1}-1)=x^k(e\cdot e^x-1)$ 因为 $y=e^x$ 在零处的泰勒展开式为 $1+x+\frac{x^2}{2}$，$x^k(e^{x+1}-1)=x^k[e(1+x+\frac{x^2}{2})-1]=x^k(e-1+ex+\frac{ex^2}{2})$，根据秒杀秘籍知，偶此项系数大于零，则取得极小值，最低项奇次项系数必须为零，若 $k=1$ 则最低项为奇次项，显然不行，即 $k=2$，故选 C.

5.【解析】法一：求导得 $f'(x)=\frac{1}{x+\frac{1}{2}}+\frac{2(2ax^2-x-1)-2x(4ax-1)}{(2ax^2-x-1)^2}$，令 $f'(x)=0$，即 $4a^2x^2-8ax-(6a-1)=0$，

若 $x=0$ 是极大值点，$f'(0)=-(6a-1)=0$，解得：$a=\frac{1}{6}$，故选 A.

法二：（泰勒展开秒杀）：因为 $y=\ln(x+\frac{1}{2})$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为 $\ln\frac{1}{2}+2x-2x^2$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为 $\ln\frac{1}{2}+2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3-2x[1-(x-2ax^2)+(x-2ax)]$，化简得最低奇次项为 $x^3(\frac{8}{3}-4a-2)$，最低项奇次项系数必须为零，即 $a=\frac{1}{6}$，故选 A.

6.【解析】法一：求导得 $f'(x)=x[x^2+(2+a)x+a-2]e^x$；令 $x^2+(2+a)x+a-2=0$，则 $\Delta=a^2+12>0$；设 $g(x)=x^2+(2+a)x+a-2$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点；故 $g(0)<0$；即 $a-2<0$，$a<2$，故答案为 $(-\infty，2)$．

法二：泰勒展开秒杀：因为 $y=e^x$ 在零处的泰勒展开式为 $1+x+\dfrac{x^2}{2}$，所以 $f(x)$ 在零处的泰勒展开式为 $(x^3+(a-1)x^2-ax+a)(1+x+\dfrac{x^2}{2})$，化简易得最低偶次项为 $(-a+a-1+\dfrac{a}{2})x^2$，根据秒杀秘籍知，取得极大值时，偶此项系数必须小于零，即 $a<2$．故答案为：$(-\infty，2)$．

7.【解析】法一：求导得 $f'(x)=\dfrac{a}{x}+2bx+1$，因为 $f'(1)=0$，得 $a+2b+1=0$，
由 $f(1)=-1=-1$，所以 $0+b+1=-1$，解得 $a=3$，$b=-2$，则 $a-b=5$．故答案为 5．
法二：泰勒展开秒杀：$f(1)=-1\Rightarrow b=-2$，将 $f(x)$ 向左平移 1 个单位，并在 $x=0$ 处进行泰勒展开，
其展开式约为 $ax-\dfrac{ax^2}{2}-2(x+1)^2+x+1=x^2(-\dfrac{a}{2}-2)+x(a-4+1)$，所以 $a=3$，则 $a-b=5$．故答案为：5．

8.【解析】函数的导数为 $f'(x)=e^x[(x-1)^2(x+a)]+e^x[(x-1)^2(x+a)]'$，即 $f'(x)=e^x(x-1)[x^2+(a+1)x-1]$，
设 $g(x)=x^2+(a+1)x-1$，则 $\Delta=(a+1)^2+4>0$，所以 $g(x)$ 有两个不相等的实根．
于是可设 x_1，x_2 是 $g(x)=0$ 的两实根，且 $x_1<x_2$，
①当 $x_1=1$ 或 $x_2=1$ 时，则 $x=1$ 不是 $f(x)$ 的极值点，此时不合题意；
②当 $x_1\neq1$ 且 $x_2\neq1$ 时，由于 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，故 $x_1<1<x_2$，即 g（1）<0，即 $1^2+(1+a)-1<0$，所以 $a<-1$，所以 a 的取值范围是 $(-\infty，-1)$．
法二：泰勒展开秒杀：把 $f(x)$ 向左平移一个单位，得 $g(x)=f(x+1)=x^2(x+a+1)\cdot e^{x+1}$，因为 $y=e^{x+1}$ 在零处的泰勒展开式为 $e(1+x+\dfrac{x^2}{2})$，也即 $g(x)$ 在零处的展开式为 $e(x+a+1)(1+x+\dfrac{x^2}{2})$，化简易得最低偶此项为 $e(a+1)x^2$，根据秒杀秘籍知，取得极大值时，偶此项系数必须小于零，即 $e(a+1)<0$，所以 $a<-1$，所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-1)$．（此法不能写在试卷上）

9.【解析】（1）求导 $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x+1}-2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4}-\dfrac{a}{(x+1)^2}-2$，因为 $x=0$ 是 $f(x)$ 的一个极值点，所以 $1+a-2=0$，故 $a=1$．
法二：泰勒展开秒杀：因为 $y=\dfrac{1}{x+1}$ 在零处的泰勒展开式为 $1-x+x^2$，$y=\ln(x+1)$ 在零处的泰勒展开式为 $x-\dfrac{x^2}{2}$（取前两项），即 $f(x)$ 在零处的泰勒展开式为 $(1-x+x^2)(x-\dfrac{x^2}{2})-a(1-x)-2x$，化简易得一次项为 $x+ax-2x$，由秒杀秘籍可知最低项为奇次项时，系数必须为零，即 $a=1$．
（2）函数的定义域为 $(-1，+\infty)$，且当 $x=0$ 时，$f(0)=-a<0$，又直线 $y=-2x$ 恰好过原点，
所以函数 $y=f(x)$ 的图象应位于区域IV内，于是 $f(x)<-2x$，即 $\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}-\dfrac{a}{x+1}-2x<-2x$，
即 $\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}<\dfrac{a}{x+1}$，因为 $x+1>0$，可得 $a>\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$，令 $m(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$，则 $m'(x)=\dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$，
令 $m'(x)=0$，得 $x=e-1$，由 $x>-1$，则 $x\in(-1，e-1)$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 单调递增，
当 $x\in(e-1，+\infty)$ 时，$m'(x)<0$，$m(x)$ 单调递减．所以 $m(x)_{\max}=n(e-1)=\dfrac{1}{e}$，故 a 的取值范围是 $a>\dfrac{1}{e}$．

10.【解析】(1) 求导得 $f'(x)=2x-2\sin x$，则 $f'(\pi)=2\pi$，故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\pi，f(\pi))$ 处的切线方程为：$y-(\pi^2-2)=2\pi(x-\pi)$．化为：$2\pi x-y-\pi^2-2=0$．
（2）函数 $h(x)=g(x)-a=f(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)-a(x^2+2\cos x)$，

求导得 $h'(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)+e^x(-\sin x-\cos x+2)-a(2x-2\sin x)$

$=2(x-\sin x)(e^x-a)=2(x-\sin x)(e^x-e^{\ln a})$，令 $u(x)=x-\sin x$，则 $u'(x)=1-\cos x\geq 0$，所以函数 $u(x)$ 在 R 上单调递增，因为 $u(0)=0$，当 $x>0$ 时，$u(x)>0$；当 $x<0$ 时，$u(x)<0$．

（1）当 $a\leq 0$ 时，$e^x-a>0$，$x>0$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 单调递增；$x<0$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减．$\therefore x=0$ 时，函数 $h(x)$ 取得极小值，$h(0)=-1-2a$．

（2）当 $a>0$ 时，令 $h'(x)=2(x-\sin x)(e^x-e^{\ln a})=0$，解得 $x_1=\ln a$，$x_2=0$．

①当 $0<a<1$ 时，$x\in(-\infty，\ln a)$ 时，$e^x-e^{\ln a}<0$，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增；当 $x\in(\ln a，0)$ 时，$e^x-e^{\ln a}>0$，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减；当 $x\in(0，+\infty)$ 时，$e^x-e^{\ln a}>0$，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增．当 $x=0$ 时，函数 $h(x)$ 取得极小值，$h(0)=-2a-1$．当 $x=\ln a$ 时，函数 $h(x)$ 取得极大值，$h(\ln a)=-a[\ln^2 a-2\ln a+\sin(\ln a)+\cos(\ln a)+2]$．②当 $a=1$ 时，$\ln a=0$，$x\in R$ 时，$h'(x)\geq 0$，函数 $h(x)$ 在 R 上单调递增．③$1<a$ 时，$\ln a>0$，$x\in(-\infty，0)$ 时，$e^x-e^{\ln a}<0$，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增；$x\in(0，\ln a)$ 时，$e^x-e^{\ln a}<0$，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减；$x\in(\ln a，+\infty)$ 时，$e^x-e^{\ln a}>0$，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增．当 $x=0$ 时，函数 $h(x)$ 取得极大值，$h(0)=-2a-1$．当 $x=\ln a$ 时，函数 $h(x)$ 取得极小值，

11.【解析】(1) 函数 $f(x)=e^x\cos x-x$ 的导数为 $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)-1$，可得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0，f(0))$ 处的切线斜率为 $k=e^0(\cos 0-\sin 0)-1=0$，切点为 $(0，e^0\cos 0-0)$，即为 $(0，1)$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0，f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$；

（2）函数 $f(x)=e^x\cos x-x$ 的导数为 $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)-1$，令 $g(x)=e^x(\cos x-\sin x)-1$，

则 $g(x)$ 的导数为 $g'(x)=e^x(\cos x-\sin x-\sin x-\cos x)=-2e^x\cdot\sin x$，当 $x\in[0，\frac{\pi}{2}]$，可得 $g'(x)=-2e^x\cdot\sin x\leq 0$，

即有 $g(x)$ 在 $[0，\frac{\pi}{2}]$ 递减，可得 $g(x)\leq g(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $[0，\frac{\pi}{2}]$ 递减，即有函数 $f(x)$ 在区间 $[0，\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $f(0)=e^0\cos 0-0=1$；最小值为 $f(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$．

12.【解析】（1）由 $f(x)=x\cos x-\sin x$ 得 $f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$，此在区间 $x\in(0，\frac{\pi}{2})$ 上 $f'(x)=-x\sin x<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $x\in[0，\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，从而 $f(x)\leq f(0)=0$．

（2）当 $x>0$ 时，“$\frac{\sin x}{x}>a$”等价于“$\sin x-ax>0$”，“$\frac{\sin x}{x}<b$”等价于“$\sin x-bx<0$”

令 $g(x)=\sin x-cx$，则 $g'(x)=\cos x-c$，当 $c\leq 0$ 时，$g(x)>0$ 对 $x\in(0，\frac{\pi}{2})$ 上恒成立，

当 $c\geq 1$ 时，因为对任意 $x\in(0，\frac{\pi}{2})$，$g'(x)=\cos x-c<0$，所以 $g(x)$ 在区间 $[0，\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，

从而，$g(x)<g(0)=0$ 对任意 $x\in(0，\frac{\pi}{2})$ 恒成立，当 $0<c<1$ 时，存在唯一的 $x_0\in(0，\frac{\pi}{2})$ 使得 $g'(x_0)=\cos x_0-c=0$，$g(x)$ 与 $g'(x)$ 在区间 $(0，\frac{\pi}{2})$ 上的情况如下：

x	$(0，x_0)$	x_0	$(x_0，\frac{\pi}{2})$
$g'(x)$	+		−
$g(x)$	↑		↓

因为 $g(x)$ 在区间 $(0，x_0)$ 上是增函数，所以 $g(x_0)>g(0)=0$ 进一步 $g(x)>0$ 对任意 $x\in(0，\frac{\pi}{2})$ 恒成立，

当且仅当 $g(\frac{\pi}{2})=1-\frac{\pi}{2}c\geq 0$ 即 $0<c\leq\frac{2}{\pi}$，综上所述当且仅当 $c\leq\frac{2}{\pi}$ 时，$g(x)>0$ 对任意 $x\in(0，\frac{\pi}{2})$ 恒成立，

当且仅当 $c\ge 1$ 时，$g(x)<0$ 对任意 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 恒成立，所以若 $a<\frac{\sin x}{x}<b$ 对 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 上恒成立，则 a 的最大值为 $\frac{2}{\pi}$，b 的最小值为 1.

13.【解析】(I) 由已知得 $f'(x)=a(\sin x+x\cos x)$，对于任意的 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，有 $\sin x+x\cos x>0$，当 $a=0$ 时，$f(x)=-\frac{3}{2}$，不合题意；当 $a<0$ 时，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递减，又函数 $f(x)=ax\sin x-\frac{3}{2}(a\in R)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上图象是连续不断的，故函数在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上上的最大值为 $f(0)=-\frac{3}{2}$，不合题意；当 $a>0$ 时，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增，又函数 $f(x)=ax\sin x-\frac{3}{2}(a\in R)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上图象是连续不断的，故函数在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上上的最大值为 $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}a-\frac{3}{2}=\frac{\pi-3}{2}$，解得 $a=1$，综上所述，得 $f(x)=x\sin x-\frac{3}{2}$.

(II) 函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内有且仅有两个零点. 证明如下：由 (I) 知，$f(x)=x\sin x-\frac{3}{2}$，从而有 $f(0)=-\frac{3}{2}<0$，$f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi-3}{2}>0$，又函数在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上图象是连续不断的，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内至少存在一个零点，又由 (I) 知 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增，故函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内仅有一个零点. 当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ 时，

令 $g(x)=f'(x)=\sin x+x\cos x$，由 $g(\frac{\pi}{2})=1>0$，$g(\pi)=-\pi<0$，且 $g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 上的图象是连续不断的，故存在 $m\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，使得 $g(m)=0$，由 $g'(x)=2\cos x-x\sin x$，知 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，有 $g'(x)<0$，从而 $g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 上单调递减，当 $x\in(\frac{\pi}{2},m)$，$g(x)>g(m)=0$，即 $f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},m)$ 内单调递增

故当 $x\in(\frac{\pi}{2},m)$ 时，$f(x)>f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi-3}{2}>0$，从而 (x) 在 $(\frac{\pi}{2},m)$ 内无零点；当 $x\in(m,\pi)$ 时，有 $g(x)<g(m)=0$，即 $f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},m)$ 内单调递减. 又 $f(m)>0$，$f(\pi)<0$ 且 $f(x)$ 在 $[m,\pi]$ 上的图象是连续不断的，从而 $f(x)$ 在 $[m,\pi]$ 内有且仅有一个零点.

综上所述，函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内有且仅有两个零点.

14.【解析】(1) 求导得 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，$x>0$，当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减；所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(e)=\frac{1}{e}+k=\frac{1}{e}+1$，故 $k=1$；

(2) (i) 根据题意，任意 $x\in(0,+\infty)$，$g(x)\ge af(x)$，即 $e^x-\frac{a}{x}\ge\frac{a\ln x}{x}+a$，化简得 $xe^x-a\ln x-ax-a\ge 0$，令 $h(x)=xe^x-a\ln x-ax-a$，$x>0$，$h(x)=e^{\ln x+x}-a(\ln x+x)-a$，令 $\ln x+x=t$，$t\in R$，设 $H(t)=e^t-at-a$，$H'(t)=e^t-a$，只需 $H(t)\ge 0$，$t\in R$，

当 $a<0$ 时，当 $t<0$ 时，$H(t)<1-at-a$，所以 $H(\frac{1}{a}-1)<1-a(\frac{1}{a}-1)-a=0$，不成立；

当 $a=0$ 时，$H(t)\ge 0$ 显然成立；

当 $a>0$ 时，由 $H'(t)=e^t-a$，当 $t\in(-\infty,\ln a)$，$H(t)$ 递减，$t\in(\ln a,+\infty)$，$H(t)$ 递增，

$H(t)$ 的最小值为 $H(\ln a)=a-a\ln a-a=-a\ln a$，由 $H(\ln a)=-a\ln a\ge 0$，得 $0<a\le 1$，

综上 $0\le a\le 1$；

(ii) 证明：要证 $x^2f(x)>a\sin x+x^2-1$，只需证明 $x^2(\dfrac{\ln x}{x}+1)>a\sin x+x^2+1$，

化简得 $x\ln x+1>a\sin x$，只需证 $\ln x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{a\sin x}{x}$，设 $F(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，$G(x)=x-\sin x$，

由 $F'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，当 $x\in(0，1)$ 时，$F(x)$ 递减；$x\in(1，+\infty)$ 时，$F(x)$ 递增；所以 $F(x)\ge F(1)=1$，

由 $G'(x)=1-\cos x\ge 0$，$G(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 递增，故 $G(x)>G(0)=0$，得 $x>\sin x$，

又由 $(i)0\le a\le 1$，所以 $\dfrac{a\sin x}{x}<1$，所以 $F(x)>\dfrac{a\sin x}{x}$ 成立，故原命题成立.

15.【解析】(I) 由题意 $f'(x)=-\sin x+2mx$，$f''(x)=-\cos x+2m$，

①若 $2m\ge 1$，即 $m\ge\dfrac{1}{2}$ 时，$f''(x)\ge 0$，则 $f'(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 单调递增，则 $f'(x)\ge f'(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 单调递增，故 $f(x)\ge f(0)=0$，满足题意；

②若 $-1<2m<1$，即 $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}$ 时，存在 $x_0>0$，使得 $f''(x_0)=0$，且当 $x\in(0，x_0)$ 时，$f''(x)<0$，则 $f'(x)$ 在 $(0，x_0)$ 上单调递减，则 $f'(x)<f'(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $(0，x_0)$ 单调递减，此时 $f(x)<f(0)=0$，舍去；

③若 $2m\le -1$，即 $m\le-\dfrac{1}{2}$ 时，$f''(x)<0$，则 $f'(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 上单调递减，则 $f'(x)<f'(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 单调递减，$f(x)<f(0)=0$，舍去；故 $m\ge\dfrac{1}{2}$.

(II) 证明：由（I）知，当 $m\ge\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=\cos x+mx^2-1\ge 0$，取 $m=\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{1}{2}x^2-1\ge-\cos x$，

由（I）$f'(x)=-\sin x+x\ge 0$，则 $x\ge\sin x$，故 $\dfrac{1}{2}x^2+x-1\ge\sin x-\cos x$，要证 $e^x-2\ge\sin x-\cos x$，只需证 $e^x-2\ge\dfrac{1}{2}x^2+x-1$，令 $g(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x-1$，则 $g'(x)=e^x-x-1$，$g''(x)=e^x-1$，当 $x\ge 0$ 时，$g''(x)\ge 0$，则 $g'(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 上单调递增，有 $g'(x)\ge g'(0)=0$，故 $g(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 调递增，故 $g(x)\ge g(0)=0$，

故 $e^x-2\ge\dfrac{1}{2}x^2+x-1$，得证.

16.【解析】(I) 求导得 $f'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$，由 $x\in(0，\pi)$，令 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，令 $f'(x)<0$ 得 $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$，故当 $x\in(0，\pi)$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0，\dfrac{\pi}{2})$ 单调递增，在 $(\dfrac{\pi}{2}，\pi)$ 单调递减，

$f(x)_{极大值}=f(\dfrac{\pi}{2})=cos\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}sin\dfrac{\pi}{2}-1=\dfrac{\pi}{2}-1$，无极小值；

(II) 证明：令 $g(x)=2\sin x-x\cos x-x$，$x\in[0，\pi]$，则 $g'(x)=2\cos x-(\cos x-x\sin x)-1=\cos x+x\sin x-1$，

由（I）知，$g'(x)=f(x)$，且在 $[0，\dfrac{\pi}{2})$ 递增，在 $(\dfrac{\pi}{2}，\pi]$ 递减，又 $g'(0)=0$，$g'(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}-1>0$，$g'(\pi)=-2<0$，

故存在 $x_0\in(\dfrac{\pi}{2}，\pi)$，使得 $g'(x_0)=0$，当 $x\in[0，x_0)$ 时，$g'(x)\ge 0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_0，\pi]$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，又 $g(0)=0$，$g(\pi)=2\sin\pi-\pi\cos\pi-\pi=0$，所以当 $x\in[0，\pi]$ 时，$g(x)\ge 0$，即 $2\sin x-x\cos x\ge x$，即得证.

法二：先证 $2\sin x\ge 2x-\dfrac{x^3}{3}$，$x\cos x\le x-\dfrac{x^3}{2}$，$2\sin x-x\cos x\ge x+\dfrac{x^3}{6}\ge x$.

17.【解析】(1) 求导得 $f'(x)=1+2\sin x$，当 $x\in[-\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{2}]$ 时，由 $f'(x)<0$ 得，$-\dfrac{\pi}{2}\le x<-\dfrac{\pi}{6}$，由 $f'(x)>0$ 得，$-\dfrac{\pi}{6}<x\le\dfrac{\pi}{2}$，函数 $f(x)$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2}，-\dfrac{\pi}{6})$ 上单调递减，在 $(-\dfrac{\pi}{6}，\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(-\frac{\pi}{6})=2-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$，$f(x)_{\max}=f(\frac{\pi}{2})=2+\frac{\pi}{2}$；

（2）存在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 使不等式 $f(x)\le ax$ 成立，即 $x+2-2\cos x<ax$ 成立，

设 $g(x)=f(x)-ax=x+2-2\cos x-ax$，则 $g(0)=0$，$g'(x)=1+2\sin x-a$，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$1+2\sin x\in(1,3)$，所以 $g'(x)\in(1-a,3-a)$，由于 $1-a\ge0$ 即 $a\le1$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)>g(0)=0$，即 $f(x)>ax$ 恒成立，不满足题意，故 $1-a<0$，即 $a>1$，此时 $g'(0)=1-a<0$，因为 $g'(x)=1+2\sin x-a$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，

所以存在区间 $(0,t)\subseteq(0,\frac{\pi}{2})$，使 $x\in(0,t)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,t)$ 上单调递增，则当 $x\in(0,t)$ 时，$g(x)<g(0)=0$，即 $f(x)<ax$，所以实数 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$．

18.【解析】（1）因为 $f(x)=\sin x-(x+1)\ln(x+1)$，则 $f'(x)=\cos x-1-\ln(x+1)$，当 $x\ge0$ 时，$\cos x-1\le0$，$-\ln(x+1)\le0$，得 $f'(x)\le0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数．

（2）因为 $g(x)=\sin x+\frac{x^2}{2}-x+1$，则 $g'(x)=\cos x+x-1$，令 $m(x)=g'(x)=\cos x+x-1$，则 $m'(x)=1-\cos x\ge0$，即 $m(x)$ 为增函数，又 $m(0)=0$，即 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，$x>0$ 时，$g'(x)>0$，则函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 为减函数，在 $(0,+\infty)$ 为增函数，即 $g(x)_{极小值}=g(0)=1$，无极大值，故 $g(x)$ 的极小值为 1，无极大值．

（3）令 $F(x)=\sin x-a(2-x)\ln(x+1)$，即 $F(x)>0$ 对 $x\in(0,\pi]$ 成立，

①当 $a\le0$ 时，$F(\pi)=-a(2-\pi)\ln(\pi+1)\le0$ 与 $F(x)>0$ 矛盾，不成立

②当 $0<a\le\frac{1}{2}$ 时，1° 当 $x\in(0,2)$ 时，令 $h(x)=x-2a\ln(x+1)$，则 $h'(x)=1-\frac{2a}{x+1}>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 为增函数，又 $h(0)=0$，所以 $h(x)>0$，即 $\frac{x}{2}>a\ln(x+1)$，由（2）得：$\sin x>x-\frac{x^2}{2}=\frac{x(2-x)}{2}>a(2-x)\ln(x+1)$，当 $x\in[2,\pi]$ 时，$\sin x\ge0$，而 $a(2-x)\ln(x+1)\le0$，等号不同时成立，所以 $\sin x>a(2-x)\ln(x+1)$，

③ $a>\frac{1}{2}$ 时，若 $x\in(0,\frac{2a-1}{a+1})$，则 $a(2-x)>x+1$，即 $a(2-x)\ln(x+1)>(x+1)\ln(x+1)$，

又（1）知 $\sin-(x+1)\ln(x+1)<0$，即 $(x+1)\ln(x+1)>\sin x$，所以 $a(2-x)\ln(x+1)>\sin x$，

所以 $F(x)>0$ 不成立，综上可得：a 的取值范围为 $0<a\le\frac{1}{2}$，故答案为 $(0,\frac{1}{2}]$．

19.【解析】（1）当 $a=0$，$b=1$ 时，$f(x)=e^x+e^{-x}$，$f'(x)=e^x-e^{-x}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

（2）当 $b=-1$ 时，$f(x)=e^x-e^{-x}-2a\sin x$，由于 $f(x)>0$ 对一切 $x\in(0,\pi)$ 恒成立，又当 $x\in(0,\pi)$ 时 $\sin x>0$，故 $f(x)>0$ 对任意 $x\in(0,\pi)$ 恒成立等价于 $2a<\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ 恒成立，记 $g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$，其中 $0<x<\pi$，则

$g'(x)=\frac{e^x(\sin x-\cos x)+e^{-x}(\sin x+\cos x)}{sin^2x}$，令 $h(x)=e^x(\sin x-\cos x)+e^{-x}(\sin x+\cos x)$，则

$h'(x)=2(e^x-e^{-x})\sin x>0$，故 $h(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增，$h(x)>h(0)=0$，故 $g'(x)>0$ 恒成立，从而 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增，$g(x)>g(0)$，由洛必达法则可知，$g(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$，故 $2a\le1$，即 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$．

法二：只给个分析思路，$e^x\ge1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$，$e^{-x}\le1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$，$x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x$，故 $2a\le1$，即 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$．

20.【解析】(I) 由函数 $f(x)=e^x-ax$，知：$f'(x)=e^x-a$．

（1）当 $a\le0$ 时，$f'(x)\ge0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在定义域 R 上单调递增．

（2）当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln a$，

则 x，$f'(x)$，$f(x)$ 变化情况如下表：

x	$(-\infty，\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a，+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

所以 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty，\ln a)$，单调增区间为 $(\ln a，+\infty)$．

(II)（1）当 $x=0$ 时，原不等式化为 $0\le 0$ 恒成立，可知 $k\in R$．

（2）当 $x>0$ 时，则 $k\ge\dfrac{g(x)}{x}$，令 $h(x)=\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{\sin x}{x(2+\cos x)}$，

则 $h'(x)=\dfrac{\cos x\cdot x(2+\cos x)-\sin x(2+\cos x+x(-\sin x))}{x^2(2+\cos x)^2}=\dfrac{2x\cos x-2\sin x-\sin x\cos x+x}{x^2(2+\cos x)^2}$，

令 $\varphi(x)=2x\cos x-2\sin x-\sin x\cos x+x$，则 $\varphi(x)=2\sin x(\sin x-x)$，当 $x\in(0，\pi)$ 时，$0<\sin x<x$，则 $\varphi'(x)<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0，\pi)$ 上单调递减，所以 $\varphi(x)<\varphi(0)=0$，即 $h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0，\pi)$ 上单调递减，

由洛必达 $\lim\limits_{x\to0}h(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x(2+\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{2+\cos x-x\sin x}=\dfrac{1}{3}$，故 $h(x)\le\dfrac{1}{3}$，所以 $k\ge\dfrac{1}{3}$，

当 $x\in[\pi，+\infty)$ 时，$h(x)=\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{\sin x}{x(2+\cos x)}\le\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{\pi}<\dfrac{1}{3}$，所以 $k\ge\dfrac{1}{3}$，综上所述 $k\ge\dfrac{1}{3}$．

证明：(3)（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x$，则 $f'(x)=e^x-1$，由 (II) 得 $x\ge0$ 时，$\dfrac{\sin x}{2+\cos x}\le\dfrac{1}{3}x$，故 $\dfrac{3\sin x}{2+\cos x}\le x$，

则只需证明：$f'(x)=e^x-1>x$ 成立，令 $F(x)=e^x-x-1$，当 $x>0$ 时，$F'(x)=e^x-1>0$，所以 $F(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 上单调递增，故 $F(x)\ge F(0)=0$，由 $e^x-1\ge x$，所以 $\dfrac{3\sin x}{2+\cos x}\le x\le e^x-1$，$(2+\cos x)f'(x)\ge3\sin x$．

21.【解析】(1) 函数 $f(x)=e^x-x-1$ 的定义域为 R，$f'(x)=e^x-1$，由 $f'(x)>0$ 得 $x>0$，$f'(x)<0$ 得 $x<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty，0)$ 上单调递减，在 $(0，+\infty)$ 上单调递增，函数 $f(x)$ 只有极小值 $f(0)=0$，

所以 $f(x)=e^x-x-1\ge0$，由 $e^x\ge x+1$，又 $x>-1$，得 $\dfrac{1}{e^x}\le\dfrac{1}{x+1}$．

（2）不等式 $g(x)>1$ 等价于 $ax+x\cos x+1>\dfrac{1}{e^x}$，$x\in(0,1)$，由（1）知，当 $x\in(0，1)$，得 $\dfrac{1}{e^x}<\dfrac{1}{x+1}$，

所以 $ax+x\cos x+1-\dfrac{1}{e^x}>ax+x\cos x+1-\dfrac{1}{x+1}=ax+x\cos x+\dfrac{x}{x+1}=x(a+\cos x+\dfrac{1}{x+1})$

令 $h(x)=\cos x+a+\dfrac{1}{x+1}$，则 $h'(x)=-\sin x-\dfrac{1}{(x+1)^2}$，当 $x\in(0，1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0，1)$ 上为减函数，

因此，$h(x)>h(1)=a+\dfrac{1}{2}+\cos1$，因为 $\cos1>\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，所以，当 $a>-1$ 时，$a+\dfrac{1}{2}+\cos1>0$，

所以 $h(x)>0$，所以当 $x\in(0，1)$ 时 $g(x)>1$．

22.【解析】(1)【解析】由题意得 $f(0)=0$，$f'(x)=\cos x-a+\dfrac{1}{2}x^2$，$f'(0)=1-a$，故 $f(x)$ 在点 $(0，f(0))$ 处的切线方程为 $y=(1-a)x$；

（2）设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=x-\sin x$，设 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=1-\cos x\ge0$，所以 $h(x)$ 在 $(-\infty，+\infty)$ 上单调递增．又因为 $h(0)=0$，所以在 $[0，+\infty)$ 上，$h(x)\ge0$，即 $g'(x)\ge0$，所以 $g(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递增；

当 $a\le1$ 时，$g(0)=1-a\ge0$，所以在 $[0，+\infty)$ 上，$g(x)\ge0$，即 $f'(x)\ge0$，所以函数 $f(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 上是单调增函数．又 $f(x)$ 是奇函数，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty，+\infty)$ 上单调递增，无极值点；

当 $a>1$ 时，$g(0)=1-a<0$，$g(a+1)=\cos(a+1)-a+\dfrac{1}{2}(a+1)^2=\cos(a+1)+\dfrac{1}{2}(a^2+1)>\cos(a+1)+1\ge0$

又因为函数 $g(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $f'(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 上有且只有一个零点 $x_1\in(0，a+1)$

x	$(0\ x_1)$	x_1	$(x_1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

可知x_1是$f(x)$的唯一极小值点，且$x_1\in(0,a+1)$，又$f(x)$是奇函数，所以函数$f(x)$必存在唯一极大值点，记为x_2，且$x_2=-x_1$，所以$(x_1-2a)-(x_2+2)=2x_1-2(a+1)<0$，所以$x_1-2a<x_2+2$成立.

23.【解析】(1) $f'(x)=k\cos x+2$，①当$-2\le k\le 2$时，由$-|\cos x|\le 1$，故$|k\cos x|\le 2$，则$f'(x)=k\cos x+2\ge 0$，故$f(x)$单调递增，在$(0,2\pi)$上无极值点；②当$k>2$时，$f'(x)=k\cos x+2$在$(0,\pi)$上单调递减，又$f'(0)=k+2>0$；$f'(\pi)=-k+2<0$，存在$x_1\in(0,\pi)$，使得$f'(x_1)=0$，则x_1为$f(x)$的极大值点，$f'(x)=k\cos x+2$在$(\pi,2\pi)$上单调递增，又$f'(\pi)=-k+2<0$，$f'(2\pi)=k+2>0$，存在$x_2\in(\pi,2\pi)$使得$f'(x_2)=0$，则x_2为$f(x)$的极小值点，$f(x)$在$(0,2\pi)$上存在两个极值点；

③当$k<-2$时，$f'(x)=k\cos x+2$在$(0,\pi)$上单调递增，又$f'(0)=k+2<0$，$f'(\pi)=-k+2>0$，存在$x_3\in(0,\pi)$使得$f'(x_3)=0$，则x_3为$f(x)$的极小值点，$f'(x)=k\cos x+2$在$(\pi,2\pi)$上单调递减，又$f'(\pi)=-k+2>0$，$f'(2\pi)=k+2<0$，存在$x_4\in(\pi,2\pi)$使得$f'(x_4)=0$，则x_4为$f(x)$的极大值点，所以$f(x)$在$(0,2\pi)$上存在两个极值点，综上所述：当$-2\le k\le 2$时，$f(x)$在$(\pi,2\pi)$上无极值点；当$k<-2$或$k>2$时，$f(x)$在$(0,2\pi)$上有两个极值点.

(2) 设$g(x)=e^x-k\sin x-2x-1(x>0)$，①先证明$k=-1$时成立，证明过程如下：$g(x)=e^x+\sin x-2x-1$，求导$g'(x)=e^x+\cos x-2$，$g''(x)=e^x-\sin x$，由$x>0$，得$e^x>1$，$\sin x\le 1$，故$g''(x)=e^x-\sin x>0$，所以$g'(x)=e^x+\cos x-2$在$(0,+\infty)$上单调递增，故$g'(x)\ge g'(0)=1+1-2=0$，故$g(x)=e^x+\sin x-2x-1$在$(0,+\infty)$上单调递增，则$g(x)\ge g(0)=1-1=0$，即对任意的$x>0$，$e^x>f(x)$恒成立，

②下证对$k\ge -1$，总存在$x_0>0$，$e^x\le f(x)$，求导得$g(x)=e^x-k\sin x-2x-1$，$g'(x)=e^x-k\cos x-2$，$g''(x)=e^x+k\sin x$，当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$0<\sin x<1$，$e^x>0$；

(i) 当$k\ge 0$时，$g''(x)=e^x+k\sin x>0$，

(ii) 当$-1<k<0$时，$0>k\sin x>-1$，$g''(x)=e^x+k\sin x>1-1=0$，由$(i)(ii)$可知，当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$g''(x)>0$，

所以$g'(x)=e^x-k\cos x-2$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增，又$g'(0)=-k-1<0$，$g'(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}-2>0$，所以$\exists x_1\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得$g'(x_1)=0$；故$x\in(0,x_1)$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)=e^x-k\sin x-2x-1$在$(0,x_1)$上单调递减，$x\in(0,x_1)$时，$g(x)<g(0)=0$，即存在$x_0\in(0,x_1)$，$e^x\le f(x)$，综上所述，$k$的最大值为$-1$.

24.【解析】(1) 求导得$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a-1}{x^2}=\frac{x-(a-1)}{x^2}$，$(x\in(0,+\infty))$，当$a-1\le 0$，即$a\le 1$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增当$a-1>0$，即$a>1$时，由$f'(x)<0$解得$0<x<a-1$，由$f'(x)>0$解得$x>a-1$，函数$f(x)$在$(0,a-1)$上单调递减，在$(a-1,+\infty)$上单调递增.

综上所述，当$a\le 1$时，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；当$a>1$时函数$f(x)$在$(0,a-1)$上单调递减，在$(a-1,+\infty)$上单调递增.

(2) 令$F(x)=f(x)-g(x)=\ln x+\frac{a-1}{x}-\frac{a\sin(x+1)-2}{x}=\frac{x\ln x-a\sin x+1}{x}$

当$0\le a\le 1$时，欲证，即证$f(x)>g(x)$．即证$F(x)>0$，即$x\ln x-a\sin x+1>0$，即证$x\ln x>a\sin x-1$

先证：$x\ln x\ge ax-1$．设$g(x)=x\ln x-ax+1$，则$g'(x)=1+\ln x-a=\ln x+1-a$，

$g(x)$在$(0,e^{a-1})$上单调递减，在$(e^{a-1},+\infty)$上单调递增，故$g(x)\ge g(e^{a-1})=(a-1)e^{a-1}-ae^{a-1}+1=1-e^{a-1}$

由$0\le a\le 1$，得$1-e^{a-1}\ge 0$，则$g(x)\ge 0$，即$x\ln x\ge ax-1$，当且仅当$x=1$，$a=1$时取等号.

再证：$ax-1\ge a\sin x-1$．设$h(x)=x-\sin x$，则$h'(x)=1-\cos x\ge 0$．$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，则$h(x)>h(0)=0$，即$x>\sin x$．由$0\le a\le 1$，所以$ax-1\ge a\sin x-1$，当且仅当$a=0$时取等号.

又$x\ln x\ge ax-1$与$ax-1\ge a\sin x-1$．两个不等式的等号不能同时取到，$x\ln x\ge a\sin x-1$成立，即当$0\le a\le 1$

时，$f(x)>g(x)$ 成立．法二：思路 $x\ln x\ge x-1\ge ax-1\ge a\sin x-1$．

25.【解析】(1)：因为 $f(x)=\frac{2}{\pi}-\sin x$ 在 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(0)=\frac{2}{\pi}$，故 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{2}{\pi}$；(2) 证明：$m\ge 0$，所以 $g(x)=\frac{x^2}{\pi}+\cos x+\frac{m}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2\ge\frac{x^2}{\pi}+\cos x$，构造函数 $h(x)=\frac{x^2}{\pi}+\cos x-\frac{\pi}{4}$，$h'(x)=\frac{2x}{\pi}-\sin x$，$h''(x)=\frac{2}{\pi}-\cos x$，$h'''(x)=\sin x$，因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $h'''(x)\ge 0$，所以 $h''(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 单调递增，而 $h''(0)=\frac{2-\pi}{\pi}<0$，$h''(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}>0$，所以 $h'(x)$ 先减后增，$h'(0)=0$ 和 $h'(\frac{\pi}{2})=1-1=0$ 相等都是最大值，即 $h'(x)\le 0$ 恒成立，所以函数 $h(x)=\frac{x^2}{\pi}+\cos x-\frac{\pi}{4}$ 在 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，所以 $h(x)_{\min}=h(\frac{\pi}{2})=0$，所以 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，$m\ge 0$ 时，$g(x)\ge\frac{\pi}{4}$．

26.【解析】(1) 求导得 $f'(x)=m+2\sin x\cos x=m+\sin 2x$，函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ 上为减函数，即 $f'(x)\le 0$，故 $m+\sin 2x\le 0$，则 $m\le-\sin 2x$ 在 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ 上恒成立，当 $x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ 时，$2x\in[-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$，则当 $2x=\frac{\pi}{2}$ 即 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$-\sin 2x$ 取最小值 -1，所以 $m\le-1$，m 的最大值为 -1．

(2) $f(x)$ 的定义域为 R，$g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$．由 $f'(x)=m+\sin 2x$，得 $f'(0)=m+\sin 0=m$．
所以函数 $f(x)$ 的图象在原点处的切线方程为 $y=mx$，由 $g(x)=x\ln x+1$，得 $g'(x)=\ln x+1$，
设函数 $g(x)=x\ln x+1$ 的图象在 $(x_0,x_0\ln x_0+1)$ 处的切线为 l，则 $l: y-(x_0\ln x_0+1)=(\ln x_0+1)(x-x_0)$①．且 l 过原点，故 $m=\ln x_0+1$，将 $x=0$，$y=0$ 代入①，解得 $x_0=1$．得 $m=\ln 1+1=1$．

27.【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-a,+\infty)$，且 $f'(x)=\ln(x+a)+\frac{x}{x+a}$，设 $m(x)=f'(x)=\ln(x+a)+\frac{x}{x+a}$，则 $m'(x)=\frac{1}{x+a}+\frac{a}{(x+a)^2}=\frac{x+2a}{(x+a)^2}$，由 $a<0$．得 $-2a>-a$，令 $m'(x)=0\Rightarrow x=-2a$，则当 $x\in(-a,-2a)$ 时 $m'(x)<0$；当 $x\in(-2a,+\infty)$ 时，$m'(x)>0$．$m(x)$ 在 $(-a,-2a)$ 上单调递减，在 $(-2a,+\infty)$ 上单调递增，
由已知函数 $f(x)$ 在定义域上是增函数，得 $m(x)_{\min}=m(-2a)=ln(-a)+2\ge 0$ 解得 $a\le-e^{-2}$，
所以 a 的取值范围是 $a\in(-\infty,-e^{-2}]$．

(2) 由 $a<0$，$x>-a$，得 $x>0$，故 $f(x)=x\ln(x+a)+1<x\ln x+1$，要证明 $f(x)<e^x+\cos x$，只需证明 $x\ln x<e^x+\cos x-1$，
法一：(i) 当 $0<x\le 1$ 时，得 $e^x+\cos x-1>0$，$x\ln x\le 0$．所以 $x\ln x<e^x+\cos x-1$ 成立，
(ii) 当 $x>1$ 时，设 $g(x)=e^x+\cos x-x\ln x-1$，则 $g'(x)=e^x-\ln x-\sin x-1$，设 $h(x)=g'(x)$，
则 $h'(x)=e^x-\frac{1}{x}-\cos x$，因为 $x>1$，故 $h'(x)>e-1-1>0$，即 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，
所以 $h(x)>h(1)=e-\sin 1-1>0$，即 $g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，
$g(x)>g(1)=e+\cos 1-1>0$ 即 $x\ln x<e^x+\cos x-1$，综上可知，$a<0$ 时，$f(x)<e^x+\cos x$．
法二：(分而治之) 先构造 $\varphi(x)=\cos x-1-\frac{x^2}{2}\ge 0$ (步骤省略)，即证明 $x\ln x<e^x+\cos x-1\Leftrightarrow x\ln x<e^x-\frac{x^2}{2}$，
即证 $h(x)=\frac{\ln x}{x}<g(x)=\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{2}$，$h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}<g(x)_{\min}=g(2)=\frac{e^2-2}{4}$，故命题得证．

28.【解析】(1) 由函数 $f(x)=\frac{a-\sin x}{x}$，$0<x<\pi$，得 $f'(x)=\frac{-x\cos x-a+\sin x}{x^2}$，
当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(x_0)$，故 $f'(x_0)=0$，得 $a=\sin x_0-x_0\cos x_0$，故 $f(x_0)=\frac{-x_0\cos x_0}{x_0}=-\cos x_0$，

因为 $0<x<\pi$，$\cos x_0\in(-1,1)$，$f(x_0)\in(-1,1)$，即 $f(x_0)$ 的取值范围为：$(-1,1)$．

（2）挡 $a=\pi$ 时，$f(x)=\dfrac{\pi-\sin x}{x}(0<x<\pi)$，要证 $f(x)+m\ln x=\dfrac{\pi-\sin x}{x}+m\ln x>0$ 成立，

即证 $m\ln x>\sin x-\pi$ 成立，令 $g(x)=m\ln x$，$h(x)=\sin x-\pi$，则 $g'(x)=m(\ln x+1)$，

$h(x)=\sin x-\pi\in(-\pi,1-\pi]$，令 $g'(x)=0$，则 $x=\dfrac{1}{e}$，当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$g'(x)<0$，此时 $g(x)$ 递减；当 $\dfrac{1}{e}<x<\pi$ 时，$g'(x)>0$，此时 $g(x)$ 递增，故 $g(x)_{\min}=g(\dfrac{1}{e})=-\dfrac{m}{e}$，显然 $\forall m\in(0,\pi)$，$-\dfrac{m}{e}>1-\pi$，所以 $0<m<\pi$，$g(x)>h(x)$，即 $0<m<\pi$ 时，$f(x)+m\ln x>0$

29.（2）如果对于任意的 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，$f(x)\geq kx$ 总成立，求实数 k 的取值范围．

【解析】（1）由于 $f(x)=e^x\sin x$，所以 $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$，

当 $x+\dfrac{\pi}{4}\in(2k\pi,2k\pi+\pi)$，即 $x\in(2k\pi-\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{3\pi}{4})$ 时，$f'(x)>0$；当 $x+\dfrac{\pi}{4}\in(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$，即 $x\in(2k\pi+\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\dfrac{7\pi}{4})$ 时，$f'(x)<0$．所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(2k\pi-\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{3\pi}{4})(k\in Z)$，单调递减区间为 $(2k\pi+\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\dfrac{7\pi}{4})(k\in Z)$；

（2）令 $g(x)=f(x)-kx=e^x\sin x-kx$，要使 $f(x)\geq kx$ 总成立，只需 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 时 $g(x)_{\min}\geq 0$，

对 $g(x)$ 求导，可得 $g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)-k$，令 $h(x)=e^x(\sin x+\cos x)$，则 $h'(x)=2e^x\cos x>0$，$(x\in(0,\dfrac{\pi}{2}))$

所以 $h(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上为增函数，所以 $h(x)\in[1,e^{\frac{\pi}{2}}]$；对 k 分类讨论：

①当 $k\leq 1$ 时，$g'(x\geq 0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上为增函数，所以 $g(x)_{\min}=g(0)=0$，即 $g(x)\geq 0$ 恒成立；

②当 $1<k<e^{\frac{\pi}{2}}$ 时，$g'(x)=0$ 在上有实根 x_0，因为 $h(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上为增函数，所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x_0)<g(0)=0$，不符合题意；

③当 $k\geq e^{\frac{\pi}{2}}$ 时，$g'(x)\leq 0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上为减函数，则 $g(x)<g(0)=0$，不符合题意．

综上，可得实数 k 的取值范围是 $(-\infty,1]$．

30.【解析】(1)函数 $f(x)=a\ln x-x^2$，定义域为 $(0,+\infty)$，所以 $f'(x)=\dfrac{a}{x}-2x=\dfrac{a-2x^2}{x}$；当 $a\leq 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，则 $\dfrac{a-2x^2}{x}>0$，解得 $0<x<\dfrac{\sqrt{2a}}{2}$，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\sqrt{2a}}{2})$ 单调递增；令 $f'(x)<0$，则 $\dfrac{a-2x^2}{x}<0$，解得 $x>\dfrac{\sqrt{2a}}{2}$；$f(x)$ 在 $(\dfrac{\sqrt{2a}}{2},+\infty)$ 单调递减；综上，当 $a\leq 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\sqrt{2a}}{2})$ 单调递增，在 $(\dfrac{\sqrt{2a}}{2},+\infty)$ 单调递减；

（2）要证当 $a>0$ 时，$f(x)\leq(a-\sin x)x^2-ax$，只须证：$a(\ln x+x-x^2)+(\sin x-1)x^2\leq 0$，

而 $(\sin x-1)x^2\leq 0$，因此，只要证：$\ln x+x-x^2\leq 0$，设 $g(x)=\ln x+x-x^2$，

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+1-2x=\dfrac{-(x-1)(2x+1)}{x}(x>0)$，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；所以 $g(x)\leq g(1)=0$，即 $\ln x+x-x^2\leq 0$；

所以当 $a>0$ 时，$f(x)\leq(a-\sin x)x^2-ax$．

31.【解析】(1) 求导得 $f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x-\sin x-x\cos x$，因为 $x\in[-\frac{\pi}{2}, 0]$，所以 $\cos x\ge 0$，$\sin x\le 0$，$e^x>0$；

故 $e^x\cos x-e^x\sin x-\sin x-x\cos x>0$；即 $f'(x)>0$；则 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上单调递增；

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(0)=1$；$g'(x)=\cos x-\sqrt{2}e^x$，设 $h(x)=g'(x)$，则：$h'(x)=-\sin x-\sqrt{2}e^x$；

因为 $x\in[0, \frac{\pi}{2}]$；所以 $-\sin x\le 0$，$-\sqrt{2}e^x<0$，则 $h'(x)<0$；$h(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减；

故 $h(x)$ 的最大值为 $h(0)=1-\sqrt{2}<0$，故 $h(x)<0$，即 $g'(x)<0$；属于 $g(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减；

故 $g(x)$ 的最大值为 $g(0)=-\sqrt{2}$，根据题意知，$f(x)_{\max}\le m+g(x)_{\max}$，故 $1\le m-\sqrt{2}$，即 $m\ge\sqrt{2}+1$；

实数 m 的取值范围为 $[\sqrt{2}+1, +\infty)$；

(2) 函数 $f(x)-g(x)=e^x(\cos x+\sqrt{2})-\sin x(x+1)$；设 $F(x)=e^x-(x+1)$，则 $F'(x)=e^x-1$；

当 $x\in(-1, 0)$ 时，$F'(x)<0$，$x\in(0, +\infty)$ 时，$F'(x)>0$；$F(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上的最小值为 $F(0)=0$；

所以 $F(x)\ge 0$，由 $e^x\ge x+1$ 在 $(-1, +\infty)$ 上恒成立，$\cos x+\sqrt{2}>0$；

所以 $e^x(\cos x+\sqrt{2})\ge(x+1)(\cos x+\sqrt{2})$ ①，$x=0$ 时取"="，

故 $e^x(\cos x+\sqrt{2})-\sin x(x+1)\ge(x+1)(\cos x+\sqrt{2})-\sin x(x+1)$，则

$(x+1)(\cos x+\sqrt{2})-\sin x(x+1)=(x+1)(\cos x-\sin x+\sqrt{2})=(x+1)[\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}]$，则

$\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}\ge 0$，$x>-1$，$x+1>0$，所以 $(x+1)[\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}]\ge 0$，该不等式和不等式①等号不能同时取到，所以 $e^x(\cos x+\sqrt{2})-\sin x(x+1)>0$，即 $f(x)-g(x)>0$．

32.【解析】(1) 曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 都过点 $P(0, 1)$，故 $f(0)=a=1$，$g(0)=d=1$，

又 $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)+b$，$f'(0)=1+b=1$，故 $b=1$，$g'(x)=x-\cos x+c$，$g'(0)=-1+c=1$，故 $c=2$，

所以 $f(x)=e^x\cos x$，$g(x)=\frac{1}{2}x^2-\sin x+2x+1$，所以 $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)=\sqrt{2}e^x\cos(x+\frac{\pi}{4})$，

当 $f'(x)=\sqrt{2}e^x\cos(x+\frac{\pi}{4})>0$，解得 $-\frac{3\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in Z$，

当 $f'(x)=\sqrt{2}e^x\cos(x+\frac{\pi}{4})<0$，解得 $\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{4}+2k\pi, k\in Z$，

函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi), k\in Z$，减区间为 $(\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5\pi}{4}+2k\pi), k\in Z$；

(2) 先证 $e^x\cos x>(x-\cos x+2)\sin x-\sqrt{2}e^x$，即证 $e^x(\cos x+\sqrt{2})>(x-\cos x+2)\sin x$，

由 $x>0$，$-1\le\cos x\le 1$，得 $\cos x+\sqrt{2}>0$，$x-\cos x+2>0$，即证 $\frac{e^x}{x-\cos x+2}>\frac{\sin x}{\cos x+\sqrt{2}}$，

令 $F(x)=\frac{e^x}{x-\cos x+2}$，$G(x)=\frac{\sin x}{\cos x+\sqrt{2}}$，则 $F'(x)=\frac{e^x(x-\sin x-\cos x+1)}{(x-\cos x+2)^2}$，

由 $x>0$，得 $x-\sin x>0$，$1-\cos x\ge 0$，故 $F'(x)>0$，则 $F(x)>F(0)=1$，

令 $v=\sin x$，$\mu=\cos x$，所以 $G(x)=\frac{v}{\mu+\sqrt{2}}$ 表示两点 $A(\mu, v)$ 与 $B(-\sqrt{2}, 0)$ 连线的斜率 k，其中 $v^2+\mu^2=1$，

由图可知，$v=k(\mu+\sqrt{2})$ 与圆 $v^2+\mu^2=1$ 相切时，k 有最大值 1，即 $G(x)_{\max}=1$，故 $F(x)>1\ge G(x)$，

所以 $f(x)>g'(x)\sin x-\sqrt{2}e^x$，故 $\lambda\le-\sqrt{2}$，所以 $e^x\cos x>(x-\cos x+2)\sin x-\sqrt{2}e^x\ge(x-\cos x+2)\sin x+\lambda e^x$，即得证．

33.【解析】因为 $f'(x)=-e^{m-x}$，所以 $f'(1)=-e^{m-1}=-1$，所以 $m=1$，又 $f(1)=e^{1-1}+n=1$，故 $n=0$，故 $f(x)=-e^{1-x}$．

（1）由题意得 $F'(x)=f'(x)(-a+\cos x)+f(x)(-\sin x)=-e^{1-x}(\sin x+\cos x-a)$，若函数 $F(x)$ 存在单调减区间，则 $F'(x)=-e^{1-x}(\sin x+\cos x-a)\le 0$ 有解，即 $\sin x+\cos x-a\ge 0$ 存在取值区间，即 $a\le\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 存在取值区间，所以 $a<\sqrt{2}$．

（2）因为 $G(x)=f(x+1)[x^2+(1-t)x+1]=e^{-x}[x^2+(1-t)x+1]=\frac{x^2+(1-t)x+1}{e^x}$，所以 $G'(x)=\frac{-(x-t)(x-1)}{e^x}$，

①当 $t\ge 1$ 时，$G'(x)\le 0$，$G(x)$ 在 $[0，1]$ 上单调递减，由 $2N<M$，所以 $2G(1)<G(0)$，即 $2\cdot\frac{3-t}{e}<1$，$t>3-\frac{e}{2}$；

②当 $t\le 0$ 时，$G'(x)\ge 0$，$G(x)$ 在 $[0，1]$ 上单调递增，所以 $2G(0)<G(1)$，即 $2<\frac{3-t}{e}$，得 $t<3-2e$，

③当 $0<t<1$ 时，在 $x\in[0，t]$，$G'(x)<0$，$G(x)$ 在 $[0，t]$ 上单调递减，在 $x\in(t，1]$，$G'(x)>0$，$G(x)$ 在 $[t，1]$ 上单调递增，所以 $2G(t)<max\{G(0)，G(1)\}$，，即 $2\cdot\frac{t+1}{e^t}<max\{1，\frac{3-t}{e}\}$①

令 $p(t)=\frac{t+1}{e^t}$，$t\in(0，1)$，则 $p'(t)=\frac{-t}{e^t}<0$，所以 $p(t)=\frac{t+1}{e^t}$ 在 $t\in(0，1)$ 上单调递减，

故 $2\times\frac{t+1}{e^t}>\frac{4}{e}>1$，而 $\frac{3-t}{e}<\frac{3}{e}<\frac{4}{e}$，所以不等式①无解，综上所述，$t\in(-\infty，3-2e)\cup(3-\frac{e}{2}，+\infty)$．

34.【解析】（1）由已知得 $f'(x)=ax(2\cos x-x\sin x)$，当 $x\in(0，\frac{\pi}{4})$ 时，$\cos x>\sin x>0$，所以 $2\cos x>x\sin x$，即 $2\cos x-x\sin x>0$，若 $a<0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0，\frac{\pi}{4})$ 上递减，在 $[0，\frac{\pi}{4}]$ 上的最大值为 $f(0)=-\frac{1}{2}$，不合题意，若 $a>0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0，\frac{\pi}{4})$ 上递增，在 $[0，\frac{\pi}{4}]$ 上的最大值为 $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}a\pi^2-16}{32}$，

令 $\frac{\sqrt{2}a\pi^2-16}{32}=\frac{\sqrt{2}\pi^2-8}{16}$，得 $a=2$；

（2）由（1）可知 $f(x)=2x^2\cos x-\frac{1}{2}$，求导得 $f'(x)=2x(2\cos x-x\sin x)$，设 $g(x)=2\cos x-x\sin x$，则 $g'(x)=-2\sin x-\sin x-x\cos x=-3\sin x-x\cos x$，当 $x\in(0，\frac{\pi}{2})$ 时，$g'(x)<0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(0，\frac{\pi}{2})$ 上递减，又因为 $g(0)=2>0$，$g(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}<0$ 所以在 $(0，\frac{\pi}{2})$ 存在唯一的 x_0 满足 $g(x_0)=0$，且当 $x\in(0，x_0)$ 时，$g(x)>0$，当 $x\in(x_0，\frac{\pi}{2})$ 时，$g(x)<0$，在 $(0，\frac{\pi}{2})$ 上，$f'(x)$ 与 $g(x)$ 符号相同，所以 $f(x)$ 在 $(0，x_0)$ 上递增，在 $(x_0，\frac{\pi}{2})$ 上递减，又因为 $f(0)=-\frac{1}{2}<0$，$f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}\pi^2-8}{16}>0$，$f(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{2}<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0，\frac{\pi}{4})$ 和 $(\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2})$ 上各有一个零点，即在 $(0，\frac{\pi}{2})$ 上有 2 个零点．

35.【解析】（1）直线 $6x+\pi y-2x=0$ 的斜率为 $-\frac{6}{\pi}$，过点 $(\frac{\pi}{2}，-1)$，求导 $f'(x)=\frac{-a(x\sin x+\cos x)}{x^2}$，

则 $f'(\frac{\pi}{2})=\frac{-2a}{\pi}=-\frac{6}{\pi}$，即 $a=3$，$f(\frac{\pi}{2})=b=-1$，所以 $f(x)=\frac{3\cos x}{x}-1$．

（2）方程 $f(x)=\frac{3}{2\pi}-1$ 在 $(0，2\pi]$ 上有 3 个解．

证明：令 $g(x)=f(x)-\frac{3}{2\pi}+1=\frac{3\cos x}{x}-\frac{3}{2x}$，则 $g'(x)=\frac{-3(x\sin x+\cos x)}{x^2}$，又 $g(\frac{\pi}{6})=\frac{9\sqrt{3}}{\pi}-\frac{3}{2\pi}>0$，

$g(\frac{\pi}{2})=-\frac{3}{2\pi}<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0，\frac{\pi}{2}]$ 上至少有一个零点，又 $g(x)$ 在 $(0，\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，故在 $(0，\frac{\pi}{2}]$ 上只有

一个零点，当 $x\in(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2})$ 时，$\cos x<0$，故 $g(x)<0$，所以函数 $g(x)$ 在 $x\in(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2})$ 上无零点，

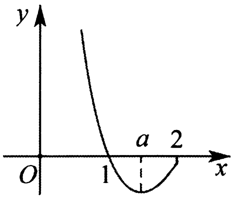
当 $x\in[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi]$ 时，令 $h(x)=x\sin x+\cos x$，$h'(x)=x\cos x>0$，所以 $h(x)$ 在 $x\in[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi]$ 上单调递增，又 $h(2\pi)>0$，$h(\frac{3\pi}{2})<0$，所以 $\exists_0\in(\frac{3\pi}{2},2\pi]$，使得 $g(x)$ 在 $[\frac{3\pi}{2},\ x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,\ 2\pi]$ 上单调递减.

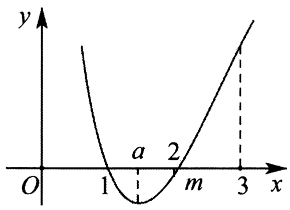
又 $g(2\pi)=0$，$g(\frac{3\pi}{2})<0$，所以函数 $g(x)$ 在 $[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi]$ 上有 2 个零点.

综上，方程 $f(x)=\frac{3}{2\pi}-1$ 在 $(0,\ 2\pi]$ 上有 3 个解.

36.【解析】(1) 令 $g(x)=f'(x)=\frac{1}{x}-\cos(x-1)$，$g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\sin(x-1)$，当 $x\in(0,\ 1)$ 时，$g'(x)<0$ 恒成立，当 $x\in(1,\ 2)$ 时，$g''(x)=\frac{2}{x^3}+\cos(x-1)>0$. 故 $g'(x)$ 在 $(1,\ 2)$ 递增，又 $g'(1)=-1<0$，$g'(2)=-\frac{1}{4}+\sin 1>0$. 故存在 $a\in(1,\ 2)$ 使得，$x\in(1,\ a)$ 时 $g'(x)<0$，$x\in(a,\ 2)$ 时，$g'(x)>0$. 综上，$f'(x)$ 在区间 $(0,\ 2)$ 存在唯一极小值点 $x=a$.

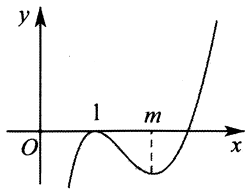
(2) 由 (1) 可得 $x\in(0,\ a)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，$x\in(a,\ 2)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递增. 且 $g(1)=0$，$g(2)=\frac{1}{2}-\cos 1<0$. 故 $g(x)$ 的大致图象如下：





当 $x\in(2,\ 3)$ 时，$\sin(x-1)\in(\sin 1,\ \sin 2)$，$\sin(x-1)>\sin 30^\circ>\frac{1}{4}$，此时 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，而 $g(3)=\frac{1}{3}-\cos 2>0$. 故存在 $m\in(2,\ 3)$，使得 $g(m)=0$，故在 $x\in(0,\ 3)$ 上，$g(x)$ 的图象如上：

综上，$x\in(0,\ 1)$ 时，$g(x)<0$，$x\in(1,\ m)$ 时，$g(x)<0$，$x\in(m,\ 3)$ 时，$g(x)>0$. 故 $f(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 递增，在 $(1,\ m)$ 递减，在 $(m,\ 3)$ 递增，而 $f(1)=0$，$f(3)=\ln 3-\sin 2>0$，又当 $x>3$ 时，$\ln x>1$，$f(x)>0$ 恒成立. 故在 $(0,\ +\infty)$ 上 $f(x)$ 的图象如下：故 $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.



37.【解析】(1) 求导得 $f'(x)=e^x\cdot \text{in}\,x+e^x\cdot\cos x=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin(x+\frac{\pi}{4})$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=k\pi+\frac{3}{4}\pi$，

又 $x\in(0,\ \pi)$ 故 $x=\frac{3}{4}\pi$，令 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\frac{3}{4}\pi$，令 $f'(x)<0$ 得 $\frac{3}{4}\pi<x<\pi$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\ \frac{3}{4}\pi)$ 递增，在 $(\frac{3}{4}\pi,\ \pi)$ 递减，故 $f(x)_{极大值}=f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}$，无极小值.

(2) 证明：当 $x\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$ 时，$\cos x<0$，$-\frac{1}{1+x}<0$，于是 $f'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}<0$，$f(x)$ 单调递减，其中 $f(\frac{\pi}{2})=1-\ln(1+\frac{\pi}{2})>1-\ln(1+\frac{3.2}{2})=1-\ln 2.6>1-\ln e=0$，$f(\pi)=-\ln(1+\pi)<-\ln 3<0$.

由函数零点存在性定理可知，$f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上有且只有一个零点 x_1，当 $x\in[\pi,+\infty)$ 时，

$f(x)=\sin x-\ln(1+x)<1-\ln(1+\pi)<1-\ln 3<0$，因此函数 $f(x)$ 在 $[\pi,+\infty)$ 上无零点.

综上，$f(x)$ 有且仅有 1 个零点.

38.【解析】(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=e^{-x}+\sin x$，$f'(x)=-e^{-x}+\cos x$，当 $x\le 0$ 时，$-e^{-x}\le -1$，则 $f'(x)\le 0\ (x\le 0)$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，$f(x)\ge f(0)=1$；所以 $\forall x\in(-\infty,0]$，$f(x)\ge 1$；

(2) 函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上存在两个极值点；则 $f'(x)=0$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上有两个不等实数根；

即 $f'(x)=-ae^{-x}+\cos x=0$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上有两个不等实数根；即 $a=e^x\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上有两个不等实数根；

设 $g(x)=e^x\cos x$，则 $g'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$；当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；又 $g(0)=1$，$g(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$，$g(\frac{\pi}{2})=0$；

故实数 a 的取值范围为 $1<a<\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

39.【解析】(1) 求导得 $f'(x)=\frac{\cos x-\sin x-1}{e^x}$，由 $f'(x)>0$ 即 $\cos x-\sin x-1>0$ 可得 $-\frac{1}{2}\pi<x<0$ 或 $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$，由 $f'(x)<0$ 即 $\cos x-\sin nx-1<0$ 可得 $-2\pi<x<-\frac{1}{2}\pi$ 或 $0<x<\frac{3\pi}{2}$，故函数的单调递增区间 $(-\frac{1}{2}\pi,0)$，$(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，单调递减区间 $(-2\pi,-\frac{1}{2}\pi)$，$(0,\frac{3\pi}{2})$.

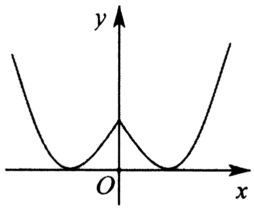
(2) 由 (1) 知，$f(x)$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 上有 2 个极小值 $f(-\frac{1}{2}\pi)=f(\frac{3\pi}{2})=0$，1 个极大值 $f(0)=1$，

另外 $f(-2\pi)=e^{2\pi}$，$f(2\pi)=\frac{1}{e^{2\pi}}$，作出函数的大致图象如图所示，由 $g(x)=ax+\frac{1}{6}$，$x\in[-2\pi,2\pi]$

结合图象可知，当 $a=0$ 时，$g(x)=\frac{1}{6}\in(\frac{1}{e^{2\pi}},1)$，满足题意，当 $a>0$ 时，$g(x)\in[-2\pi a+\frac{1}{6},2\pi a+\frac{1}{6}]$，

由题意可得，$\begin{cases}-2\pi a+\frac{1}{6}\ge\frac{1}{e^{2\pi}}\\2\pi a+\frac{1}{6}<1\end{cases}$，解可得，$0<a<\frac{1}{12\pi}-\frac{1}{2\pi e^{2\pi}}$，当 $a<0$ 时，$g(x)\in[-2\pi a+\frac{1}{6},2\pi a+\frac{1}{6}]$，

由题意可得，$\begin{cases}2\pi a+\frac{1}{6}>\frac{1}{e^{2\pi}}\\-2\pi a+\frac{1}{6}<1\end{cases}$，解可得，$\frac{1}{2\pi e^{2\pi}}-\frac{1}{12\pi}<a<0$，综上可得 a 的范围 $\frac{1}{2\pi e^{2\pi}}-\frac{1}{12\pi}<a<\frac{1}{12\pi}-\frac{1}{2\pi e^{2\pi}}$



40.【解析】(1) 当 $a=1$ 时，$f'(x)=(x-\sin x-\cos x)e^x$，则 $f'(0)=-1$，又 $f(0)=-1$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为：$y+1=-x$ 即 $x+y+1=0$.

(2) 求导得 $f'(x)=(ax-\sin x-\cos x+a-1)e^x$，设 $g(x)=ax-\sin x-\cos x+a-1$，

$g'(x)=a-\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})+a$，因 $x\in(0,\pi)$，故 $\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\in(-1,\sqrt{2}]$，又 $a\ge 1$，故 $g'(x)\ge 0$

对 $x\in(0,\pi)$ 恒成立，即 $g(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 单调递增；又 $g(0)=a-2$，$g(\pi)=a(\pi+1)>0$；故当 $1\le a\le 2$ 时，$g(0)=a-2\le 0$，此时 $f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内恰好有 1 个零点．当 $a>2$ 时，$g(0)=a-2>0$，此时 $f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内没有零点；综上结论得证．

41．【解析】（1）求导 $f'(x)=-2a\cos x+e^{-x}$，令 $f'(0)=0$，得 $-2a+1=0$，故 $a=\dfrac{1}{2}$，故 $f(x)=1-\sin x-e^{-x}$，

则 $f'(x)=-\cos x+e^{-x}=e^{-x}(1-e^{x}\cos x)$，

当 $x<0$ 时，$e^{-x}>1\ge\cos x$，$f'(x)=-\cos x+e^{-x}>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增；

当 $x>0$ 时，令 $g(x)=1-e^{x}\cos x$，则 $g'(x)=e^{x}(\sin x-\cos x)$，在区间 $(0,\dfrac{\pi}{4})$ 上，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 是 $(0,\dfrac{\pi}{4})$ 上的减函数，所以 $g(x)<g(0)=0$，即在区间 $(0,\dfrac{\pi}{4})$ 上 $f'(x)=e^{-x}g(x)<0$，故 $f(x)$ 是 $(0,\dfrac{\pi}{4})$ 上的减函数，

综上所述，$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值 $f(0)=0$；

（2）证明：由（1）$f(x)=1-\sin x-e^{-x}$，$f(2k\pi)=1-e^{-2k\pi}\ge 0$，$f(2k\pi+\dfrac{\pi}{2})=-e^{-(2k\pi+\frac{\pi}{2})}<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}](k\in N)$ 至少有一个零点，

以下讨论函数 $f(x)$ 在区间 $[2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}]$ 上函数值的变化情况：

由（1）$f'(x)=-\cos x+e^{-x}=e^{-x}(1-e^{x}\cos x)$，令 $g(x)=1-e^{x}\cos x$，则 $g'(x)=e^{x}(\sin x-\cos x)$，

令 $g'(x)=0$，在 $(0,+\infty)$ 上，解得 $x=m\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$m\in N$，

①当 $k=0$ 时，在区间 $(0,\dfrac{\pi}{4})$ 上，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减，$g(\dfrac{\pi}{4})<g(0)=0$；在区间 $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$ 上，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，$g(\dfrac{\pi}{2})=1>0$，故存在唯一实数 $x_0\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$，使得 $g(x_0)=0$，即 $f'(x_0)=e^{-x_0}g(x_0)=0$，

故在 $(0,x_0)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，$f(x)<f(0)=0$；在 $(x_0,\dfrac{\pi}{2})$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，而 $f(\dfrac{\pi}{2})=-e^{-\frac{\pi}{2}}<0$，故在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上 $f(x)\le 0$，当且仅当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，故 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上有唯一零点；

②对任意正整数 k，在区间 $(2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{4})$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减，$g(2k\pi+\dfrac{\pi}{4})<g(2k\pi)=1-e^{2k\pi}<0$，在区间 $(2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{2})$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，$g(2k\pi+\dfrac{\pi}{2})=1>0$，故存在唯一实数 $x_k\in(2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{2})$，使得 $g(x_k)=0$，即 $f'(x_k)=e^{-x_k}g(x_k)=0$，在 $(2k\pi,x_k)$ 上，因为 $g(x)<0$，

故 $f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，在 $(x_k,2k\pi+\dfrac{\pi}{2})$ 上，因为 $g(x)>0$，故 $f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，

$f(2k\pi)>1-e^{-2k\pi}>0, f(x_k)<f(2k\pi+\dfrac{\pi}{2})=-e^{-(2k\pi+\frac{\pi}{2})}<0$，所以 $f(2k\pi)f(x_k)<0$，

故 $f(x)$ 在 $(2k\pi,x_k)$ 即 $[2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}]$ 有唯一零点，综上，$f(x)$ 在区间 $[2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}](k\in N)$ 有唯一零点．

专题 16 隐形圆问题

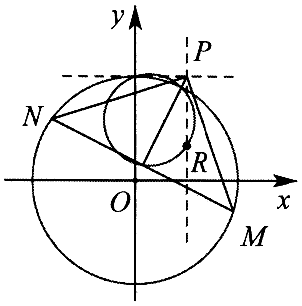
达标训练

1．【解析】设 P 点的坐标为 (x,y)，由 $A(0,0)$、$B(3,1)$，动点 P 满足 $|PA|=\dfrac{1}{2}|PB|$，故 $\overrightarrow{AP}=(x,y)$，

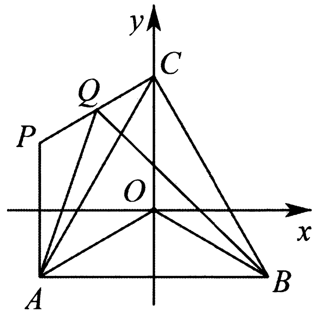
$\overrightarrow{BP}=(x-3,y)$，所以$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(x-3)^2+y^2}$，平方得$(x+1)^2+y^2=4$，所以点$P$的轨迹是一个圆，且半径为2，则$S=\pi\times 2^2=4\pi$．故选$B$．

3．【解析】如图所示：设$R(x,y)$是线段MN的中点，则$OR\perp MN$，由$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，得$\overrightarrow{PM}\perp\overrightarrow{PN}$，于是$|PR|=\frac{1}{2}|MN|=|RN|$，在$RT\Delta ORN$中，$|ON|=2$，$|OR|=\sqrt{x^2+y^2}$，$|RN|=|RP|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$，由勾股定理得：$2^2=x^2+y^2+(x-1)^2+(y-2)^2$，整理得$(x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=\frac{3}{4}$，故$R(x,y)$的轨迹是以$C(\frac{1}{2},1)$为圆心，$r=\frac{\sqrt{3}}{2}$为半径的圆，故$|OR|_{\max}=|OC|+r=\sqrt{\frac{1}{4}+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故$|MN|_{\min}=2|NR|_{\min}=2\sqrt{|ON|^2-|OR|_{\max}{}^2}=2\sqrt{4-(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，故选$B$．



3 题图



5 题图

4．【解析】由$|2\vec{c}+\vec{a}|=|\vec{a}\bullet\vec{b}|$得$|\vec{c}-(-\frac{\vec{a}}{2})|=\frac{1}{2}|\vec{a}\cdot\vec{b}|$，说明$\vec{c}$的终点的轨迹是以$-\frac{\vec{a}}{2}$的终点为圆心，$\frac{1}{2}|\vec{a}\cdot\vec{b}|$为半径的圆，$|\vec{c}-\vec{b}|$的最大值是圆心与$\vec{b}$的终点之间的距离加上半径，即为$|\vec{b}-(-\frac{\vec{a}}{2})|+\frac{1}{2}|\vec{a}\cdot\vec{b}|$，

$|\vec{b}+\frac{\vec{a}}{2}|+\frac{1}{2}|\vec{a}\cdot\vec{b}|=\sqrt{(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a})^2}+\frac{1}{2}|\vec{a}\cdot\vec{b}|=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\vec{a}\cdot\vec{b}}+\frac{1}{2}|\vec{a}\cdot\vec{b}|=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\cos<\vec{a},\vec{b}>}+\frac{1}{2}\cos<\vec{a},\vec{b}>$

$\le\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}+\frac{1}{2}=2$，（当且仅当$\cos\theta=0$时取等）．故选$A$．

5．【解析】由$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=r$，得$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\bullet\overrightarrow{OA}=-2$，

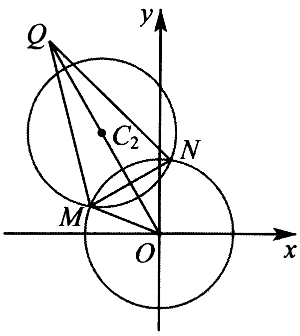
即有$r^2\cos\angle AOB=r^2\cos\angle BOC=r^2\cos\angle COA=-2$，可得$\cos\angle AOB=\cos\angle BOC=\cos\angle COA=-\frac{1}{2}$，

则$r=2$，ΔABC为等边三角形，边长为$2\sqrt{3}$，以O为坐标原点，OC所在直线为y轴建立直角坐标系，可得$C(0,2)$，$A(-\sqrt{3},-1)$，$B(\sqrt{3},-1)$，设$P(x_0,y_0)$，$Q(x,y)$，动点P，Q满足$|\overrightarrow{AP}|=1$，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QC}$，可得$(x_0+\sqrt{3})^2+(y_0+1)^2=1$，且$2x=x_0$，$2y=y_0+2$，可得$(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$，即$Q$在圆心为$(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，半径为$\frac{1}{2}$的圆上，即有$BQ$的最小值为$\sqrt{(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(-1-\frac{1}{2})^2}-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，则$4\overrightarrow{BQ}^2-37$的最小值为$4\times\frac{25}{4}-37=-12$．故选$B$．

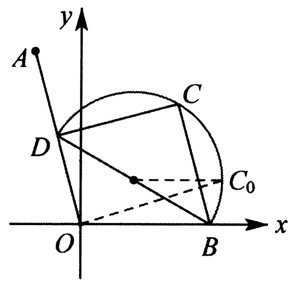
6．【解析】设$P(x,y)$，由$2|PA|=|PB|$，得$2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$，整理得：$x^2+y^2=4$．故$C_1:x^2+y^2=4$；

又圆$C_2:(x+\sqrt{3})^2+(y-3)^2=4$，则$\overrightarrow{MN}\bullet\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MN}\bullet(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OQ})=\overrightarrow{MN}\bullet\overrightarrow{MO}$，联立$C_1$与$C_2$，

得 $MN:\sqrt{3}x-3y+6=0$．所以 O 点到直线 MN 的距离 $d=\dfrac{|6|}{\sqrt{3+9}}=\sqrt{3}$．则 $|MN|=2\sqrt{OM^2-d^2}=2\sqrt{4-3}=2$，故 $\overrightarrow{MN}\bullet\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MN}\bullet(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OQ})=\overrightarrow{MN}\bullet\overrightarrow{MO}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{MN}|^2=\dfrac{1}{2}\times 2^2=2$．故选 C．



6 题图



7 题图

7.【解析】法一：代数硬算，由 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为平面向量，可设 $\vec{a}$，$\vec{c}$ 的夹角为 α，$\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 β，则 $\cos\alpha\in[-1,1]$，，$\cos\beta\in[-1,1]$，由 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$(2\vec{c}-\vec{a})\bullet(\vec{c}-\vec{b})=0$，故 $(2\vec{c}-\vec{a})\bullet(\vec{c}-\vec{b})=2\vec{c}^2-2\vec{c}\bullet\vec{b}-\vec{a}\bullet\vec{c}+\vec{a}\bullet\vec{b}=0$，故 $\vec{c}\bullet\vec{b}=\dfrac{1}{2}(2\vec{c}^2-\vec{a}\bullet\vec{c}+\vec{a}\bullet\vec{b})=|\vec{c}|^2-|\vec{c}|\cos\alpha+2\cos\beta=(|\vec{c}|-\dfrac{\cos\alpha}{2})^2+\dfrac{\cos^2\alpha}{4}+2\cos\beta$，当 $|\vec{c}|=\dfrac{\cos\alpha}{2}$，$\cos\alpha=1$，$\cos\beta=1$ 时 $\vec{c}\bullet\vec{b}$ 的最大值的最大值为 $\dfrac{17}{4}$．故选 C．

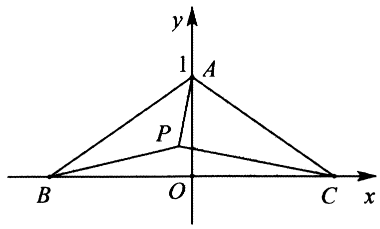
法二：作图如上：令 $B(2,0)$，$A(2\cos\theta,2\sin\theta)$，$OA$ 中点为 $D(\cos\theta,\sin\theta)$，则 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$，$(2\vec{c}-\vec{a})\bullet(\vec{c}-\vec{b})=0\Rightarrow(\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{a})\perp(\vec{c}-\vec{b})\Rightarrow C$ 在以 BD 为直径的圆上，根据投影原理可得 $\vec{c}\bullet\vec{b}$ 取得最大值时此圆一定取得最大横坐标 C_0 处，此时一定有 $x_{C_0}=\dfrac{x_B+x_D}{2}+\dfrac{|BD|}{2}=\dfrac{2+\cos\theta+\sqrt{5-4\cos\theta}}{2}$，换元，将 $\sqrt{5-4\cos\theta}=t\in[1,3]$，$x_{C_0}=-\dfrac{t^2}{8}+\dfrac{t}{2}+\dfrac{13}{8}$，当 $t=2$ 时，$x_{C_0}=-\dfrac{t^2}{8}+\dfrac{t}{2}+\dfrac{13}{8}=\dfrac{17}{8}$，$\vec{c}\bullet\vec{b}=2\times\dfrac{17}{8}=\dfrac{17}{4}$，故选 C．

8.【解析】以 BC 的中点为坐标原点，BC 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系，设 $B(-a,0)$，$C(a,0)$，$(a>0)$，则 $A(0,\sqrt{3-a^2})$，设 $P(x,y)$，由 $PB^2+PC^2=3PA^2=3$，可得

$(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2=3[x^2+(y-\sqrt{3-a^2})^2]=3$，$x^2+y^2=\dfrac{3}{2}-a^2$，$x^2+(y-\sqrt{3-a^2})^2=1$，

即有点 P 既在 $(0,0)$ 为圆心，半径为 $\sqrt{\dfrac{3}{2}-a^2}$ 的圆上，也在 $(0,\sqrt{3-a^2})$ 为圆心，1 为半径的圆上，

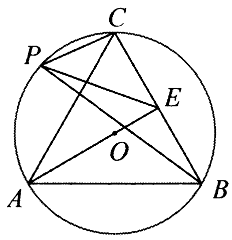
可得 $|1-\sqrt{\dfrac{3}{2}-a^2}|\le\sqrt{3-a^2}\le 1+\sqrt{\dfrac{3}{2}-a^2}$，由两边平方化简可得 $a^2\le\dfrac{23}{16}$，则 ΔABC 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\bullet 2a\bullet\sqrt{3-a^2}=a\sqrt{3-a^2}=\sqrt{3a^2-a^4}=\sqrt{-(a^2-\dfrac{3}{2})^2+\dfrac{9}{4}}$，由 $a^2\le\dfrac{23}{16}$，可得 $a^2=\dfrac{23}{16}$，S 取得最大值，且为 $\dfrac{5\sqrt{23}}{16}$．故选 B．



9.【解析】直线$l_1:kx-y+4=0$与直线$l_2:x+ky-3=0$的斜率之积：$k\times(-\frac{1}{k})=-1$，直线$l_1:kx-y+4=0$与直线$l_2:x+ky-3=0$垂直，直线$l_1:kx-y+4=0$与直线$l_2:x+ky-3=0$分别过点$M(0,4)$，$N(3,0)$，直线$l_1:kx-y+4=0$与直线$l_2:x+ky-3=0$的交点P在以MN为直径的圆上，P为以$C(\frac{3}{2},2)$为圆心，半径为$\frac{5}{2}$的圆上，圆心C到直线$4x-3y+10=0$的距离为$d=\frac{|6-6+10|}{5}=2$，则点P到直线$4x-3y+10=0$的距离的最大值为$d+r=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$．故选$B$．

10.【解析】连接AE，则$PA\perp$底面$ABCD$，则$PE\perp DE$，根据三垂线定理可得$AE\perp DE$，故E在以AD为直径的圆上，因为$AD=3AB$，则E在以AD为直径的圆与BC有两个交点，故满足$PE\perp DE$的λ值有2个，故选C．

11.【解析】设BC的中点为E，连接AE，PE；并设$\overrightarrow{PO}$与$\overrightarrow{OE}$的夹角为θ



如图 因为等边ΔABC内接于圆$\Gamma:x^2+y^2=1$，所以O在AE上且$OA=2OE=1$，则

$\overrightarrow{PA}\bullet(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=\overrightarrow{PA}\bullet2\overrightarrow{PE}=2(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\bullet(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OE})=2[\overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{PO}\bullet(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE})+\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OE}]=2[\overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{PO}\bullet(-\overrightarrow{OE})-2\overrightarrow{OE}^2]$

$=2[1^2-1\times\frac{1}{2}\times\cos\theta-2\times(\frac{1}{2})^2]=1-\cos\theta$，故当$\cos\theta=-1$即点$P$在$AE$ 的延长线与圆的交点时；

$\overrightarrow{PA}\bullet(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$取最大值，此时最大值为$1-(-1)=2$，故选$D$．

12.【解析】设$B(x,y)$，$P(m,n)$，由于在平面直角坐标系xOy中，O为坐标原点，$A(0,2)$，

$|OB|^2+|OA|^2=20$，

所以：$x^2+y^2=16$，设$x=4\cos\theta$，$y=4\sin\theta$，由于平面内点P满足$\overrightarrow{PB}=3\overrightarrow{PA}$，

则$(4\cos\theta-m,4\sin\theta-m)=3(-m,2-n)$，整理得：$m=-2\cos\theta$，$n=3-2\sin\theta$，

所以$|PO|=\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{13-12\sin\theta}$，当$\sin\theta=-1$时，$|PO|$的最大值为5，故选$C$．

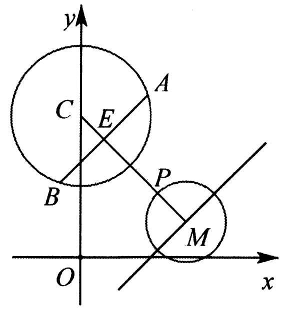
13.【解析】圆$C:(x-3)^2+(y-4)^2=1$的圆心$C(3,4)$，半径$r=1$，设$P(a,b)$在圆C上，则$\overrightarrow{MP}=(a+t,b)$，$\overrightarrow{NP}=(a-t,b)$，由$\angle MPN=90^\circ$，故$\overrightarrow{MP}\bullet\overrightarrow{NP}=(a+t)(a-t)+b^2=0$，则$t^2=a^2+b^2=|OP|^2$，故$t$的最大值即为$|OP|$的最大值，等于$|OC|+r=5+1=6$．最小值即为$|OP|$的最小值，等于$|OC|-r=5-1=4$，则$t$的最小值是4，故选$C$．

14.【解析】因为AB是圆$O:x^2+y^2=1$的任意一条直径；

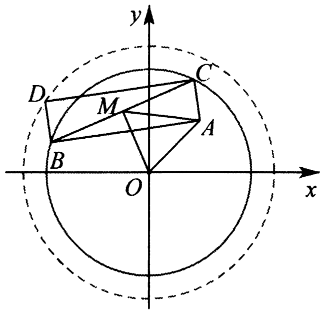
故$\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\bullet(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{PO}\bullet(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{PO}|^2-1$；由题得$|\overrightarrow{OP}|$的最小值为$\sqrt{5}$，即点$O$到直线的距离为$\sqrt{5}$，故$\frac{|a|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Rightarrow a=5$　$(a=-5$舍)，即$a=5$，故选：C．

15.【解析】如图，圆$M:(x-a)^2+(y-a+2)^2=1$的圆心M在直线$y=x-2$上，圆心C到AB的距离为1，点C到直线$y=x-2$的距离$d=\frac{4+2}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，$AB$的中点$E$到圆心$M$的最短距离为$3\sqrt{2}-1$，$PE$的最小值为$3\sqrt{2}-2$，可得$\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=\frac{1}{4}[(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})^2+(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})^2]=(PE^2-\frac{1}{4}AB^2=PE^2-3\geq(3\sqrt{2}-2)^2-3=19-12\sqrt{2}$

$\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$的最小值是$19-12\sqrt{2}$，故答案为$19-12\sqrt{2}$．



16.【解析】法一：设 BC 的中点为 $M(x,y)$，因为 $OB^2=OM^2+BM^2=OM^2+AM^2$，有 $4=x^2+y^2+(x-1)^2+(y-1)^2$，化简得 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}$，所以点 M 的轨迹是以 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 为圆心，$\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 为半径的圆，所以 AM 的取值范围是 $[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}]$，所以 BC 的取值范围是 $[\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2}]$.

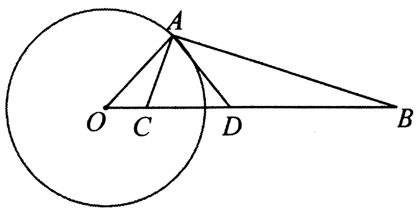


法二：（矩形大法）$OA^2+OD^2=OB^2+OC^2\Rightarrow OD^2=6$，所以 $|AD|=|BC|\in[\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2}]$

17. 答案：$[\sqrt{19}-1,\sqrt{19}+1]$（参考上一题）.

18.【解析】以点 A 为坐标原点，AB 为 x 轴正半轴，使得 C 落在第一象限，建立平面直角坐标系设 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则由 $\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，得 $Q(\frac{2}{3}\cos\alpha+\frac{1}{2},\frac{2}{3}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2})$，故点 Q 的轨迹是 $D(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 为圆心，$\frac{2}{3}$ 为半径的圆，又 $BD=\sqrt{7}$，所以 BQ 的最小值是 $\sqrt{7}-\frac{2}{3}$.

19.【解析】由条件 $\sin\angle BAD=\sqrt{2}\sin\angle CAD$，结合面积公式有 $\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，可知 A 轨迹为圆，于是有：$\frac{AO}{OC+BC}=\frac{OC}{OA}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$OA^2=OC(OC+BC)$，$OA^2=\frac{\sqrt{2}}{2}OA(\frac{\sqrt{2}}{2}OA+3)$，故 $OA=3\sqrt{2}$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot h\le\frac{1}{2}\times3\times3\sqrt{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$.



20.【解析】因为 $\angle APO=\frac{1}{2}\angle APB=45°$，所以 $PO=\sqrt{2}OA=2\sqrt{2}$．故 P 的轨迹是一个以原点为圆心，半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆，点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=8$．故答案为 $x^2+y^2=8$．

21.【解析】设 $P(x,y)$，由 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，得 $PA^2+PB^2=40$，则 $(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2=40$，

整理得$x^2+y^2=16$，又点P在圆$(x-3)^2+(y-4)^2=r^2(r>0)$上，这样的点P有两个，

由圆$(x-3)^2+(y-4)^2=r^2(r>0)$的圆心$M(3,4)$，半径为r，$x^2+y^2=16$的圆心$O(0,0)$，半径为4，

则$|OM|=\sqrt{9+16}=5$，因为满足条件的点P有两个，故两圆$x^2+y^2=16$和$(x-3)^2+(y-4)^2=r^2(r>0)$相交，

所以$|r-4|<|OM|=5<|r+4|$，解得$1<r<9$，故答案为$(1,9)$．

22.【解析】由题意$\begin{cases}mx-y-2m+2=0\\x+my=0\end{cases}$，将$m=-\dfrac{x}{y}$代入$l_1:mx-y-2m+2=0$，化简可得$x^2+y^2-2x-2y=0$，即有$M$在以圆心$C_1(1,1)$，半径为$\sqrt{2}$的圆上，又$A(2a,0)(a>0)$，设$M(x,y)$，$MA^2+MO^2=2a^2+16$，可得$(x-2a)^2+y^2+x^2+y^2=2a^2+16$，即有$x^2+y^2-2ax+a^2-8=0$，可得$M$在以圆心$C_2(a,0)$，半径为$2\sqrt{2}$的圆上，由两圆相交可得$\sqrt{2}\le|C_1C_2|\le3\sqrt{2}$，即为$\sqrt{2}\le\sqrt{(a-1)^2+1}\le3\sqrt{2}$，解得$2\le a\le1+\sqrt{17}$．

故答案为：$[2,1+\sqrt{17}]$．

23.【解析】动直线$x+my=0$过定点$A(0,0)$，动直线$mx-y-m+3=0$即$m(x-1)+3-m=0$过定点$B(1,3)$．无论$m=0$，$m\ne0$，都有此两条直线垂直．故点P在以AB为直径的圆上，所以圆心坐标$(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2})$，

半径为：$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$．

点P的轨迹方程：$(x-\dfrac{1}{2})^2+(y-\dfrac{3}{2})^2=\dfrac{5}{2}$，故答案为$(x-\dfrac{1}{2})^2+(y-\dfrac{3}{2})^2=\dfrac{5}{2}$．

24．【解析】由题意$O(0,0)$，$O_1(-4,0)$，设$P(x,y)$，因为$PB=2PA$，故$|PB|^2=4|PA|^2$，则$(x+4)^2+y^2-4=4x^2+4y^2-4$，整理得$3x^2+3y^2-8x-16=0$．其圆心坐标为$(\dfrac{4}{3},0)$，半径为$\dfrac{8}{3}$，由动点$P$在直线$x-2\sqrt{2}y+b=0$上，满足$PB=2PA$的点$P$有且只有一个，故该直线与圆得$3x^2+3y^2-8x-16=0$相切，圆心到直线的距离满足$d=\dfrac{|\frac{4}{3}+b|}{3}=\dfrac{8}{3}$，解得：$b=-\dfrac{28}{3}$．故答案为$-\dfrac{28}{3}$．

25.【解析】设$P(x,x+m)$，因为$2PA=PB$，故$4|PA|^2=|PB|^2$，则$4(x-1)^2+4(x+m)^2=(x-4)^2+(x+m)^2$，化为$(x+m)^2=4-x^2$，则$4-x^2\ge0$，解得$x\in[-2,2]$，所以$m=-x\pm\sqrt{4-x^2}$，令$x=2\cos\theta$，$\theta\in[0,\pi]$，故$m=-2\cos\theta\pm2\sin\theta=\pm2\sqrt{2}\sin(\theta\pm\dfrac{\pi}{4})\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$，实数$m$的取值范围是$[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$，

故答案为$[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$．

26.【解析】法一：以AB所在直线为x轴，以AD所在直线为y轴建立平面直角坐标系如图：如图，则$F(0,2)$，$E(8,4)$，(1)若P在AB上，设$P(x,0)$，$0\le x\le8$，故$\overrightarrow{PF}=(-x,2)$，$\overrightarrow{PE}=(8-x,4)$，故$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=x^2-8x+8$，因为$x\in[0,8]$，故$-8\le\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}\le8$，当$\lambda=-8$时有一解，当$-8<\lambda\le8$时有两解；

（2）若P在AD上，设$P(0,y)$，$0<y\le8$，故$\overrightarrow{PF}=(0,2-y)$，$\overrightarrow{PE}=(8,4-y)$，

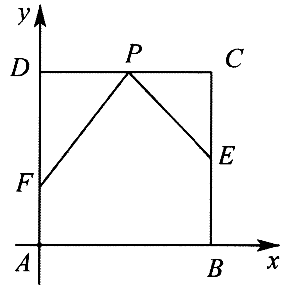
则$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(2-y)(4-y)=y^2-6y+8$，所以$0<y\le8$，故$-1\le\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}<24$，当$\lambda=-1$或$8<\lambda<24$时有唯一解，当$-1<\lambda\le8$时有两解；

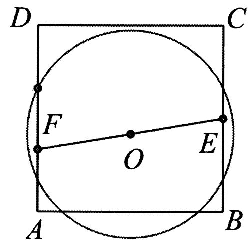
（3）若P在DC上，设$P(x,8)$，$0<x\le8$，$\overrightarrow{PF}=(-x,-6)$，$\overrightarrow{PE}=(8-x,-4)$，故$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=x^2-8x+24$，因为$0<x\le8$，故$8\le\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}\le24$，当$\lambda=8$时有一解，当$8<\lambda\le24$时有两解．

（4）若P在BC上，设$P(8,y)$，$0<y<8$，故$\overrightarrow{PF}=(-8,2-y)$，$\overrightarrow{PE}=(0,4-y)$，

故$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(2-y)\cdot(4-y)=y^2-6y+8$，因为$0<y<8$，故$-1\le\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}<24$，当$\lambda=-1$或$8<\lambda<24$时有一解，当$-1<\lambda\le8$时有两解．

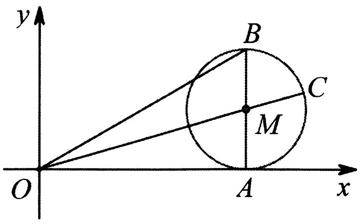
综上，在正方形$ABCD$的四条边上有且只有6个不同的点P，使得$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=\lambda$成立，那么$\lambda$的取值范围是$(-1,8)$，故答案为$(-1,8)$





法二：由 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=|PO|^2-\frac{|EF|^2}{4}\Rightarrow|PO|^2=\lambda+\frac{2^2+8^2}{4}=\lambda+17$，在正方形 $ABCD$ 的四条边上有且只有 6 个不同的点 P，则 $4<|PO|\Rightarrow\lambda>-1$，且 $|PO|<|OA|\Rightarrow\lambda<8$，且 $|PO|<5\Rightarrow\lambda<8$（不与 CD 相切），故答案为：$(-1，8)$．

27.【解析】法一 因为 $(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$，即 $\vec{c}^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}+\vec{b}||\vec{c}|\cos\alpha-\sqrt{3}\times2\cos\frac{\pi}{6}=|\vec{a}+\vec{b}||\vec{c}|\cos\alpha-3$，其中 α 为 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角，又因为 $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=3+4+2\sqrt{3}\times2\cos\frac{\pi}{6}=13$，所以 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$，所以 $\vec{c}^2=\sqrt{13}|\vec{c}|\cos\alpha-3$，解得 $\cos\alpha=\frac{\vec{c}^2+3}{\sqrt{13}|\vec{c}|}$，因为 $0\le\alpha\le\pi$，$-1\le\cos\alpha\le1$，所以 $\frac{\vec{c}^2+3}{\sqrt{13}|\vec{c}|}\le1$，即有 $|\vec{c}|^2-\sqrt{13}|\vec{c}|+3\le0$，解得 $\frac{\sqrt{13}-1}{2}\le|\vec{c}|\le\frac{\sqrt{13}+1}{2}$，故答案为 $[\frac{\sqrt{13}-1}{2}，\frac{\sqrt{13}+1}{2}]$．



法二 如图，根据题意，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(\sqrt{3}，0)$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(\sqrt{3}，1)$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，显然 C 在以 AB 中点 $M(\sqrt{3}，\frac{1}{2})$ 为圆心，AB 为直径的圆上，故 $\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\le|OC|\le\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2}$，答案为 $[\frac{\sqrt{13}-1}{2}，\frac{\sqrt{13}+1}{2}]$．

28．【解析】因为 $\vec{a}\perp(\vec{a}-2\vec{b})$，有 $\vec{a}\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=0$，即 $|\vec{a}|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60^0

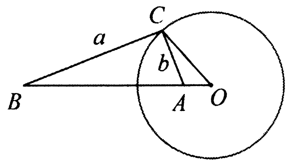
设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，以 O 为原点，$\overrightarrow{OB}$ 的方向为 x 轴建立平面直角坐标系，设 A 点位于坐标平面的第一象限内，则 $\angle xOA=\angle BOA=60°$，$\vec{a}=(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\vec{b}=(1，0)$，设 $\vec{c}=(x，y)$，则

$\vec{c}-\vec{b}=(x-1，y)$，$\vec{c}-2\vec{a}=(x-1，y-\sqrt{3})$，$\vec{c}-2\vec{a}=(x-1，y-\sqrt{3})$，由 $(\vec{c}-2\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$，得 $(x-1)^2+y(y-\sqrt{3})=0$，即 $(x-1)^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{3}{4}$，点 C 的轨迹是以点 $M(1，\frac{\sqrt{3}}{2})$ 为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为半径的圆．又 $|\vec{c}|=\sqrt{x^2+y^2}$ 表示圆 M 上的点与原点 O 之间的距离．所以 $|\vec{c}|_{\max}=|OM|+r$，$|\vec{c}|_{\min}=|OM|-r$，$|\vec{c}|_{\max}+|\vec{c}|_{\min}=2|OM|=\sqrt{7}$，故答案为 $\sqrt{7}$．

29．分析：$(\frac{b}{a}-\frac{a}{b})_{\max}$，满足 $\frac{b}{a}$ 取最大即可（或 $\frac{a}{b}$ 最小）

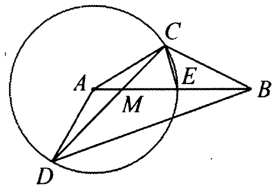
【解析】设 $\frac{b}{a}=\lambda(\lambda\ne1)$，同理列式：$OC^2=AO(AO+AB)$，$OC^2=\lambda OC(\lambda OC+AB)$，$(1-\lambda^2)OC^2=\lambda OC\cdot AB$，

$OC=\dfrac{\lambda}{1-\lambda^2}AB$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}h\cdot c=\sqrt{3}\Rightarrow h=\sqrt{3}$ 且 $OC\ge\sqrt{3}$，即 $\dfrac{2\lambda}{1-\lambda^2}\ge\sqrt{3}\Rightarrow 1<\lambda\le\sqrt{3}$，故 $\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}\le\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$



30.【解析】在 AB 上取 $AM=\dfrac{1}{4}AB$，易证 $\triangle ACM\backsim\triangle ABC$，则 $\dfrac{CB}{CM}=\dfrac{CA}{AM}=2$，得

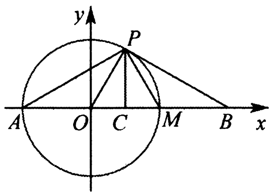
$CB-2CD=2(\dfrac{1}{2}CB-CD)=2(CM-CD)\le 2DM=2\sqrt{3}$



31.【解析】取 $C(1,0)$，则 $\dfrac{CO}{OP}=\dfrac{OP}{OB}=\dfrac{CP}{BP}=\dfrac{1}{2}$，且 $\dfrac{CM}{MB}=\dfrac{CP}{BP}=\dfrac{1}{2}$，故 PM 平分 $\angle CPM$，设 $PC=x$，$PB=2x$

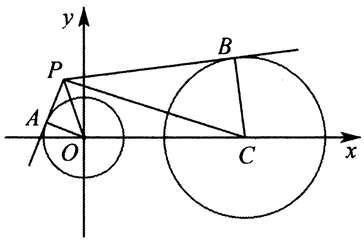
故 $PM^2=PC\cdot PB-CM\cdot MB=2x^2-2$（斯库顿定理，参考秒 1），$PA^2=AM^2-PM^2=18-2x^2$

所以 $\dfrac{2}{PA^2}+\dfrac{1}{PB^2}=\dfrac{4}{36-4x^2}+\dfrac{1}{4x^2}\ge\dfrac{1}{4}$.

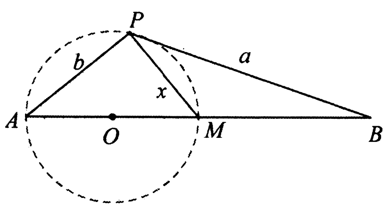


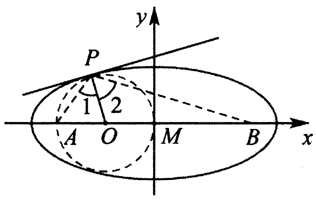
32.【解析】由 $PB\ge 2PA\Rightarrow PB^2\ge 4PA^2$，$PB^2=PC^2-4$，$PA^2=PO^2-1$，得 $PC^2-4\ge 4(PO^2-1)$，$PC^2\ge 4PO^2$

设 $P:(x,y)$，于是有：$(x+\dfrac{4}{3})^2+y^2\le\dfrac{64}{9}$，圆心 $P_o:(\dfrac{4}{3},0)$，P_o 到直线距离 $d=\dfrac{5}{3}$，则线段 $EF=\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$



33.【解析】法一：由 $\begin{cases}a^2+b^2=2(x^2+3)\\ b^2+x^2=3\end{cases}\Rightarrow 3b^2+a^2=12\Rightarrow\dfrac{b^2}{\frac{1}{3}}+\dfrac{a^2}{1}=12\ge\dfrac{(a+b)^2}{\frac{1}{3}+1}\Rightarrow a+b\le 4$.





法二：设 $mPA^2+PB^2=n$（其中 m,n 为待定系数），当 P 运动到 A 时，$n=PB^2=12$，当 P 运动到 M 时，$m\cdot 3+3=12\Rightarrow m=3$；下同法一.

法三：构造椭圆，以 A,B 为焦点作椭圆，与圆 O 相切时，$|PA|+|PB|$ 有最大值.

由题意可知 $\angle 1=\angle 2\Rightarrow \dfrac{PA}{PB}=\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{1}{3}$① 又 $PA^2+PB^2=2PM^2+6=2(3-PA^2)+6\Rightarrow 3PA^2+PB^2=12$②

由①②得 $PA=1$，$PB=3$.

34.【解析】(1) 圆 C 的标准方程为 $(x-2)^2+y^2=4$，所以圆心为 $C(2,0)$，因为 $l/\!/AB$，$A(-1,0)$，$B(1,2)$，所以直线 l 的斜率为 $\dfrac{2-0}{1-(-1)}=1$，设直线 l 的方程为 $x-y+m=0$，则圆心到直线 l 的距离为

$d=\dfrac{|2-0+m|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|2+m|}{\sqrt{2}}$，因为 $MN=AB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，而 $CM^2=d^2+(\dfrac{MN}{2})^2$，所以 $4=\dfrac{(2+m)^2}{2}+2$，解得 $m=0$ 或 $m=-4$，故直线 l 的方程为 $x-y=0$ 或 $x-y-4=0$.

(2) 假设圆 C 上存在点 $P(x,y)$，则 $(x-2)^2+y^2=4$，$PA^2+PB^2=(x+1)^2+(y-0)^2+(x-1)^2+(y-2)^2=12$ 即 $x^2+y^2-2y-3=0$，即 $x^2+(y-1)^2=4$，因为 $|2-2|<\sqrt{(2-0)^2+(0-1)^2<2}+2$，所以圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 相交，所以 P 的个数为 2.

35.【解析】(1) 因为直线 l_1 过点 $A(3,0)$，且与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，设直线 l_1 的方程为 $y=k(x-3)$，即 $kx-y-3k=0$，则圆心 $O(0,0)$)到直线 l_1 的距离为 $d=\dfrac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，所以直线 l_1 的方程为

$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-3)$.

(2) 对于圆方程 $x^2+y^2=1$，令 $y=0$，得 $x=\pm 1$，即 $P(-1,0)$，$Q(1,0)$，又直线 l_2 过点 A 且与 x 轴垂直，所以直线 l_2 方程为 $x=3$，设 $M(s,t)$，则直线 PM 方程为 $y=\dfrac{t}{s+1}(x+1)$. 解方程组 $\begin{cases}x=3\\ y=\dfrac{t}{s+1}(x+1)\end{cases}$，得

$P'(3,\dfrac{4t}{s+1})$ 同理可得，$Q'(3,\dfrac{2t}{s-1})$，所以以 $P'Q'$ 为直径的圆 C 的方程为

$(x-3)(x-3)+(y-\dfrac{4t}{s+1})(y-\dfrac{2t}{s-1})=0$ 又 $s^2+t^2=1$，所以整理得 $x^2+y^2-6x+1+\dfrac{6s-2}{t}y=0$ 若圆 C 经过定点，只需令 $y=0$，从而有 $x^2-6x+1=0$，解得 $x=3\pm 2\sqrt{2}$，所以圆 C 总经过定点坐标为 $(3\pm 2\sqrt{2},0)$.